A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE 1
Docente: Francesco Esposito

10 luglio 2019

ESERCIZI

Esercizio 1. Determinare tutti i numeri complessi z tali che si abbia $2\frac{z}{1-i} + (1+2i)\overline{z} = 8+9i$.

Esercizio 2. Determinare parte reale e parte immaginaria del numero complesso $w = (1 - i\sqrt{3})^{10}$.

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^3$, siano $u = (1, 2, -1)$, $v = (0, -1, 1)$ e $w = (0, 0, 1)$. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$f(u) = u + v, \qquad f(v) = (-1, 0, 0) + u, \qquad f(w) = (1, 3, 0) - w.$$

(a) Dimostrare che esiste una unica f con tali proprietà.

(b) Determinare una base di $\mathrm{Ker}(f)$ ed una base di $\mathrm{Im}(f)$.

(c) Determinare la matrice $A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3,f}$ associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(d) Determinare tutti i vettori $z \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(z) = (-1, 1, -1)$.

Esercizio 4. Si consideri l'endomorfismo $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, la cui matrice associata rispetto alla base canonica è:

$$A = A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3,\Phi} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare gli autovalori di Φ e la loro molteplicità algebrica.

(b) Determinare una base ortonomale $\mathcal{V}$ di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di Φ.

(c) Determinare una matrice ortogonale K ed una matrice diagonale D tali che $A = K^tDK$.

(voltare pagina)

Esercizio 5. Si consideri il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$:

$$W : x - y + 2z + w = 0$$

e sia $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proiezione sul sottospazio W lungo il sottospazio $U =< (1, -1, 2, 1) >$.

(a) Determinare una base del sottospazio $(\mathrm{Ker}(\pi))^\perp$.

(b) Determinare $\pi(4, 0, 1, 1)$.

(c) Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che

$$v + \alpha(2, 1, -2, 2) = 2\pi(v)$$

per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6. Nello spazio euclideo usuale si considerino i piani :

$$\pi_1 = (1, 0, 1)+ < (2, 1, 1), (1, 1, 0) >, \qquad \pi_2 : x + y - 2z = 2$$

(a) Determinare forma parametrica e forma cartesiana della retta r contenuta in tutti i piani del fascio di piani generato da π_1 e π_2.

(b) Determinare forma parametrica e forma cartesiana del piano π appartenente al fascio generato da π_1 e π_2, e parallelo alla retta $s = (1, 0, 0)+ < (3, 0, 1) >$

(c) Determinare posizione reciproca e distanza del piano π_2 con la retta $t = (0, 1, 0)+ < (1, 1, 1) >$.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio (cartellina bianca, tutti i fogli di brutta etc) in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola).
- Consegnare **la cartellina bianca**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito avere con se libri, appunti, telefoni, calcolatrici e simili.
- Si potrà uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

B

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE 1
Docente: Francesco Esposito

10 luglio 2019

ESERCIZI

Esercizio 1. Determinare tutti i numeri complessi z tali che si abbia $2\frac{z}{1+i} + (1-2i)\overline{z} = 8 - 9i$.

Esercizio 2. Determinare parte reale e parte immaginaria del numero complesso $w = (3 + i3\sqrt{3})^{10}$.

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^3$, siano $u = (1, -1, 2)$, $v = (0, 1, -1)$ e $w = (0, 1, 0)$. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$f(u) = u + v, \qquad f(v) = (-1, 0, 0) + u, \qquad f(w) = (1, 0, 3) - w.$$

(a) Dimostrare che esiste una unica f con tali proprietà.

(b) Determinare una base di $\mathrm{Ker}(f)$ ed una base di $\mathrm{Im}(f)$.

(c) Determinare la matrice $A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3,f}$ associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(d) Determinare tutti i vettori $z \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(z) = (-1, -1, 1)$.

Esercizio 4. Si consideri l'endomorfismo $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, la cui matrice associata rispetto alla base canonica è:

$$A = A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3,\Phi} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare gli autovalori di Φ e la loro molteplicità algebrica.

(b) Determinare una base ortonomale $\mathcal{V}$ di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di Φ.

(c) Determinare una matrice ortogonale K ed una matrice diagonale D tali che $A = K^t D K$.

(voltare pagina)

Esercizio 5. Si consideri il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$:

$$W : x + 2y - z + w = 0$$

e sia $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proiezione sul sottospazio W lungo il sottospazio $U =< (1, 2, -1, 1) >$.

(a) Determinare una base del sottospazio $(\mathrm{Ker}(\pi))^{\perp}$.

(b) Determinare $\pi(4, 1, 0, 1)$.

(c) Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che

$$v + \alpha(2, -2, 1, 2) = 2\pi(v)$$

per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6. Nello spazio euclideo usuale si considerino i piani :

$$\pi_1 = (1, 1, 0)+ < (2, 1, 1), (1, 0, 1) >, \qquad \pi_2 : x - 2y + z = 2$$

(a) Determinare forma parametrica e forma cartesiana della retta r contenuta in tutti i piani del fascio di piani generato da π_1 e π_2.

(b) Determinare forma parametrica e forma cartesiana del piano π appartenente al fascio generato da π_1 e π_2, e parallelo alla retta $s = (1, 0, 0)+ < (3, 1, 0) >$

(c) Determinare posizione reciproca e distanza del piano π_2 con la retta $t = (0, 0, 1)+ < (1, 1, 1) >$.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio (cartellina bianca, tutti i fogli di brutta etc) in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola).
- Consegnare **la cartellina bianca**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito avere con se libri, appunti, telefoni, calcolatrici e simili.
- Si potrà uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.