Tema A

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Canale 1, F. Esposito

1º Appello - 24 Gennaio 2020

1. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali e siano $v_1, \ldots, v_k$ vettori di V.

i) E' vero che se $f(v_1), \ldots, f(v_k)$ sono linearmente indipendenti allora anche $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti?

ii) E' vero che se $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti allora anche $f(v_1), \ldots, f(v_k)$ sono linearmente indipendenti?

Giustificare le risposte.

2. Sia $A \in M_5(\mathbb{R})$.

i) Dimostrare che se A^2 è la matrice nulla, allora l'unico autovalore di A è uguale a 0.

ii) Dimostrare che se A^6 è la matrice nulla, il polinomio caratteristico $P_A(t)$ è uguale a $-t^5$.

3. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazione $2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

i) Determinare una base di U.

ii) Sia $u = (1, 1, 0, 1) \in U$. Completare u ad una base di U.

iii) Sia $u' = (1, 2, 1, 3) \in U$. Determinare le coordinate di u' rispetto alla base trovata al punto precedente.

4. Sia $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare dipendente da un parametro reale t data da:

$$f_t(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - 3x_3, 2x_1 - 3x_2 - 16x_3, -x_1 + x_2 + 7x_3, x_2 + tx_3)$$

i) Scrivere la matrice associata a f_t rispetto alle basi canoniche. Per quali valori di t si ha che f_t è iniettiva? Per quale valore di t il rango di f_t è minimo?

ii) Per il valore t_0 di t per cui $\mathrm{rk}(f_t)$ è minimo, trovare una base di $\ker(f_{t_0})$ e trovare un sistema di equazioni lineari che abbia $\mathrm{Im}(f_{t_0})$ come insieme delle soluzioni.

iii) Determinare la controimmagine $f_{t_0}^{-1}(w)$, dove $w = (3, -4, 1, 2)$.

5. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo la cui matrice associata rispetto alla base canonica sia uguale a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

i) La matrice è diagonalizzabile? Giustificare la risposta.

ii) Determinare autovalori e autospazi associati a f.

iii) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice B associata a f è diagonale e scrivere tale matrice B.

6. Siano $P_1 = (1, 1, 0), P_2 = (2, 0, 2), P_3 = (4, 1, 1)$ punti dello spazio affine $\mathbb{A}^3$.

i) Dimostrare che esiste un unico piano π passante per tali 3 punti e determinare le equazioni parametriche e l'equazione cartesiana di tale piano.

ii) Determinare le equazioni cartesiane e parametriche dei piani π_1, π_2 paralleli a π e distanti $\sqrt{35}$ da esso.

iii) Determinare le equazioni cartesiane e parametriche di una retta r parallela a π_1 e π_2, equidistante da questi due piani e ortogonale al vettore $v = (1, 2, 1)$.

Tema B

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Canale 1, F. Esposito

1º Appello - 24 Gennaio 2020

1. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali e siano $v_1, \dots, v_k$ vettori di V.

i) E' vero che se $f(v_1), \dots, f(v_k)$ sono linearmente indipendenti allora anche $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti?

ii) E' vero che se $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti allora anche $f(v_1), \dots, f(v_k)$ sono linearmente indipendenti?

Giustificare le risposte.

2. Sia $B \in M_6(\mathbb{R})$.

i) Dimostrare che se B^2 è la matrice nulla, allora l'unico autovalore di B è uguale a 0.

ii) Dimostrare che se B^8 è la matrice nulla, il polinomio caratteristico $P_B(t)$ è uguale a t^6.

3. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazione $-2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$.

i) Determinare una base di U.

ii) Sia $u = (-1, 0, 1, 1) \in U$. Completare u ad una base di U.

iii) Sia $u' = (-1, 1, 2, 3) \in U$. Determinare le coordinate di u' rispetto alla base trovata al punto precedente.

4. Sia $f_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare dipendente da un parametro reale h data da:

$$f_h(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 - x_2 + 3x_3, -x_1 + x_2 + 7x_3, 2x_1 - 3x_2 - 16x_3, x_2 + hx_3)$$

i) Scrivere la matrice associata a f_h rispetto alle basi canoniche. Per quali valori di h si ha che f_h è iniettiva? Per quale valore di h il rango di f_h è minimo?

ii) Per il valore h_0 di h per cui $\mathrm{rk}(f_h)$ è minimo, trovare una base di $\ker(f_{h_0})$ e trovare un sistema di equazioni lineari che abbia $\mathrm{Im}(f_{h_0})$ come insieme delle soluzioni.

iii) Determinare la controimmagine $f_{h_0}^{-1}(w)$, dove $w = (-3, 1, -4, 2)$.

5. Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo la cui matrice associata rispetto alla base canonica sia uguale a

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

i) La matrice è diagonalizzabile? Giustificare la risposta.

ii) Determinare autovalori e autospazi associati a g.

iii) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice C associata a g è diagonale e scrivere tale matrice C.

6. Siano $P_1 = (-1, 0, 1), P_2 = (-2, 2, 0), P_3 = (-4, 1, 1)$ punti dello spazio affine $\mathbb{A}^3$.

i) Dimostrare che esiste un unico piano π passante per tali 3 punti e determinare le equazioni parametriche e l'equazione cartesiana di tale piano.

ii) Determinare le equazioni cartesiane e parametriche dei piani π_1, π_2 paralleli a π e distanti $\sqrt{35}$ da esso.

iii) Determinare le equazioni cartesiane e parametriche di una retta s parallela a π_1 e π_2, equidistante dai questi due piani e ortogonale al vettore $v = (-1, 1, 2)$.

Tema C

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Canale 1, F. Esposito

1º Appello - 24 Gennaio 2020

1. Sia $g : V \to W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali e siano $v_1, \dots, v_k$ vettori di V.

i) E' vero che se $g(v_1), \dots, g(v_k)$ sono linearmente indipendenti allora anche $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti?

ii) E' vero che se $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti allora anche $g(v_1), \dots, g(v_k)$ sono linearmente indipendenti?

Giustificare le risposte.

2. Sia $C \in M_4(\mathbb{R})$.

i) Dimostrare che se C^2 è la matrice nulla, allora l'unico autovalore di C è uguale a 0.

ii) Dimostrare che se C^4 è la matrice nulla, il polinomio caratteristico $P_C(t)$ è uguale a t^4.

3. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$.

i) Determinare una base di U.

ii) Sia $u = (0, -1, 1, 1) \in U$. Completare u ad una base di U.

iii) Sia $u' = (1, -2, 1, 3) \in U$. Determinare le coordinate di u' rispetto alla base trovata al punto precedente.

4. Sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare dipendente da un parametro reale k data da:

$$f_k(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + x_2 + 7x_3, -2x_1 + 3x_2 + 16x_3, x_1 + x_2 - 3x_3, x_2 + kx_3)$$

i) Scrivere la matrice associata a f_k rispetto alle basi canoniche. Per quali valori di k si ha che f_k è iniettiva? Per quale valore di k il rango di f_k è minimo?

ii) Per il valore k_0 di k per cui $\mathrm{rk}(f_k)$ è minimo, trovare una base di $\ker(f_{k_0})$ e trovare un sistema di equazioni lineari che abbia $\mathrm{Im}(f_{k_0})$ come insieme delle soluzioni.

iii) Determinare la controimmagine $f_{k_0}^{-1}(w)$, dove $w = (1, 4, 3, 2)$.

5. Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo la cui matrice associata rispetto alla base canonica sia uguale a

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

i) La matrice è diagonalizzabile? Giustificare la risposta.

ii) Determinare autovalori e autospazi associati a ϕ.

iii) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice D associata a ϕ è diagonale e scrivere tale matrice D.

6. Siano $P_1 = (0, -1, 1), P_2 = (2, 0, 2), P_3 = (1, -1, 4)$ punti dello spazio affine $\mathbb{A}^3$.

i) Dimostrare che esiste un unico piano π passante per tali 3 punti e determinare le equazioni parametriche e l'equazione cartesiana di tale piano.

ii) Determinare le equazioni cartesiane e parametriche dei piani π_1, π_2 paralleli a π e distanti $\sqrt{35}$ da esso.

iii) Determinare le equazioni cartesiane e parametriche di una retta r parallela a π_1 e π_2, equidistante da questi due piani e ortogonale al vettore $v = (1, -2, 1)$.

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Canale 1, F. Esposito

1º Appello - 24 Gennaio 2020

1. Sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali e siano $v_1, \dots, v_k$ vettori di V.

i) E' vero che se $\phi(v_1), \dots, \phi(v_k)$ sono linearmente indipendenti allora anche $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti?

ii) E' vero che se $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti allora anche $\phi(v_1), \dots, \phi(v_k)$ sono linearmente indipendenti?

Giustificare le risposte.

2. Sia $D \in M_6(\mathbb{R})$.

i) Dimostrare che se D^2 è la matrice nulla, allora l'unico autovalore di D è uguale a 0.

ii) Dimostrare che se D^{10} è la matrice nulla, il polinomio caratteristico $P_D(t)$ è uguale a t^6.

3. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazione $-3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$.

i) Determinare una base di U.

ii) Sia $u = (1, 1, 0, 1) \in U$. Completare u ad una base di U.

iii) Sia $u' = (2, 1, -1, 3) \in U$. Determinare le coordinate di u' rispetto alla base trovata al punto precedente.

4. Sia $\phi_l : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare dipendente da un parametro reale l data da:

$$\phi_l(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 3x_2 - 16x_3, x_1 + x_2 - 3x_3, x_1 - x_2 - 7x_3, x_2 + lx_3)$$

i) Scrivere la matrice associata a ϕ_l rispetto alle basi canoniche. Per quali valori di l si ha che ϕ_l è iniettiva? Per quale valore di l il rango di ϕ_l è minimo?

ii) Per il valore l_0 di l per cui $\mathrm{rk}(\phi_l)$ è minimo, trovare una base di $\ker(\phi_{l_0})$ e trovare un sistema di equazioni lineari che abbia $\mathrm{Im}(\phi_{l_0})$ come insieme delle soluzioni.

iii) Determinare la controimmagine $\phi_{l_0}^{-1}(w)$, dove $w = (-4, 3, -1, 2)$.

5. Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo la cui matrice associata rispetto alla base canonica sia uguale a

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

i) La matrice è diagonalizzabile? Giustificare la risposta.

ii) Determinare autovalori e autospazi associati a ϕ.

iii) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice A associata a ϕ è diagonale e scrivere tale matrice A.

6. Siano $P_1 = (1, 1, 0), P_2 = (0, 2, -2), P_3 = (1, 4, -1)$ punti dello spazio affine $\mathbb{A}^3$.

i) Dimostrare che esiste un unico piano π passante per tali 3 punti e determinare le equazioni parametriche e l'equazione cartesiana di tale piano.

ii) Determinare le equazioni cartesiane e parametriche dei piani π_1, π_2 paralleli a π e distanti $\sqrt{35}$ da esso.

iii) Determinare le equazioni cartesiane e parametriche di una retta s parallela a π_1 e π_2, equidistante da questi due piani e ortogonale al vettore $v = (2, 1, -1)$.