A

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE 1
Docente: Francesco Esposito

20 giugno 2019

ESERCIZI

Esercizio 1. Determinare quali delle seguenti affermazioni sono sempre vere. Se sono sempre vere fornire una dimostrazione, se non sono sempre vere, fornire un controesempio.

(a) Se $u, v, w \in \mathbb{R}^4$ sono tali che u è ortogonale a v e v è ortogonale a w, allora si ha che u è ortogonale a w.

(b) Se $u, v, w \in \mathbb{R}^5$ sono tali che u è parallelo a v e v è ortogonale a w, allora si ha che u è ortogonale a w.

Esercizio 2. Trovare tutti i numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^3 = \frac{2-23i}{3-2i} + \overline{2+i}$$

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^4$, siano $U =< (2,2,-1,1), (1,-1,1,-1) >$ e $V =< (0,1,1,0), (3,1,0,0) >$

(a) Determinare una base di $U \cap V$ ed una base di $U + V$.

(b) Determinare una base di un sottospazio W tale che $W \oplus (U \cap V) = U + V$.

(c) Completare la base trovata di $U + V$ ad una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 4. Si consideri l'endomorfismo $\Phi_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, la cui matrice associata rispoetto alla base canonica è:

$$A_k = A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3,\Phi_k} = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

(a) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, determinare autovalori e autospazi di Φ_k.

(b) Determinare per quali valori del parametro k l'endomorfismo Φ_k è diagonalizzabile.

(c) Determinare l'immagine inversa $\Phi_{-1}^{-1}((1,1,0))$ del vettore $(1,1,0)$ tramite l'applicazione lineare Φ_{-1}.

(voltare pagina)

Esercizio 5. Si consideri il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$W =< (1, -3, 1), (1, -1, 0), (-2, 0, 1) >$$

e sia π_W la proiezione ortogonale su W.

(a) Determinare una base ortonormale di W.

(b) Determinare $\pi_W(-1, 1, -1)$ e $\pi_W^{-1}(-2, 1, 1)$.

(c) Determinare $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $||v|| = 2||\pi_W(v)||$.

Esercizio 6. Nello spazio euclideo usuale si considerino:
i punti $P_1 = (1, 2, 3)$, $P_2 = (3, -1, 0)$ ed i piani

$$\pi_1 = (0, -1, 2)+ < (2, 1, 0), (1, 1, 2) >, \qquad \pi_2 : 2x - y + z = 2.$$

(a) Determinare una forma parametrica di π_2 ed una forma cartesiana di π_1.

(b) Sia r la retta ortogonale a π_1 e passante per P_2. Determinare forma parametrica e forma cartesiana di r.

(c) Determinare la distanza tra la retta r ed il punto P_1.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio (cartellina bianca, tutti i fogli di brutta etc) in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola).
- Consegnare **la cartellina bianca**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito avere con se libri, appunti, telefoni, calcolatrici e simili.
- Si potrà uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

B

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE 1
Docente: Francesco Esposito

20 giugno 2019

ESERCIZI

Esercizio 1. Determinare quali delle seguenti affermazioni sono sempre vere. Se sono sempre vere fornire una dimostrazione, se non sono sempre vere, fornire un controesempio.

(a) Se $u, v, w \in \mathbb{R}^6$ sono tali che u e v sono linearmente indipendenti e v e w sono linearmente indipendenti, allora si ha che u e w sono linearmente indipendenti.

(b) Se $u, v, w \in \mathbb{R}^5$ sono tali che u e v sono linearmente dipendenti e v e w sono linearmente indipendenti, allora si ha che u e w sono linearmente indipendenti.

Esercizio 2. Trovare tutti i numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^5 = \frac{2+23i}{3+2i} + \overline{2-i}$$

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^4$, siano $U =< (-2,-1,2,1), (-1,1,-1,-1) >$ e $V =< (0,1,1,0), (-3,0,1,0) >$

(a) Determinare una base di $U \cap V$ ed una base di $U + V$.

(b) Determinare una base di un sottospazio W tale che $W \oplus (U \cap V) = U + V$.

(c) Completare la base trovata di $U + V$ ad una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 4. Si consideri l'endomorfismo $\Psi_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$, la cui matrice associata rispetto alla base canonica è:

$$B_h = A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3,\Psi_h} = \begin{pmatrix} -h & 0 & -1 \\ 0 & 1-h & 0 \\ 0 & h & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Per ogni $h \in \mathbb{R}$, determinare autovalori e autospazi di Ψ_h.

(b) Determinare per quali valori del parametro h l'endomorfismo Ψ_h è diagonalizzabile.

(c) Determinare l'immagine inversa $\Psi_1^{-1}((-1,0,1))$ del vettore $(-1,0,1)$ tramite l'applicazione lineare Φ_1.

(voltare pagina)

Esercizio 5. Si consideri il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$W =< (-1, 1, -3), (-1, 0, -1), (2, 1, 0) >$$

e sia π_W la proiezione ortogonale su W.

(a) Determinare una base ortonormale di W.

(b) Determinare $\pi_W(1, -1, 1)$ e $\pi_W^{-1}(2, 1, 1)$.

(c) Determinare $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $||v|| = 2||\pi_W(v)||$.

Esercizio 6. Nello spazio euclideo usuale si considerino:
i punti $P_1 = (-1, 3, 2)$, $P_2 = (-3, 0, -1)$ ed i piani

$$\pi_1 = (0, 2, -1)+ < (-2, 0, 1), (-1, 2, 1) >, \qquad \pi_2 : -2x + y - z = 2.$$

(a) Determinare una forma parametrica di π_2 ed una forma cartesiana di π_1.

(b) Sia r la retta ortogonale a π_1 e passante per P_2. Determinare forma parametrica e forma cartesiana di r.

(c) Determinare la distanza tra la retta r ed il punto P_1.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio (cartellina bianca, tutti i fogli di brutta etc) in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola).
- Consegnare **la cartellina bianca**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito avere con se libri, appunti, telefoni, calcolatrici e simili.
- Si potrà uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

C

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE 1
Docente: Francesco Esposito

20 giugno 2019

ESERCIZI

Esercizio 1. Determinare quali delle seguenti affermazioni sono sempre vere. Se sono sempre vere fornire una dimostrazione, se non sono sempre vere, fornire un controesempio.

(a) Se $u, v, w \in \mathbb{R}^5$ sono tali che u non è ortogonale a v e v non è ortogonale a w, allora si ha che u non è ortogonale a w.

(b) Se $u, v, w \in \mathbb{R}^5$ sono tali che u è parallelo a v e v non è ortogonale a w, allora si ha che u non è ortogonale a w.

Esercizio 2. Trovare tutti i numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^3 = \frac{-2+23i}{3-2i} - \overline{2+i}$$

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^4$, siano $U =< (-1,-2,2,1),(1,1,1,-1) >$ e $V =< (1,-1,0,0),(0,-1,3,0) >$

(a) Determinare una base di $U \cap V$ ed una base di $U + V$.

(b) Determinare una base di un sottospazio W tale che $W \oplus (U \cap V) = U + V$.

(c) Completare la base trovata di $U + V$ ad una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 4. Si consideri l'endomorfismo $\Phi_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, la cui matrice associata rispetto alla base canonica è:

$$C_k = A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3,\Phi_k} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ k-1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & k-1 \end{pmatrix}$$

(a) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, determinare autovalori e autospazi di Φ_k.

(b) Determinare per quali valori del parametro k l'endomorfismo Φ_k è diagonalizzabile.

(c) Determinare l'immagine inversa $\Phi_0^{-1}((0,-1,1))$ del vettore $(0,-1,1)$ tramite l'applicazione lineare Φ_0.

(voltare pagina)

Esercizio 5. Si consideri il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$W =< (1,3,1), (0,1,1), (1,0,-2) >$$

e sia π_W la proiezione ortogonale su W.

(a) Determinare una base ortonormale di W.

(b) Determinare $\pi_W(-1,-1,-1)$ e $\pi_W^{-1}(1,-1,-2)$.

(c) Determinare $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $||v|| = 2||\pi_W(v)||$.

Esercizio 6. Nello spazio euclideo usuale si considerino:
i punti $P_1 = (3,-2,1)$, $P_2 = (0,1,3)$ ed i piani

$$\pi_1 = (2,1,0)+ < (0,-1,2), (2,-1,1) >, \qquad \pi_2 : x+y+2z = 2.$$

(a) Determinare una forma parametrica di π_2 ed una forma cartesiana di π_1.

(b) Sia r la retta ortogonale a π_1 e passante per P_2. Determinare forma parametrica e forma cartesiana di r.

(c) Determinare la distanza tra la retta r ed il punto P_1.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio (cartellina bianca, tutti i fogli di brutta etc) in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola).
- Consegnare **la cartellina bianca**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito avere con se libri, appunti, telefoni, calcolatrici e simili.
- Si potrà uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

D

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE 1
Docente: Francesco Esposito

20 giugno 2019

ESERCIZI

Esercizio 1. Determinare quali delle seguenti affermazioni sono sempre vere. Se sono sempre vere fornire una dimostrazione, se non sono sempre vere, fornire un controesempio.

(a) Se $u, v, w \in \mathbb{R}^6$ sono tali che u e v non sono linearmente indipendenti e v e w non sono tra loro ortogonali, allora si ha che u e w non sono paralleli.

(b) Se $u, v, w \in \mathbb{R}^5$ sono tali che u e v sono tra loro ortogonali e v e w sono tra loro ortogonali, allora si ha che se u e w non sono paralleli, sono tra loro ortogonali.

Esercizio 2. Trovare tutti i numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^3 = \frac{2+23i}{-3-2i} - \overline{2-i}$$

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^4$, siano $U =< (2,2,1,1), (-1,1,-1,-1) >$ e $V =< (1,0,-1,0), (1,3,0,0) >$

(a) Determinare una base di $U \cap V$ ed una base di $U + V$.

(b) Determinare una base di un sottospazio W tale che $W \oplus (U \cap V) = U + V$.

(c) Completare la base trovata di $U + V$ ad una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 4. Si consideri l'endomorfismo $\Psi_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$, la cui matrice associata rispetto alla base canonica è:

$$D_h = A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3,\Psi_h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ 1 & -h & 0 \\ 0 & 0 & 1-h \end{pmatrix}$$

(a) Per ogni $h \in \mathbb{R}$, determinare autovalori e autospazi di Ψ_h.

(b) Determinare per quali valori del parametro h l'endomorfismo Ψ_h è diagonalizzabile.

(c) Determinare l'immagine inversa $\Psi_1^{-1}((1,1,0))$ del vettore $(1,1,0)$ tramite l'applicazione lineare Ψ_1.

(voltare pagina)

Esercizio 5. Si consideri il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$W = < (-3, 1, -1), (-1, 1, 0), (0, -2, -1) >$$

e sia π_W la proiezione ortogonale su W.

(a) Determinare una base ortonormale di W.

(b) Determinare $\pi_W(1, -1, 1)$ e $\pi_W^{-1}(1, -2, -1)$.

(c) Determinare $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $||v|| = 2||\pi_W(v)||$.

Esercizio 6. Nello spazio euclideo usuale si considerino:
i punti $P_1 = (2, 1, -3)$, $P_2 = (-1, 3, 0)$ ed i piani

$$\pi_1 = (-1, 0, -2) + < (1, 2, 0), (1, 1, -2) >, \qquad \pi_2 : -x + 2y - z = 2.$$

(a) Determinare una forma parametrica di π_2 ed una forma cartesiana di π_1.

(b) Sia r la retta ortogonale a π_1 e passante per P_2. Determinare forma parametrica e forma cartesiana di r.

(c) Determinare la distanza tra la retta r ed il punto P_1.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio (cartellina bianca, tutti i fogli di brutta etc) in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola).
- Consegnare **la cartellina bianca**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito avere con se libri, appunti, telefoni, calcolatrici e simili.
- Si potrà uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.