Università di Padova - Scuola di Ingegneria

Massimo Guarnieri

Elettrotecnica

Capitolo 4
Topologia e leggi di Kirchhoff

Interconnessioni più complesse

- È necessario conoscere un metodo sistematico per scrivere le equazioni topologiche nel caso di reti con interconnessioni complesse di vari bipoli.

- La descrizione conveniente delle interconnessioni può avvenire:

  - in forma grafica –> **GRAFO**

  - In forma numerica –> **MATRICI DI CONNESSIONE**

Grafo di una rete

È uno strumento matematico versatile che si usa anche in altri ambiti disciplinari (chimica, informatica, …)

È un disegno composto da:

- punti detti NODI
- segmenti rettilinei o curvilinei detti LATI o ARCHI

- I lati hanno sempre gli estremi in due nodi (ogni lato si appoggia ad una coppia di nodi)

Tracciamento del grafo -1

Regole generali

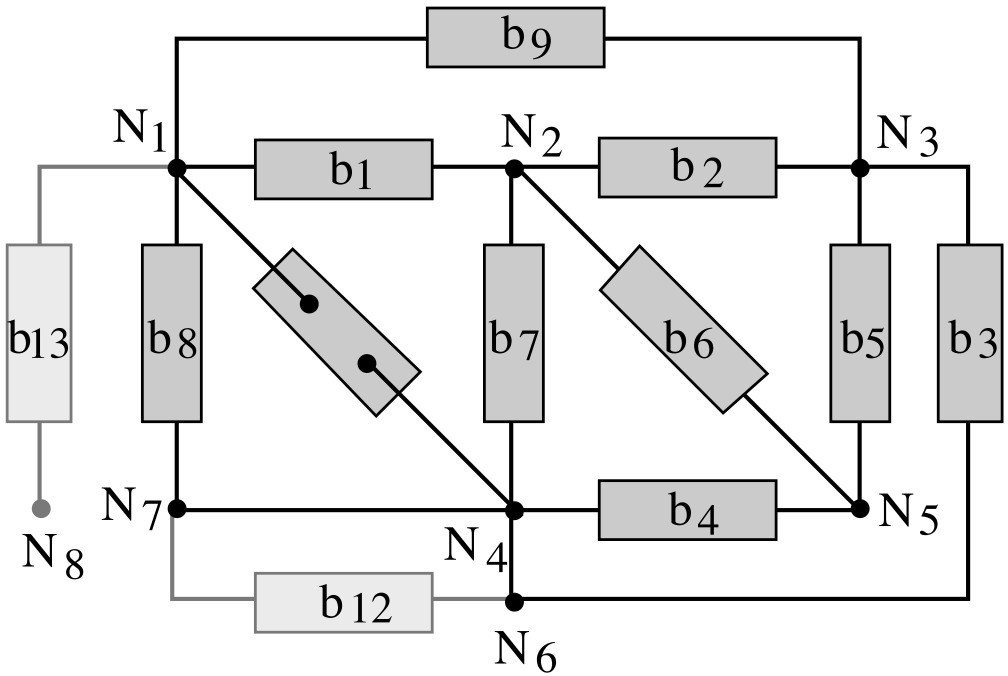
Il grafo di una rete elettrica formata da **bipoli** si ottiene in questo modo:

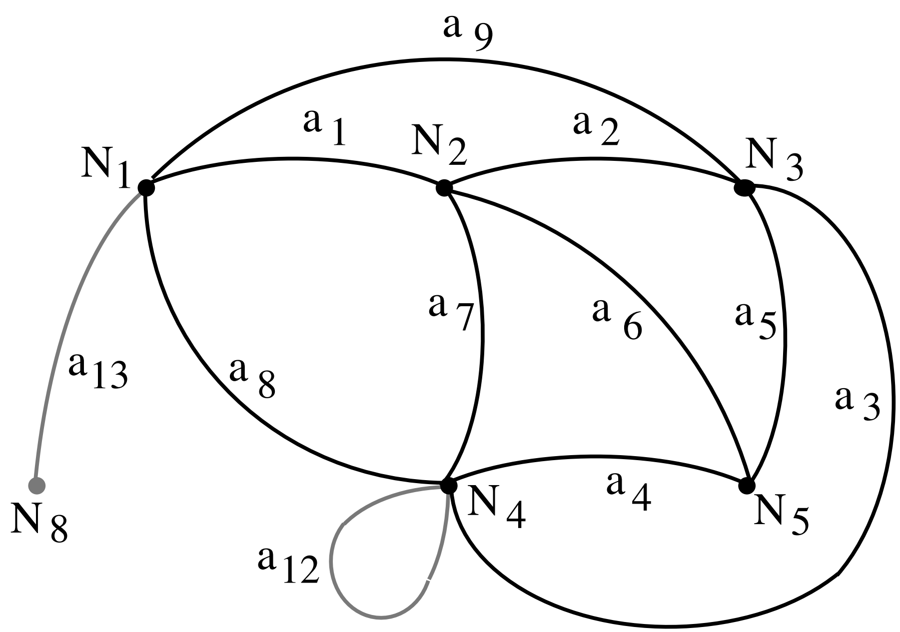
- Ad ogni NODO della rete si fa corrispondere un NODO del grafo

- Ad ogni BIPOLO della rete si fa corrispondere un LATO del grafo

Tracciamento del grafo -2

Esempio:



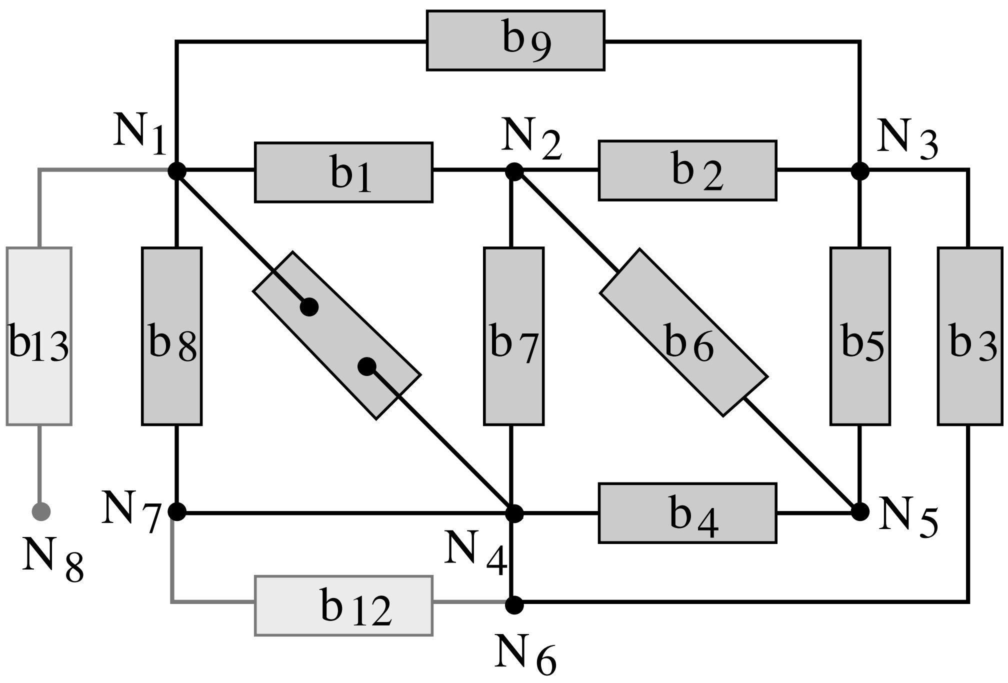


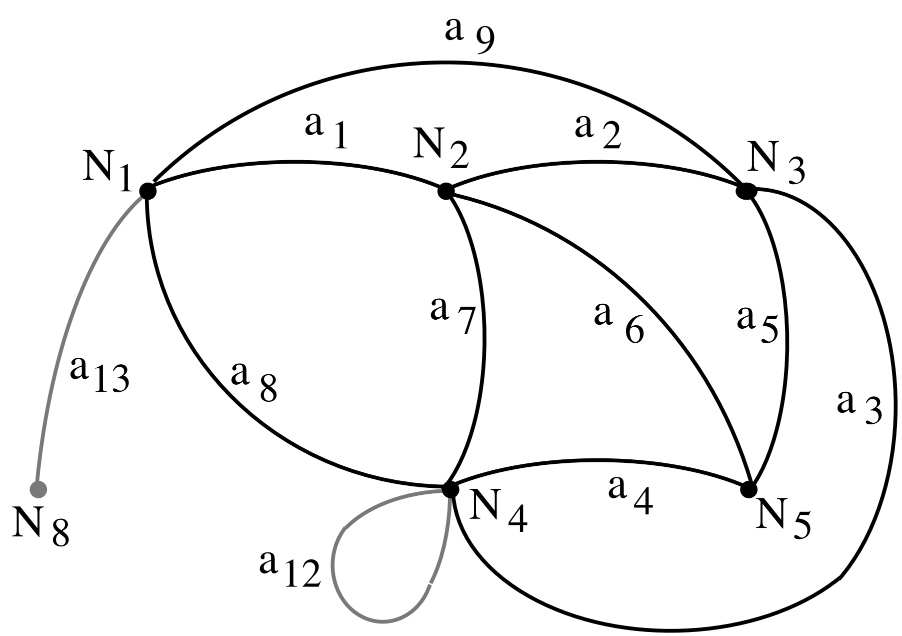
Semplificazioni - 1

Bipolo della rete = cortocircuito:

→ nel grafo il lato non è rappresentato e i due nodi di appoggio coincidono

esempio: N_4, N_6, N_7



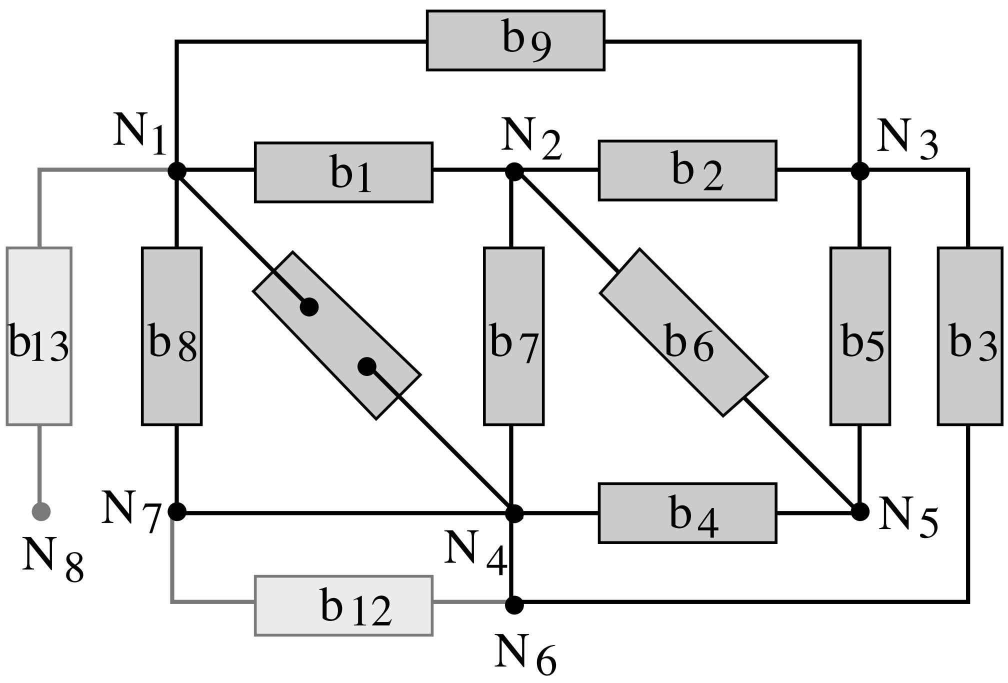


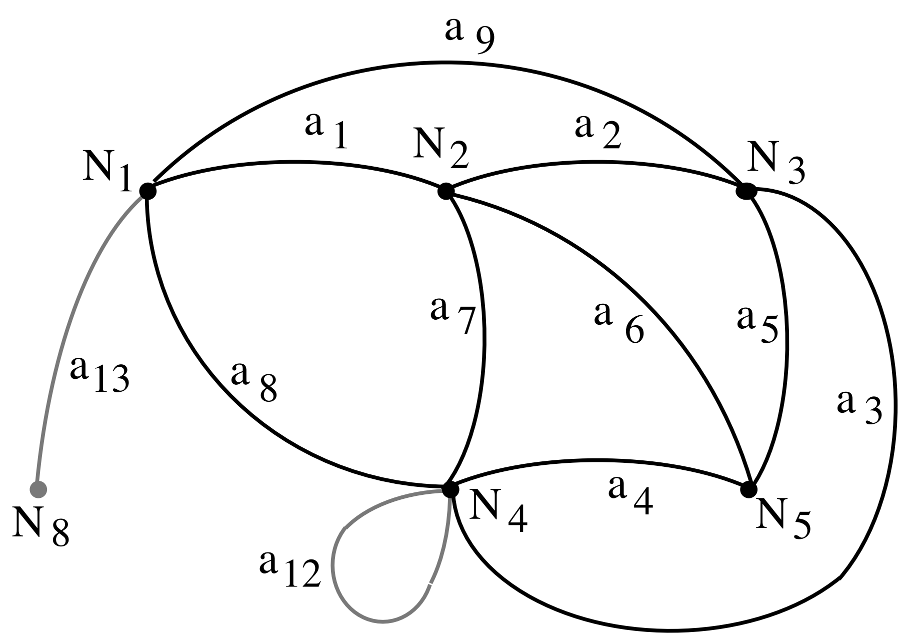
Semplificazioni - 2

Bipolo della rete = circuito aperto:

→ Nel grafo il lato non è rappresentato e i due nodi di appoggio sono disgiunti

esempio: N_1 , N_4





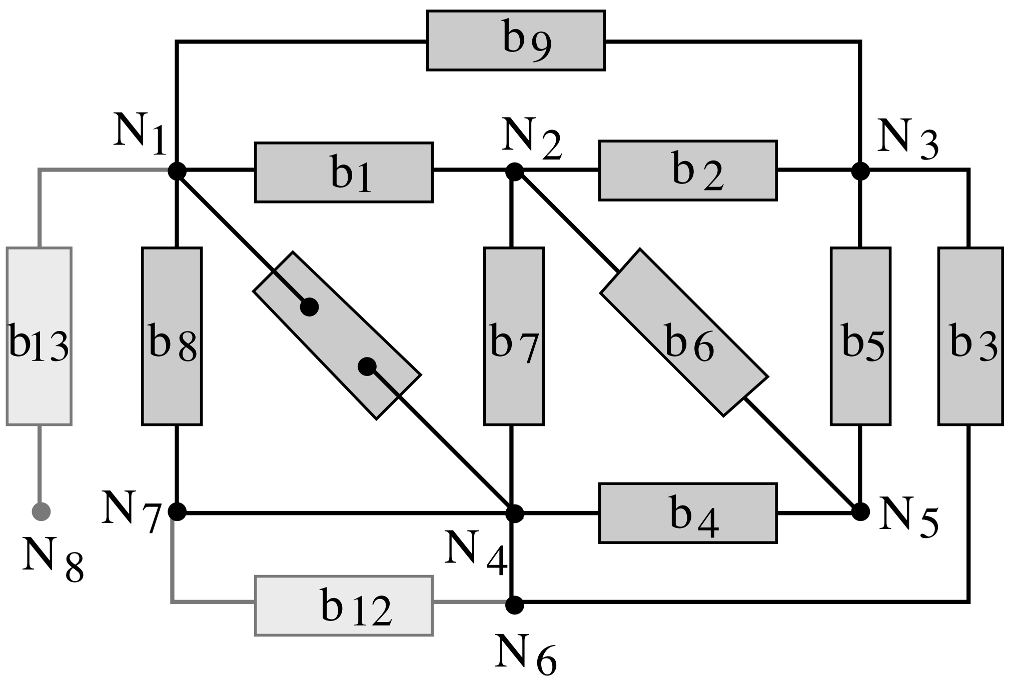
Semplificazioni - 3

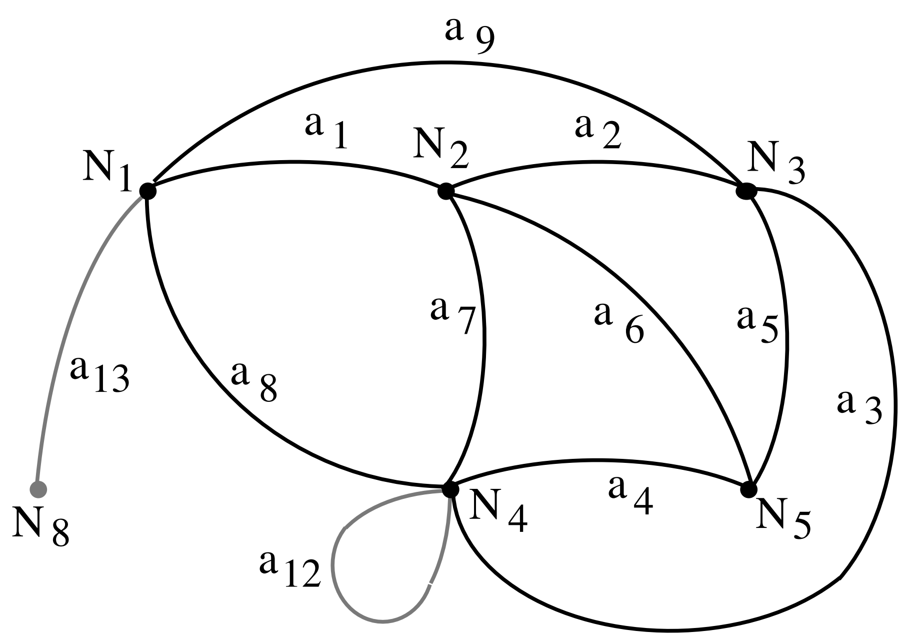
Bipolo della rete cortocircuitato (connesso in parallelo ad un cortocircuito):

→ Nel grafo il lato è un cappio e non viene considerato

esempio: b_{12} –> a_{12}

n.b.: il punto di lavoro di b_{12} è noto a priori: è quello in cortocircuito e non interagisce con la rete perché v=0 e p=0.





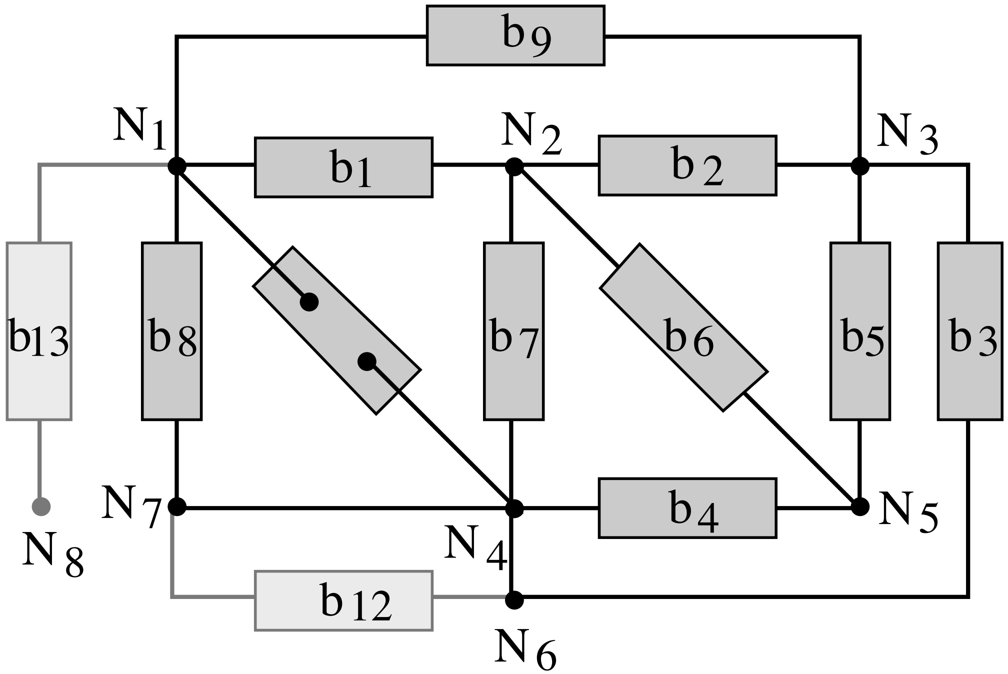
Semplificazioni - 4

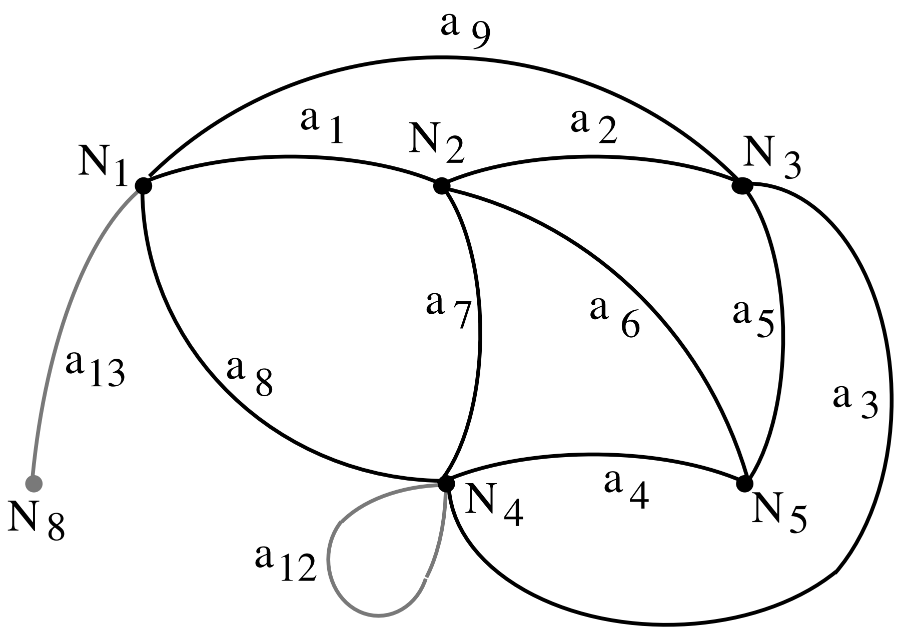
Bipolo della rete aperto (connesso in serie ad un circuito aperto):

→ Nel grafo il lato è un aperto e non viene rappresentato

esempio: b_{13} –> a_{13}

n.b.: il punto di lavoro di b_{13} è noto a priori: è quello a vuoto e non interagisce con la rete perché i=0 e p=0.





Grafo orientato -1

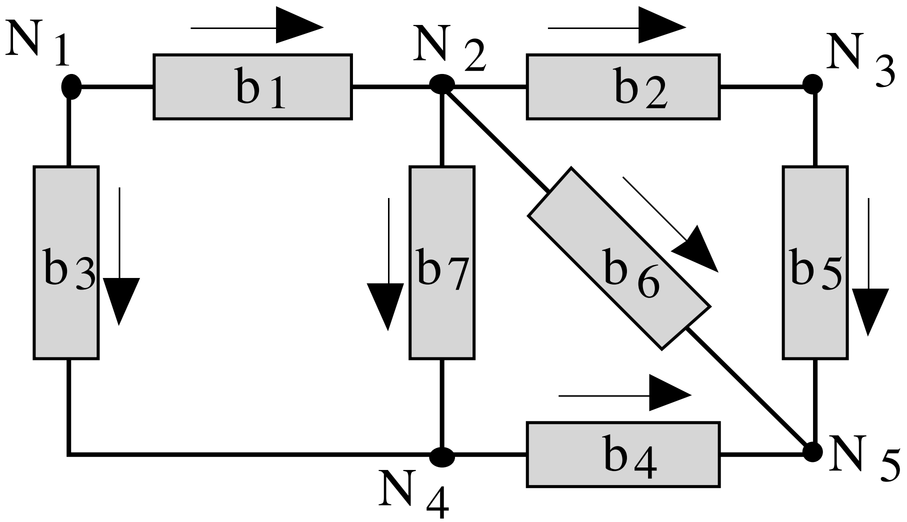
È un grafo composto da:

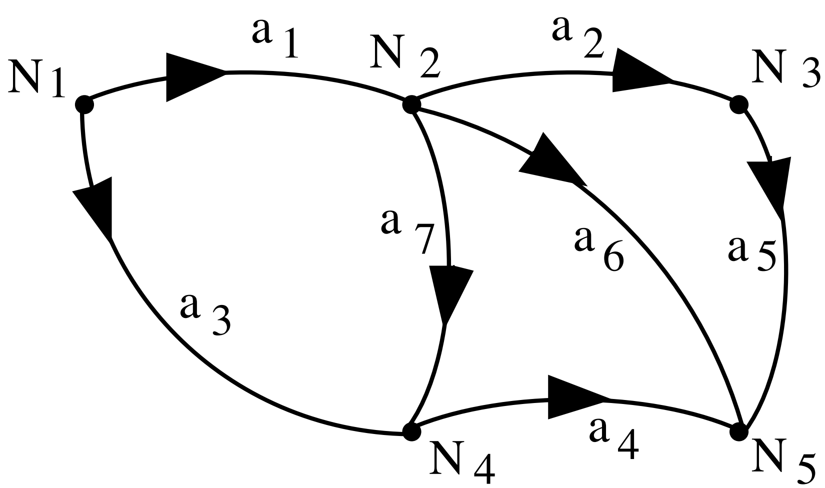
- soliti NODI
- soliti LATI o ARCHI, ma dotati di orientazione: è precisato il nodo di inizio ed il nodo di fine

- Si fa sempre coincidere l'orientazione del lato del grafo con il riferimento della corrente del bipolo corrispondente nella rete.

Grafo orientato -2

Esempio

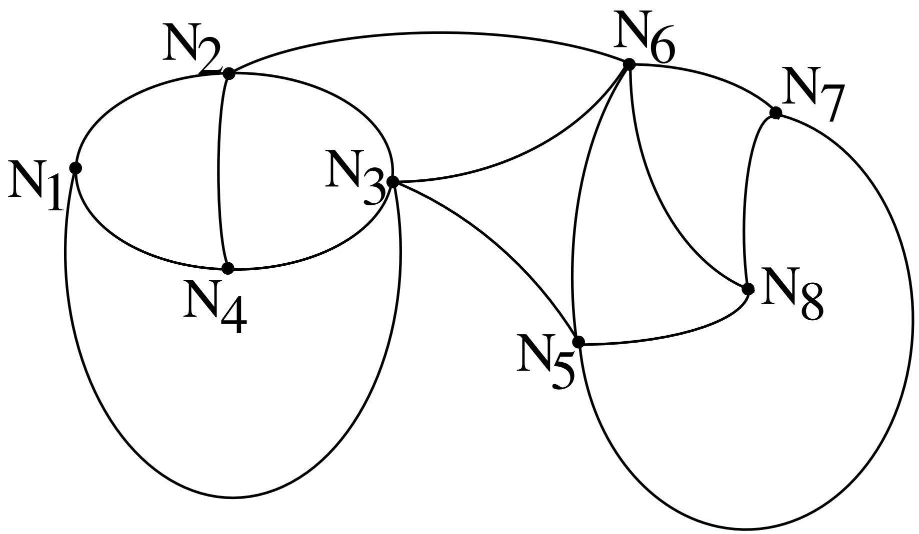




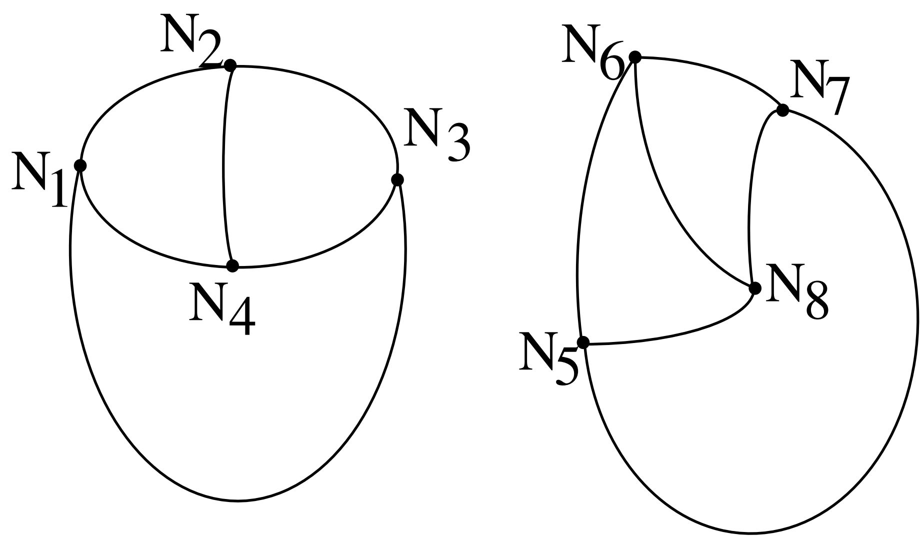
Caratteristiche dei grafi - 1

Grafo connesso:

Esiste un percorso lungo i lati che unisce due nodi qualsiasi



grafo connesso



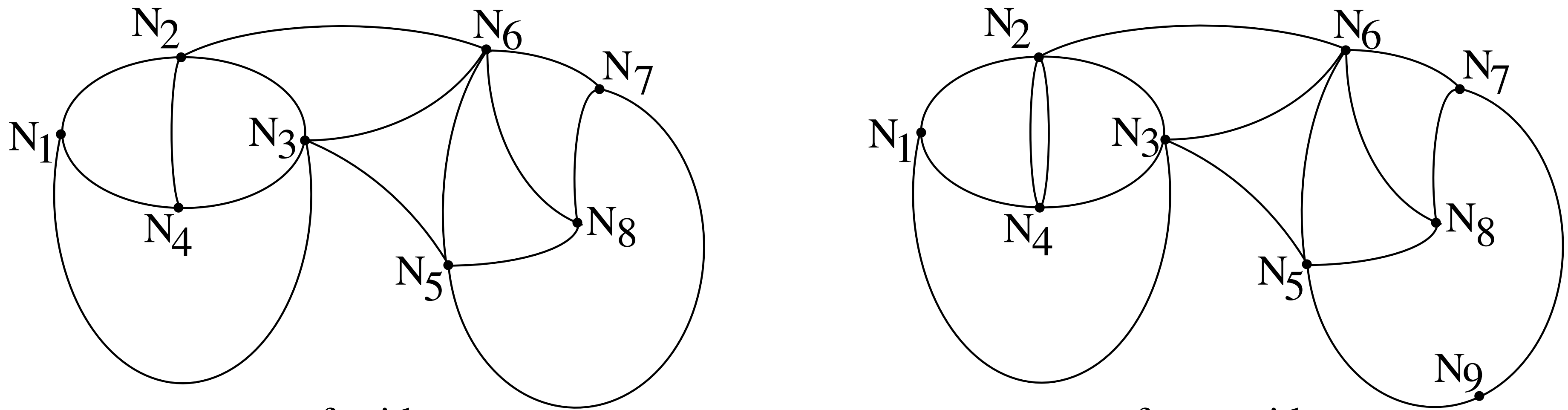
grafo non connesso

n.b.: un grafo non connesso è formato da più parti separate

Caratteristiche dei grafi - 2

Grafo ridotto:

- privo di cappi ed aperti
- ad ogni nodo si appoggiano almeno 3 lati (no serie)
- ad ogni coppia di nodi si appoggia al più 1 lato (no paralleli)



grafo ridotto

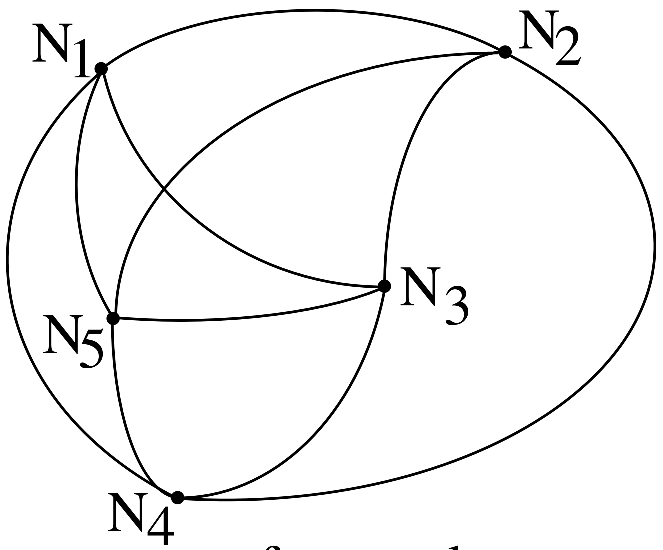
grafo non ridotto

Caratteristiche dei grafi - 3

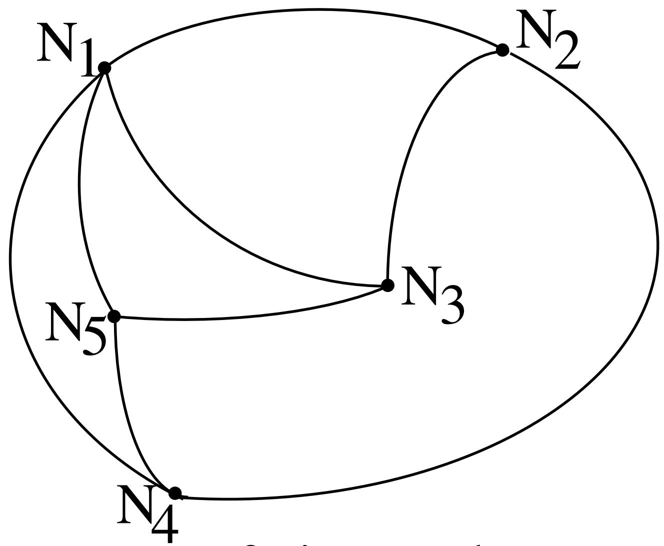
Grafo completo:

- Grafo ridotto avente il massimo numero di lati possibili per *n* nodi

$$\ell_{\max} = C_2^n = \binom{n}{2} = \frac{n\,(n-1)}{2}$$



grafo completo

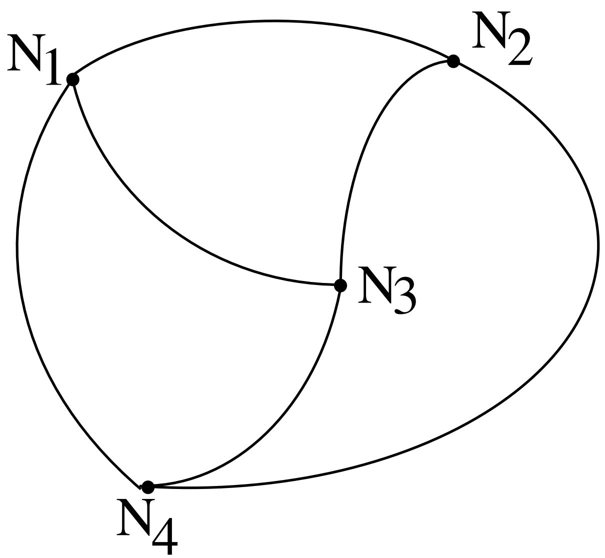


grafo incompleto

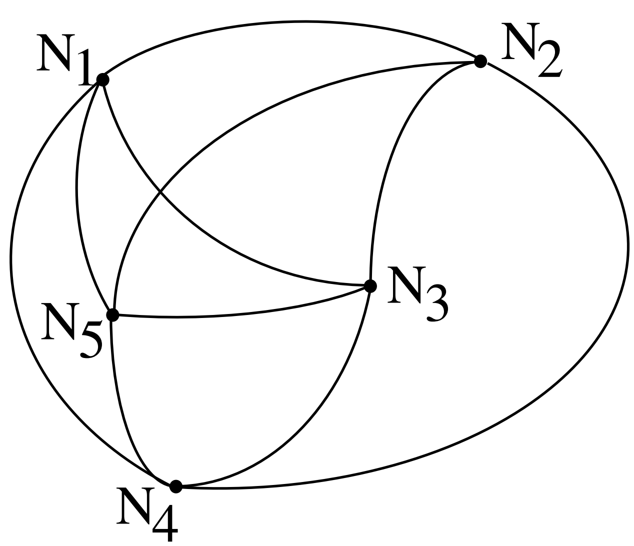
Caratteristiche dei grafi - 4

Grafo piano:

- Può essere disteso sul piano senza incrociare i lati
- Tutti i grafi con n≤4 sono piani
- Nessun grafo completo con n≥5 è piano



grafo piano



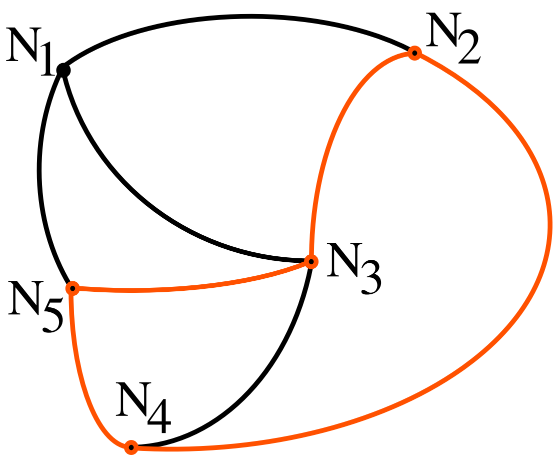
grafo non piano

Enti dei grafi - 1

Maglia:

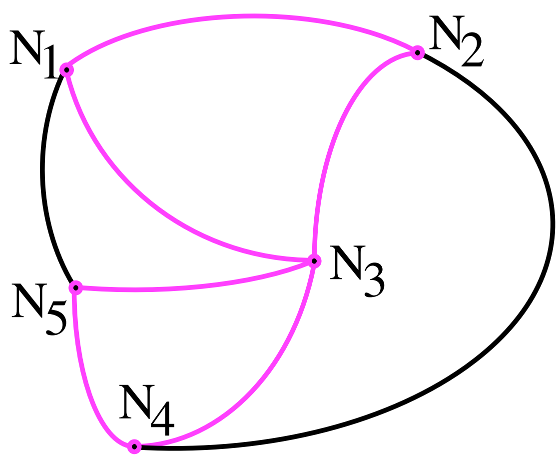
- Sottografo connesso
- In ogni nodo incidono 2 e solo 2 lati

a)



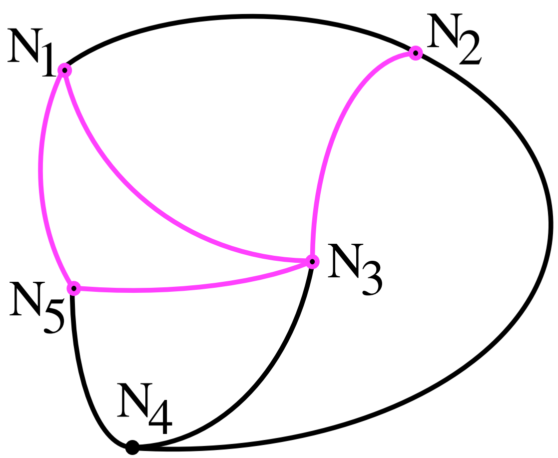
il percorso rosso
è una maglia

b)



il percorso viola
non è una maglia

c)



il percorso viola
non è una maglia

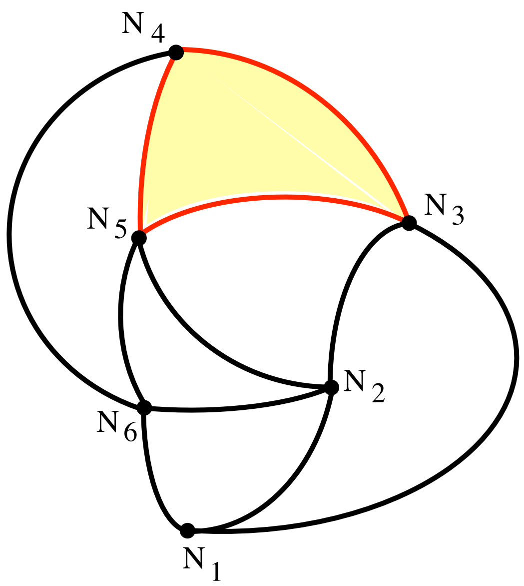
Enti dei grafi - 2

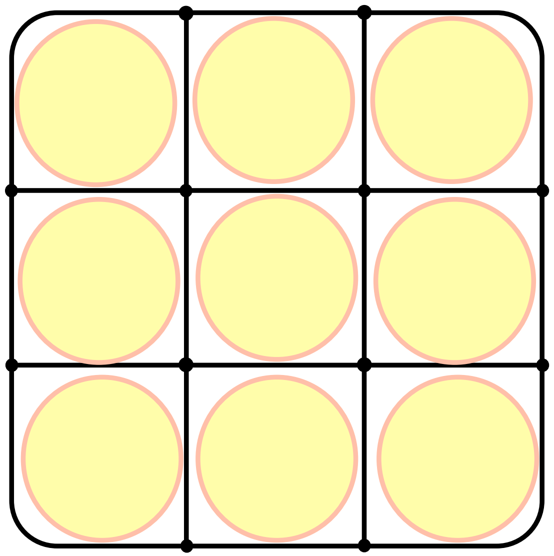
Anello (solo per reti piane):

Maglia che orla una superficie priva di attraversamenti

il numero di anelli *a* è fissato da *n* e ℓ: $a = \ell - n + 1$

se il grafo e disegnato su superficie chiusa: $a_s = a + 1 = \ell - n + 2$



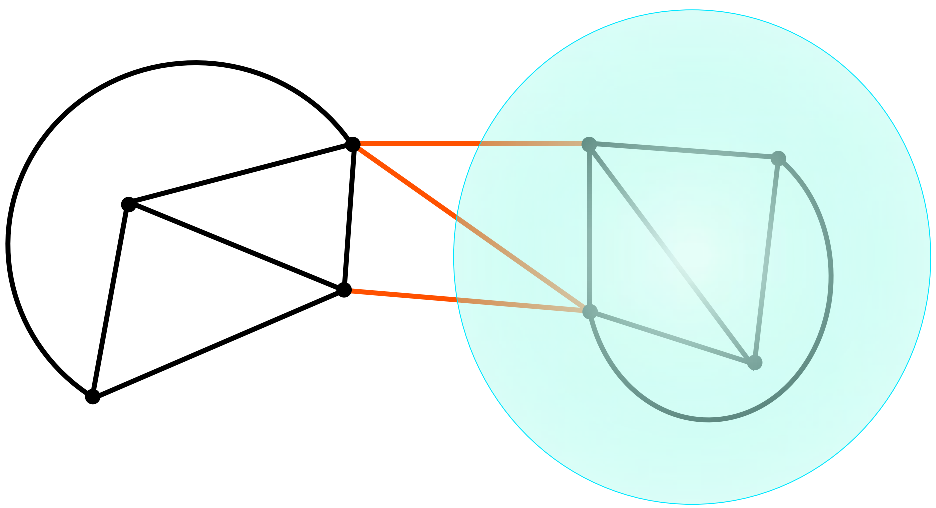


Enti dei grafi - 3

Insieme di taglio (taglio):

- Sottografo di grafo connesso
- Rimuovendone tutti i lati il grafo resta non connesso
- Rimuovendone tutti i lati meno uno il grafo resta connesso

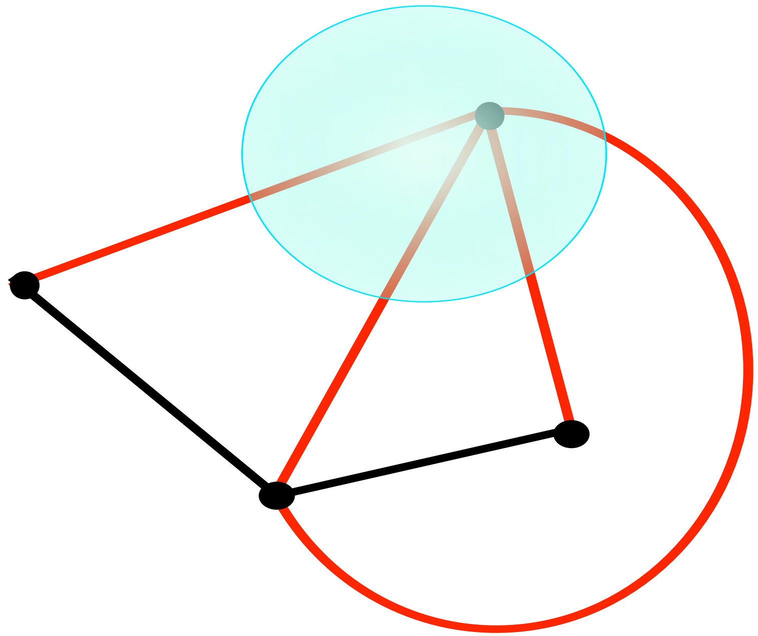
è individuabile con una superficie chiusa intersecata soltanto dai suoi lati, la quale divide il restante grafo in due parti, una interna ed una esterna ad essa.



Enti dei grafi -4

Nodo:

Insieme di taglio formato dai lati che si appoggiano ad un nodo



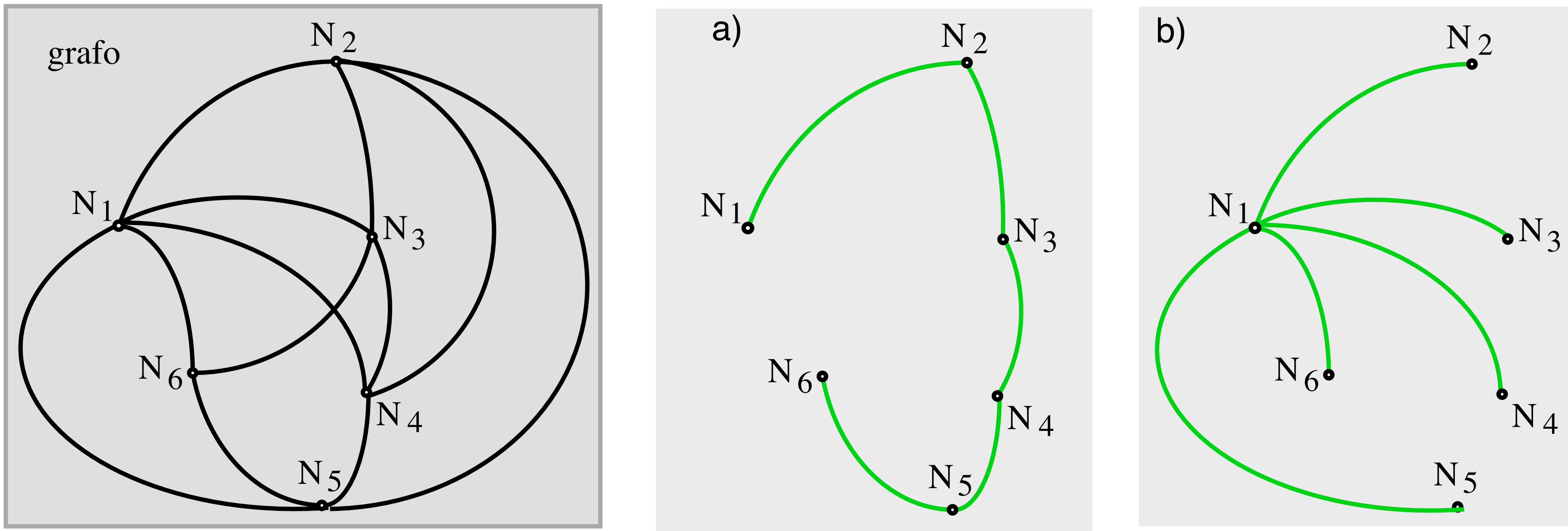
Enti dei grafi -5

Albero:

- Sottografo connesso comprendente tutti i nodi e alcuni lati = **RAMI**
- Non forma maglie

Il numero *r* dei **RAMI** dipende solo da *n*: $$r = n - 1$$

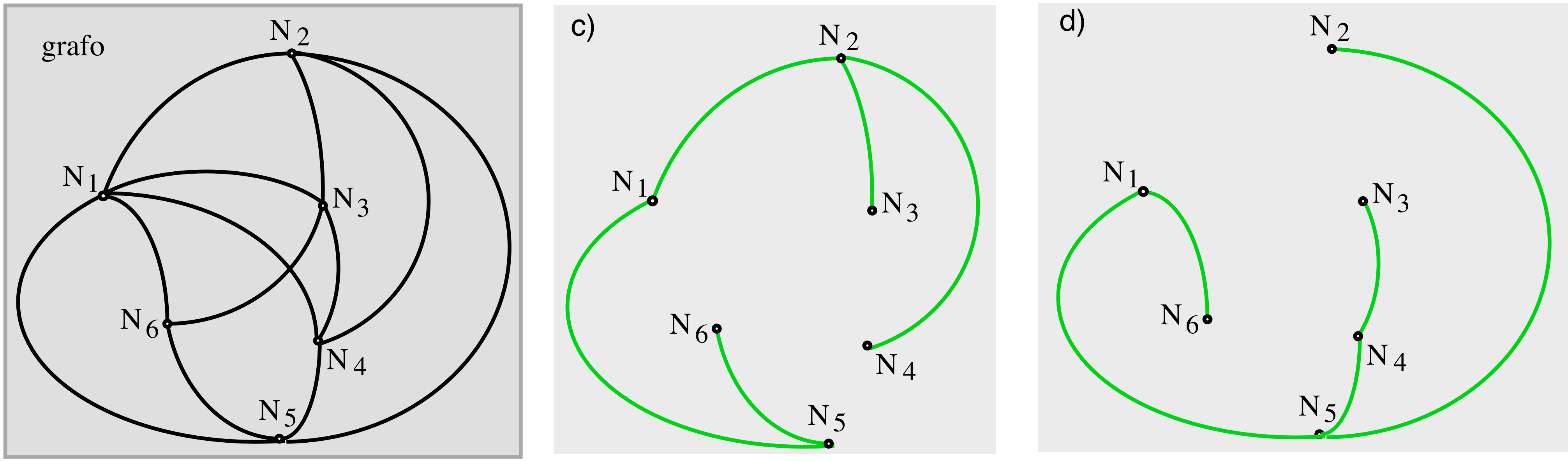
esempio: ℓ =12, n=6 –> r=n–1=5



Enti dei grafi - 6

Albero:

Si possono tracciare molti alberi, tutti di $r=n-1$ rami



Enti dei grafi -7

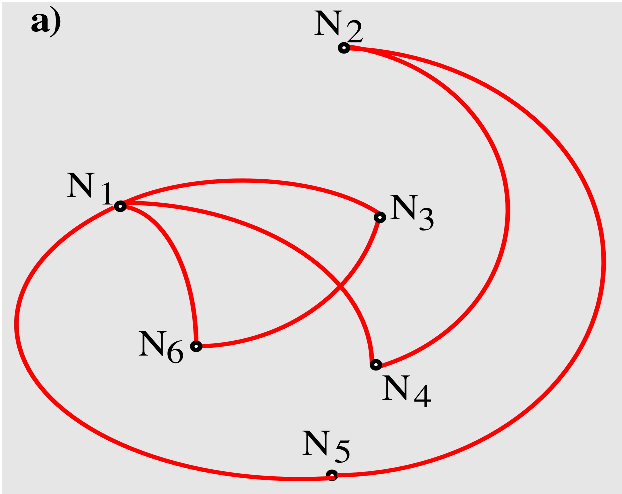
Coalbero:

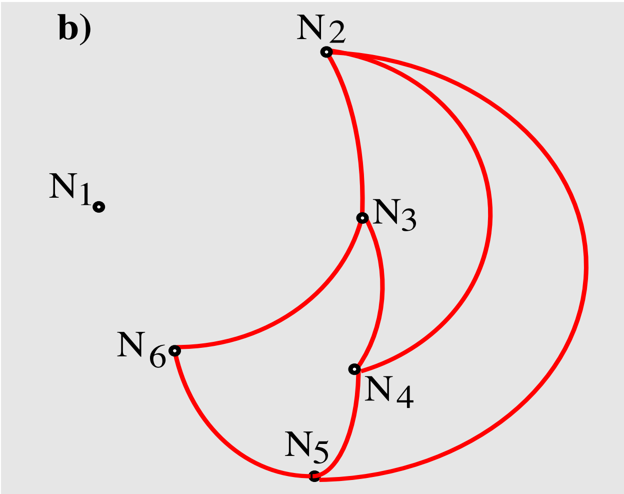
- Complemento dell'albero
- Formato da lati = **CORDE**

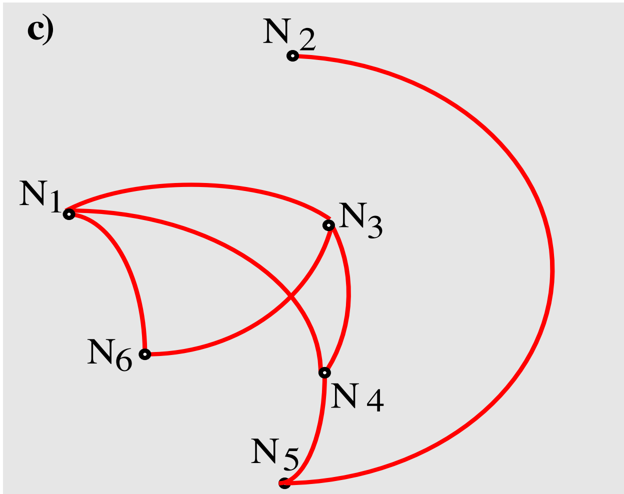
il numero c delle corde è $c = \ell - r = \ell - n + 1$

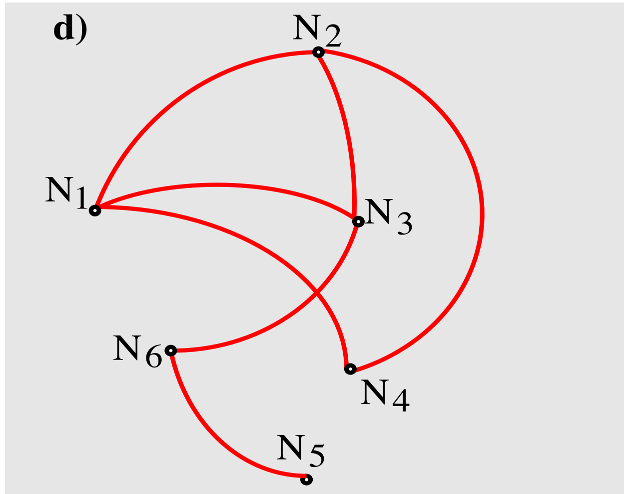
per reti piane: $c = a$

esempio: ℓ=12, n=6 → $c = \ell - n + 1 = 7$









Sistema di maglie fondamentali - 1

- Si basa su un albero e il suo coalbero
- Si considera **una** delle *c* corde del coalbero alla volta
- Si costruisce una maglia formata da tale corda* e da alcuni rami dell'albero**
- Si ottengono così $c = \ell - n + 1$ maglie fondamentali, che sono tra loro indipendenti, nel senso che ciascuna "conosce" una corda "sconosciuta" alle altre maglie del sistema

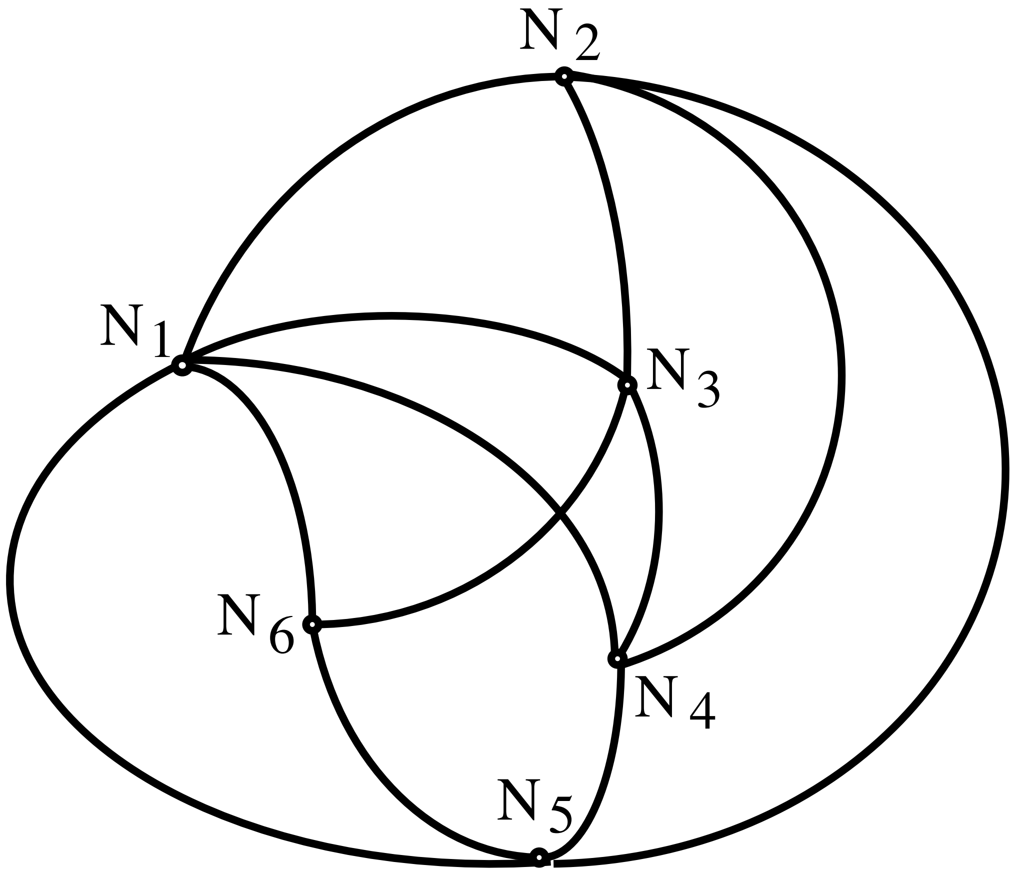
* e da nessun altra corda

** ciascun ramo compare in almeno una maglia fondamentale, ma può comparire in più di una

n.b.: da ogni albero e coalbero si può costruire un tale sistema di maglie fondamentali

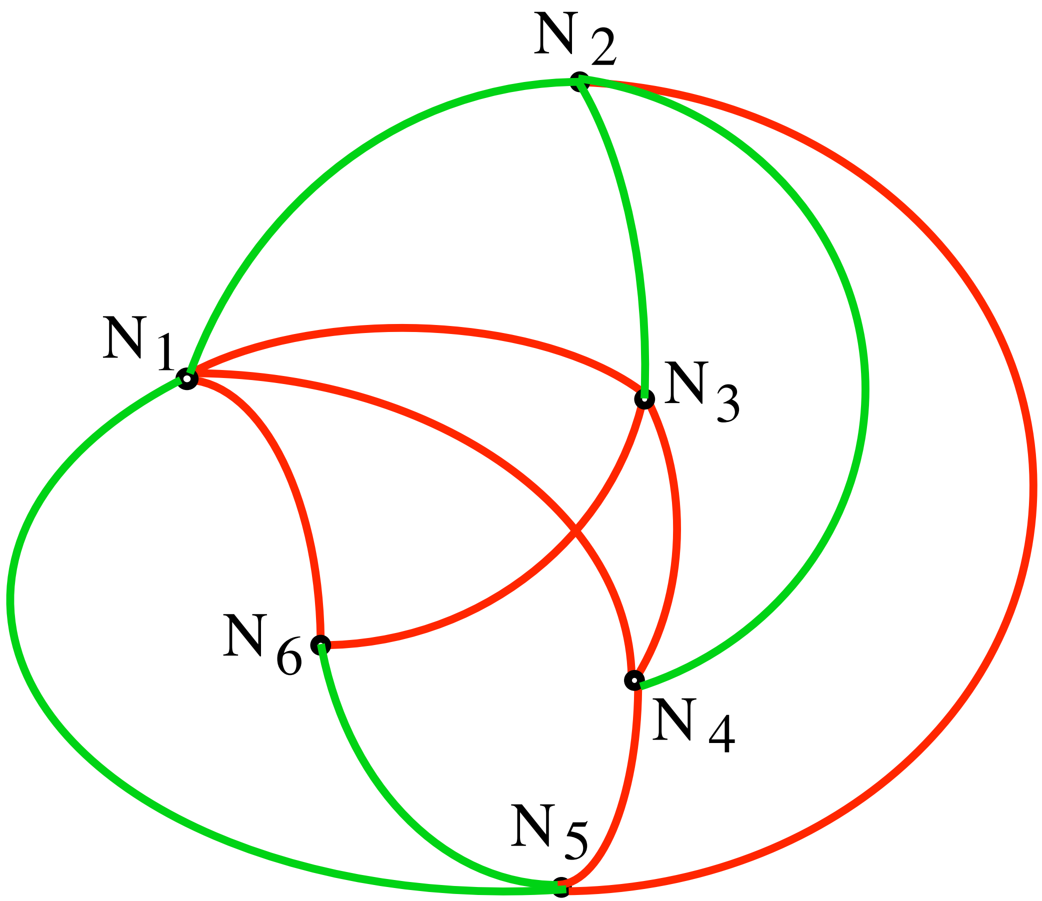
Sistema di maglie fondamentali -2

Esempio:



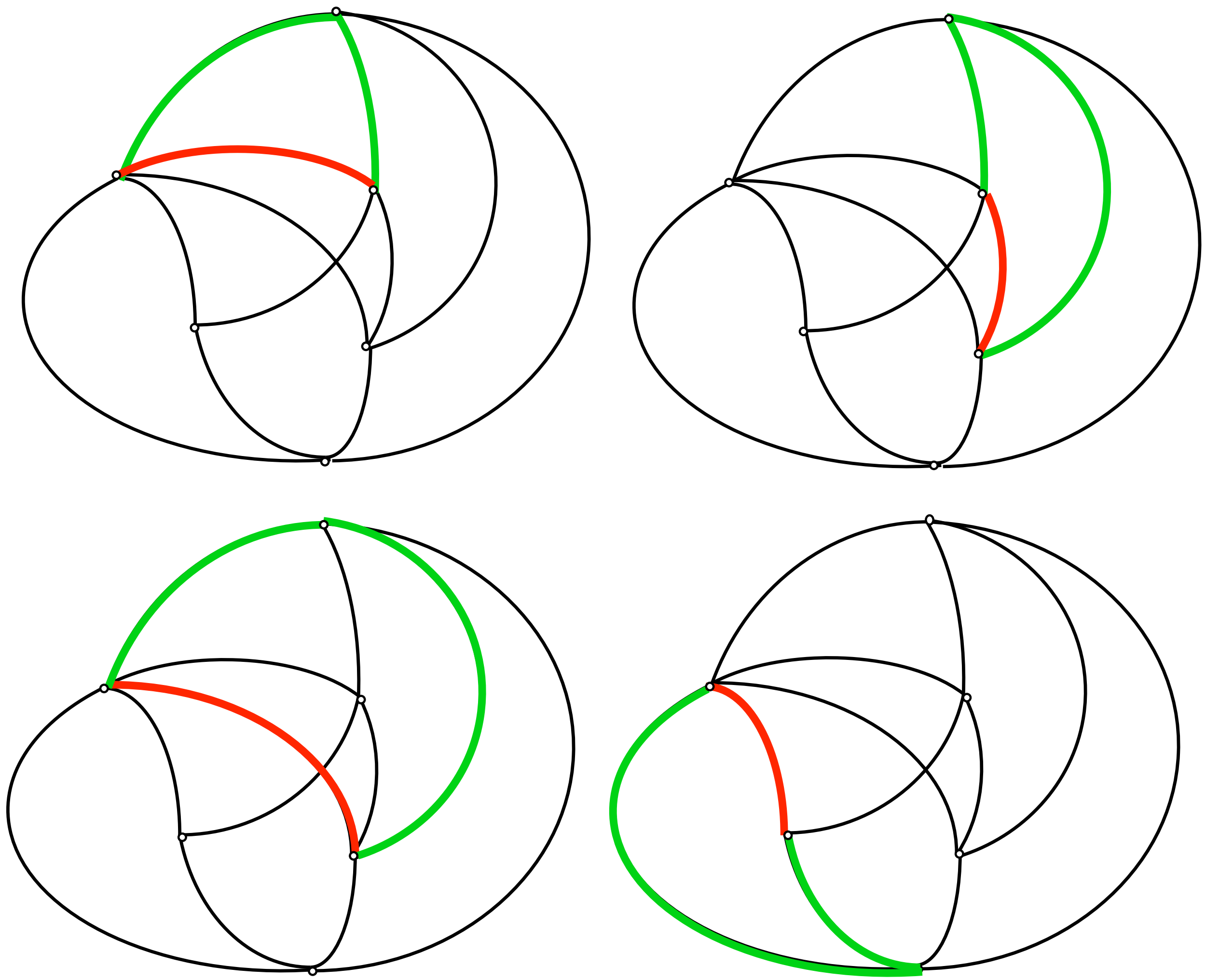
Sistema di maglie fondamentali -3

Esempio: ℓ=12, n=6 –> r=n–1=5, c=ℓ–n+1=7



Sistema di maglie fondamentali -4

Esempio:



4 maglie sono mostrate qui

Sistema di maglie fondamentali -5

+

altre

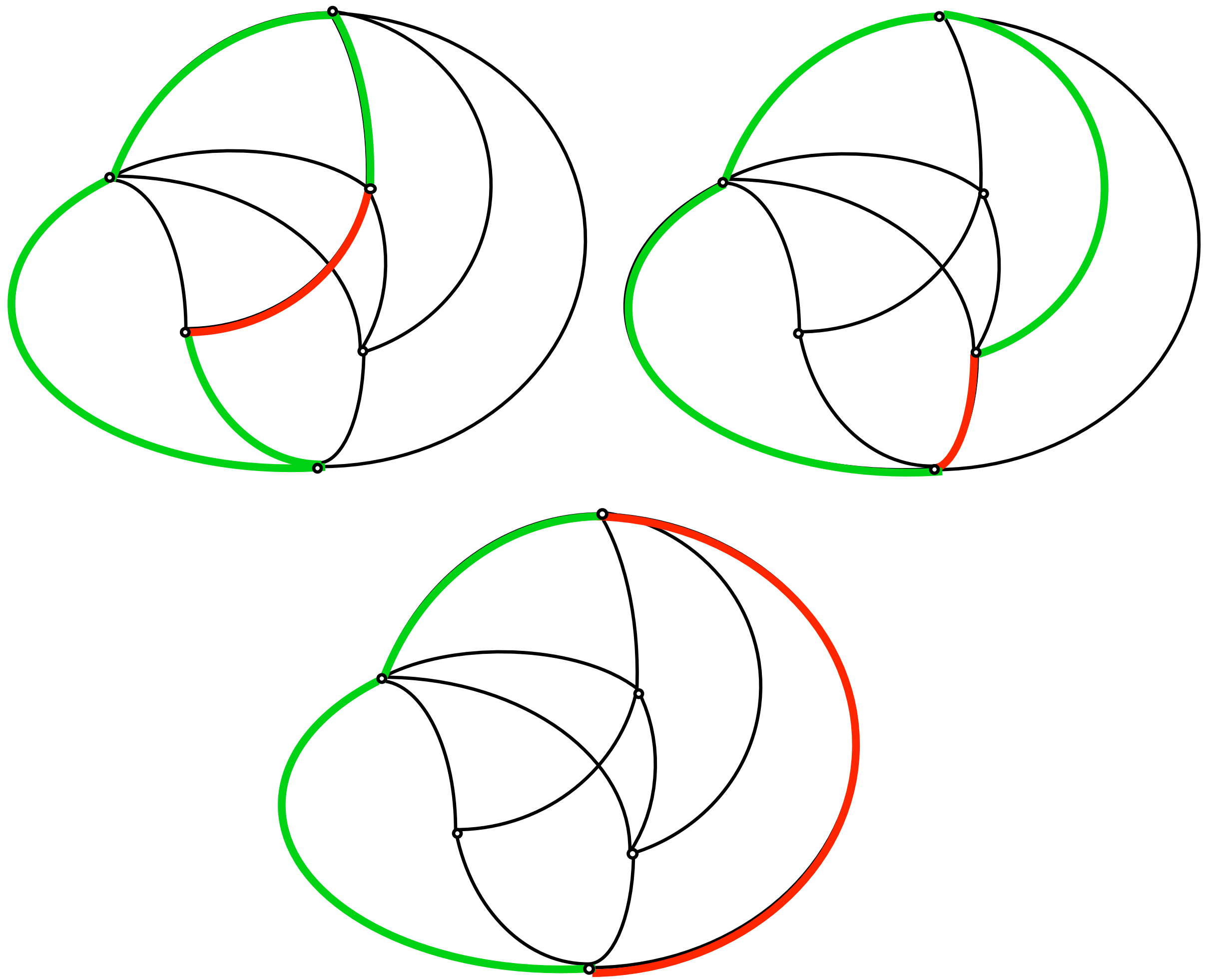
3 maglie

sono qui

=

7 maglie

fondamentali



Sistema di tagli fondamentali - 1

- Si basa su un albero e il suo coalbero
- Si considera **uno** degli *r* rami dell'albero alla volta
- Si costruisce un insieme di taglio formato da tale ramo* e da alcune corde del coalbero**
- Si ottengono così $r = n - 1$ insiemi di taglio fondamentali, che sono indipendenti, nel senso che ciascuno "conosce" un ramo "sconosciuto" agli altri tagli del sistema

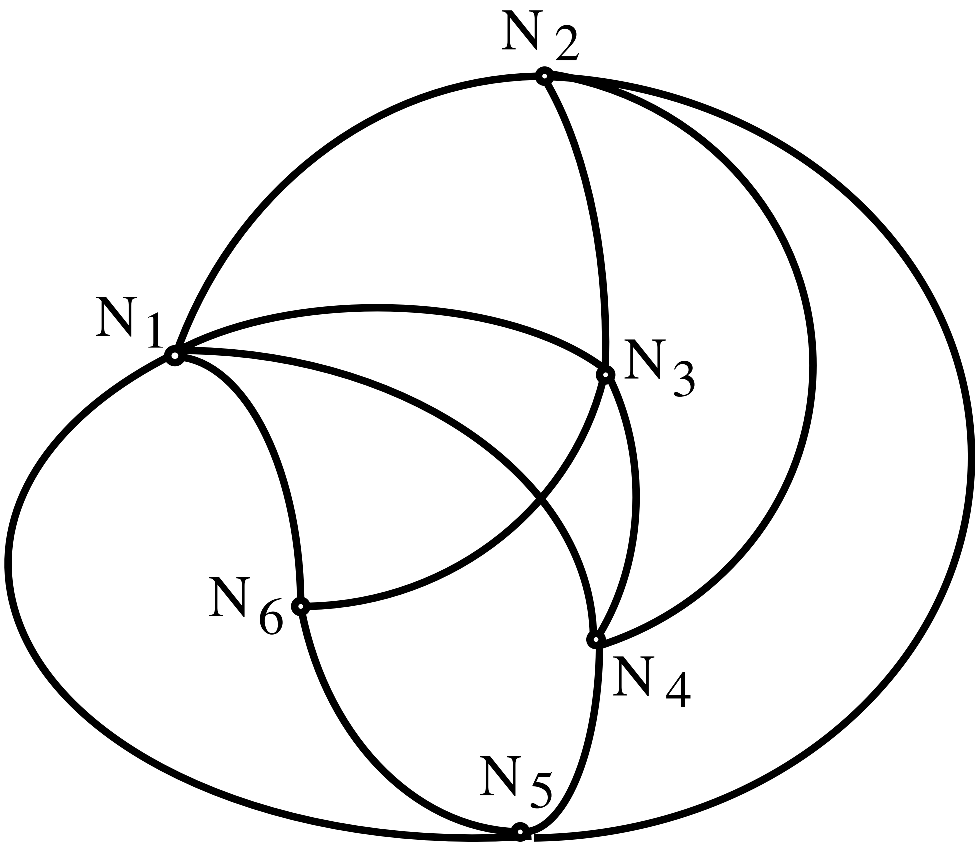
* e da nessun altro ramo

** ciascuna corda compare in almeno un taglio fondamentale, ma può comparire in più di uno

n.b.: da ogni albero e coalbero si può costruire un tale sistema di tagli fondamentali

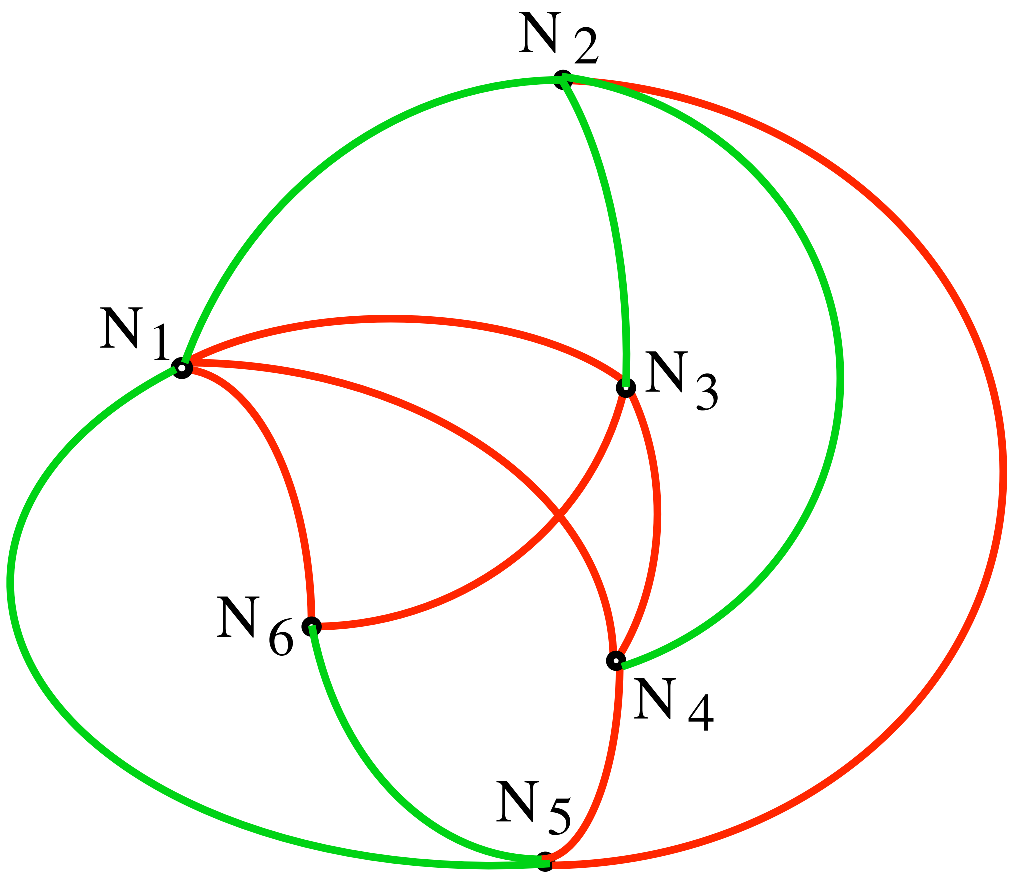
Sistema di tagli fondamentali -2

Esempio:



Sistema di tagli fondamentali -3

Esempio: ℓ=12, n=6 –> r=n–1=5, c =ℓ–n+1=7

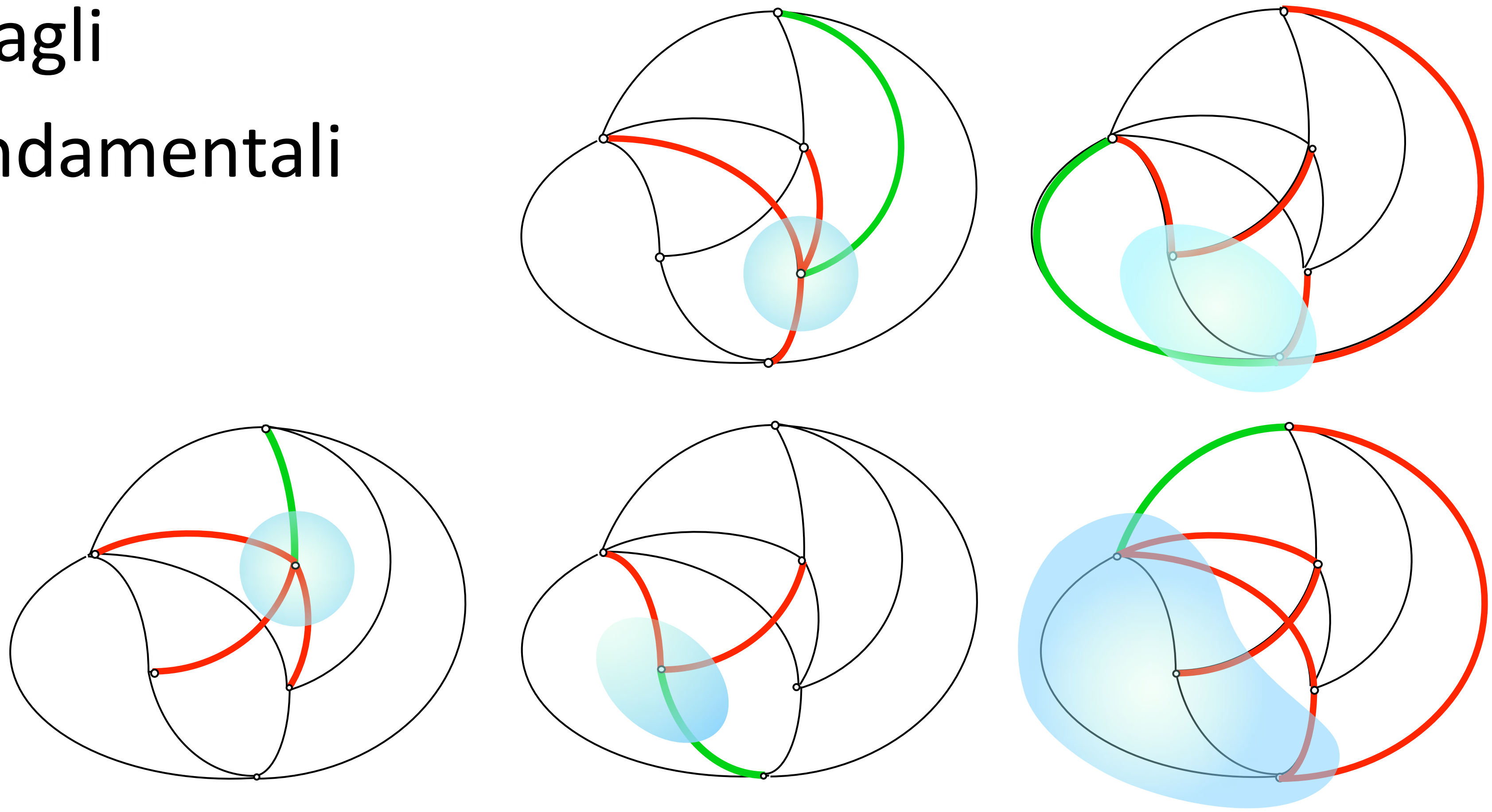


Sistema di tagli fondamentali -4

Esempio:

5 tagli

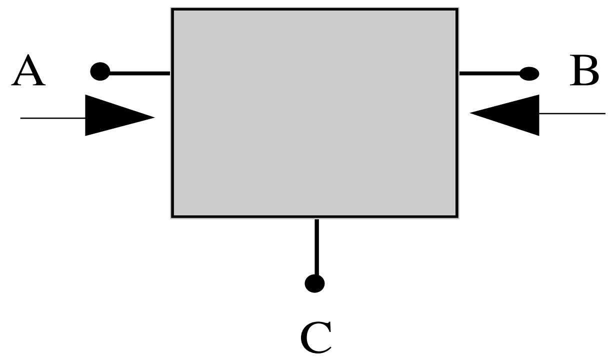
fondamentali

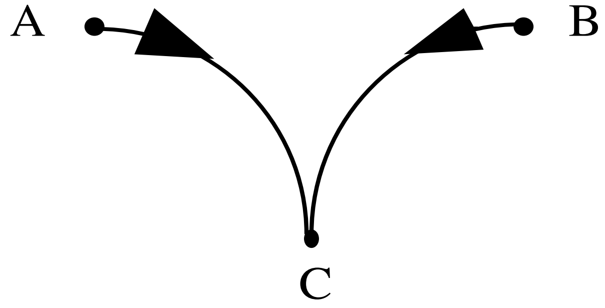


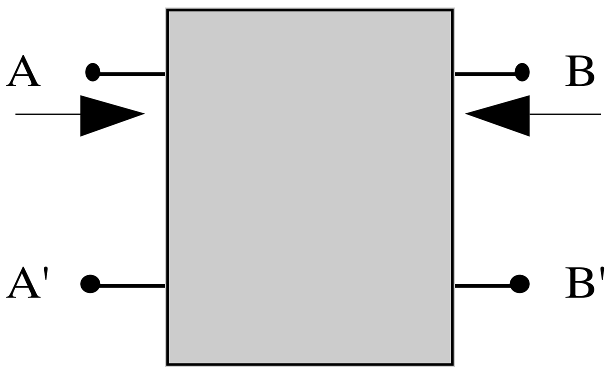
Grafo di n-poli

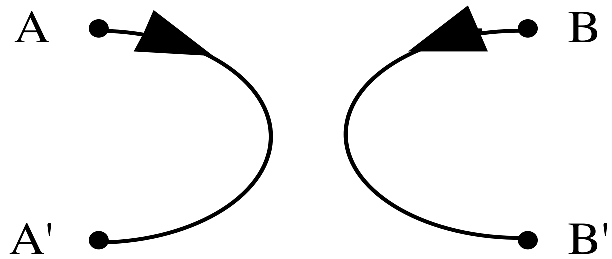
Ad ogni porta della rete di m-bipoli si fa corrispondere un lato

come abbiamo visto, ove necessario si considerano gli *n*-poli come (n–1)-bipoli

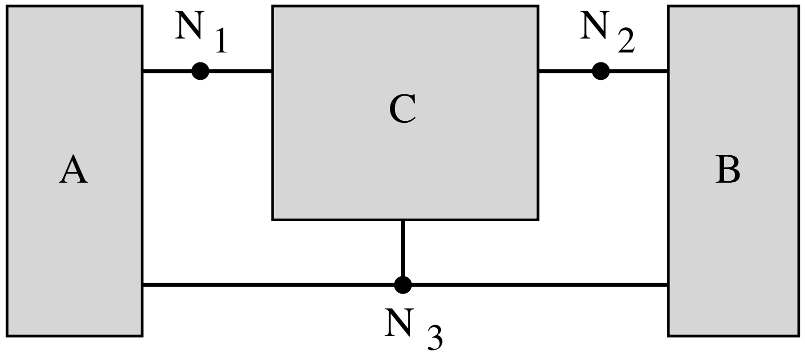


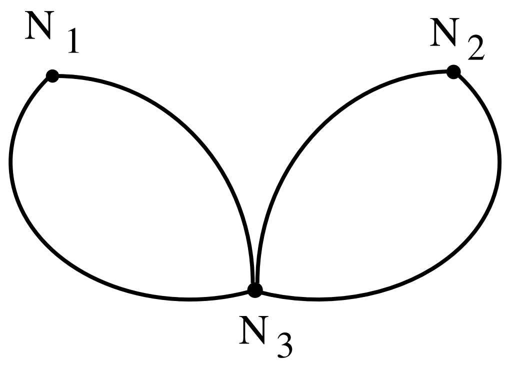


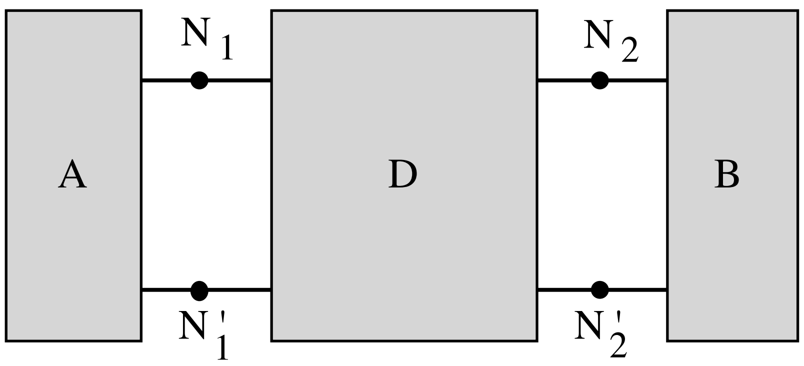


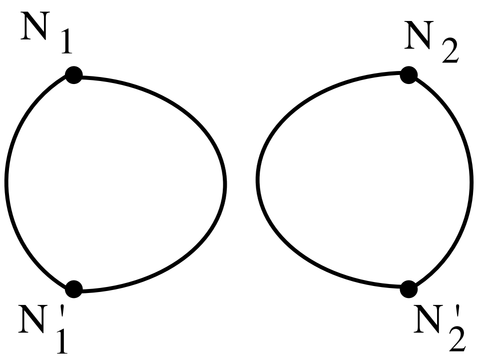


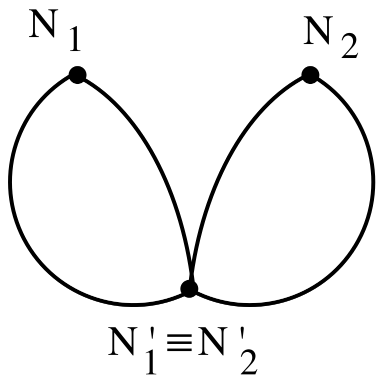
Grafo di reti con n-poli











Legge di Kirchhoff delle correnti
LKC

In ogni rete di *n*-poli è uguale a zero la somma **algebrica** delle correnti dei lati di un insieme di taglio:

$$\sum_{\text{taglio}} \pm i(\mathrm{t}) = 0 \qquad\qquad \sum_{\text{nodo}} \pm i(\mathrm{t}) = 0$$

La seconda vale se come insieme di taglio si considera un nodo

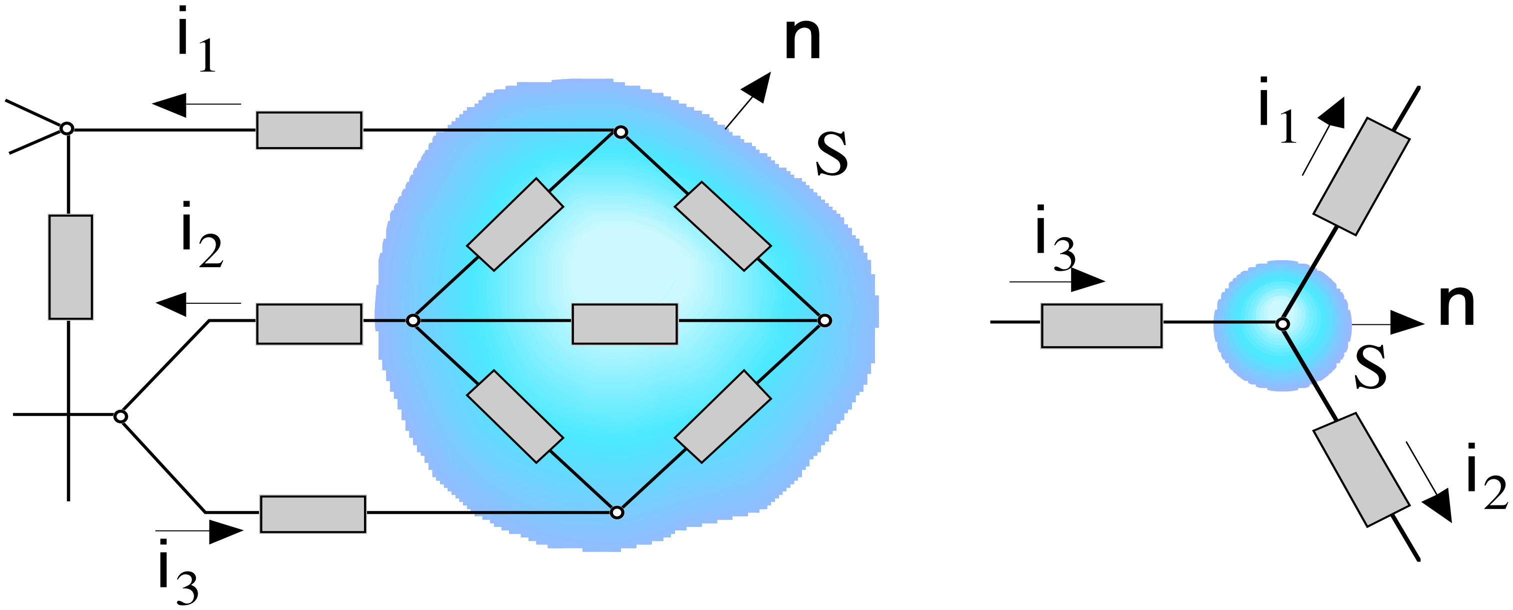
N.B.: in regime stazionario oppure in regime variabile e in qualsiasi istante

LKC - regole di scrittura

Bisogna:

- porre il riferimento di corrente di ogni lato;
- orientare l'insieme di taglio (la superficie chiusa che lo interseca col versore ***n*** uscente o entrante);
- sommare le correnti dei lati con riferimento concorde a ***n***;
- sottrarre le correnti dei lati con riferimento discorde a ***n.***

LKC - esempio



Sono fissati i riferimenti di corrente e il versore di S

LKC $i_1 + i_2 - i_3 = 0$

assumiamo che le correnti siano: $i_1 = 16$ A , $i_2 = -25$ A, $i_3 = -9$ A

→ esse sono compatibili con la LKC: $(16) + (-25) - (-9) = 0$

Legge di Kirchhoff delle tensioni
LKT

In ogni rete di *n*-poli è uguale a zero la somma **algebrica** delle tensioni dei lati di una maglia:

$$\sum_{\text{maglia}} \pm v(\mathrm{t}) = 0 \qquad\qquad \sum_{\text{anello}} \pm v(\mathrm{t}) = 0$$

La seconda vale per reti piane, se come maglia si considera un anello

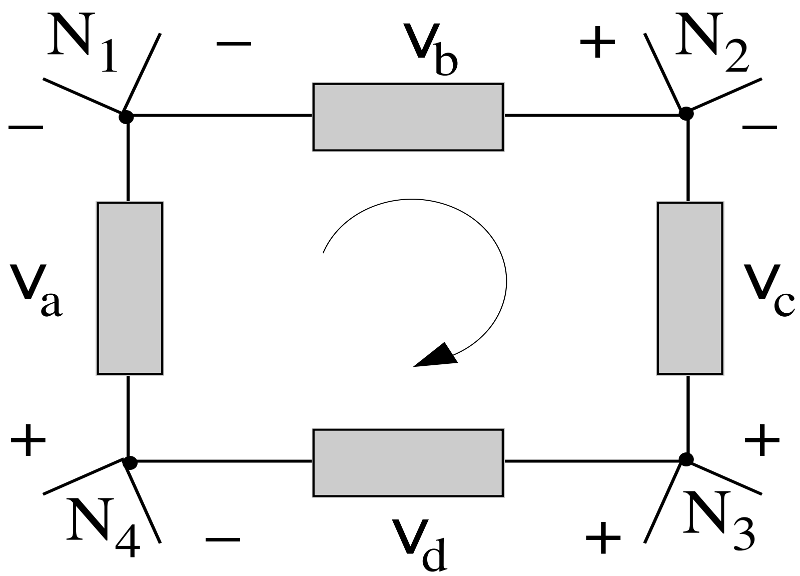
N.B.: in regime stazionario oppure in regime variabile e in qualsiasi istante

LKT - regole di scrittura

Bisogna:

- porre il riferimento di tensione di ogni lato;
- orientare la maglia (con un verso di percorrenza, orario o antiorario);
- sommare le tensioni dei lati che con tale verso sono percorsi dal riferimento + al –;
- sottrarre le tensioni dei lati che con tale verso sono percorsi dal riferimento – al +;

LKT - esempio



Sono fissati i riferimenti di tensione e il verso di percorrenza

LKT $\quad v_a - v_b - v_c + v_d = 0$

assumiamo che le tensioni siano: $\quad v_a = 100\ \text{V},\ v_b = 240\ \text{V},\ v_c = -200\ \text{V}$

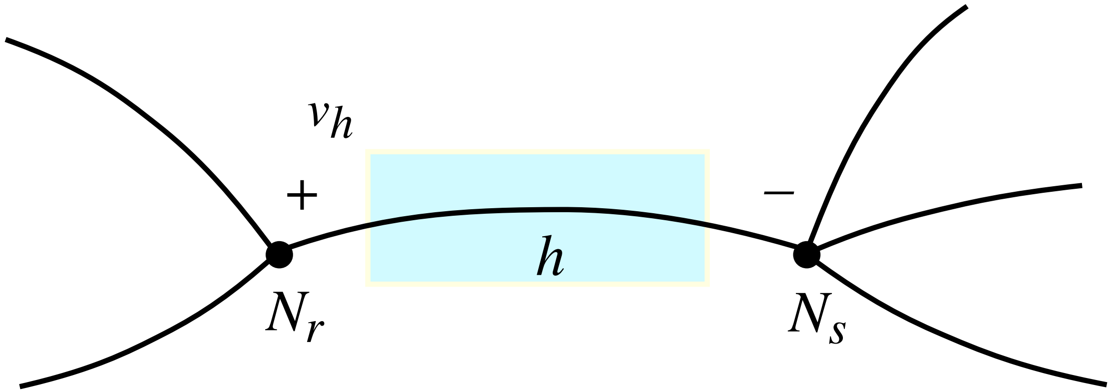
$v_d = -60\ \text{V}$

→ esse sono compatibili con la LKT: $\quad (100) - (240) - (-200) + (-60) = 0$

LKT - formulazioni alternative

La tensione di lato è la d.d.p. tra nodi cui si appoggia:

$$v_h(t) = u_r(t) - u_s(t)$$



Si può dimostrare che tutte le tensioni di lato rispettano questa proprietà se e solo se vale la precedente formulazione:

$$\sum_{\text{maglia}} \pm v(\mathrm{t}) = 0 \qquad\qquad \sum_{\text{anello}} \pm v(\mathrm{t}) = 0$$

LKT - formulazioni alternative

La somma di tensioni tra coppie di nodi in sequenza chiusa* è uguale a zero:

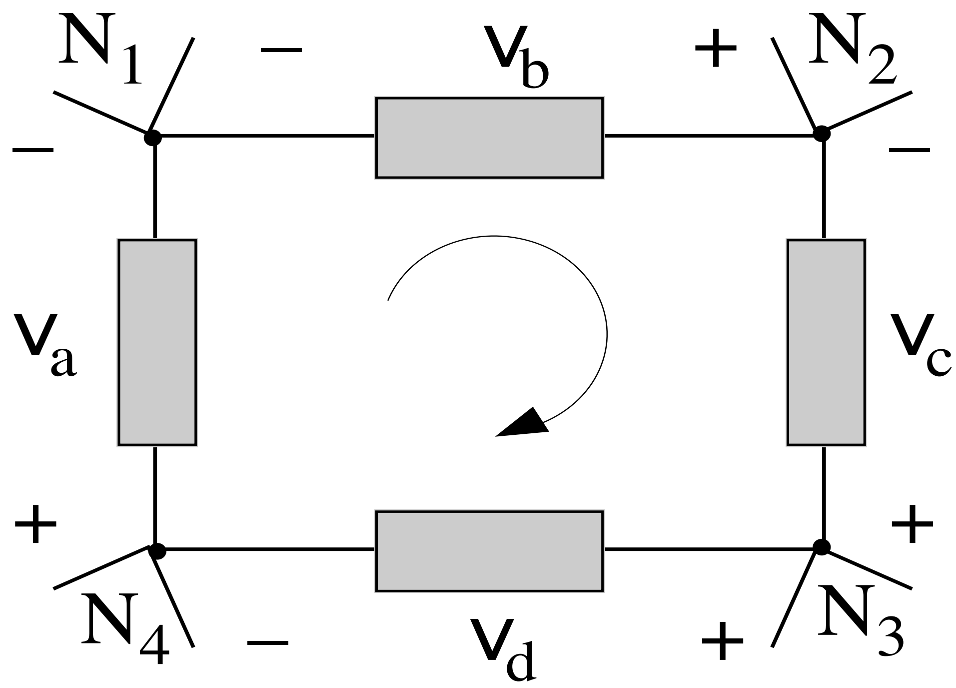
$$\sum v_{rs}(\mathrm{t}) = 0$$

* sequenza chiusa = primo e ultimo nodo coincidono

N.B.: a una coppia di nodi può non appoggiarsi alcun lato, ovvero anche se i due nodi della rete sono collegati tramite un bipolo

Si può dimostrare che questa formulazione vale se e solo se valgono le precedenti formulazioni

LKT - esempio



LKT $\qquad v_{12} + v_{23} + v_{31} = 0$

Assumiamo che le tensioni valgano: $\quad v_{12} = -240\ \text{V},\ v_{23} = 200\ \text{V},\ v_{31} = 40\ \text{V}$

→ esse sono compatibili con la LKT: $\quad (-240) + (200) + (40) = 0$

Problema della topologia

Scrivere in modo intelligente le equazioni KLC e KLT;

ossia: scegliere bene le maglie e gli insiemi di taglio = QUANTI E QUALI ?

Sistemi di maglie indipendenti

- Sono quelli su cui si scrivono sistemi di equazioni LKT indipendenti

- Il numero massimo m di equazioni LKT indipendenti è:

$$m = \ell - n + 1$$

cioè: $m = c$

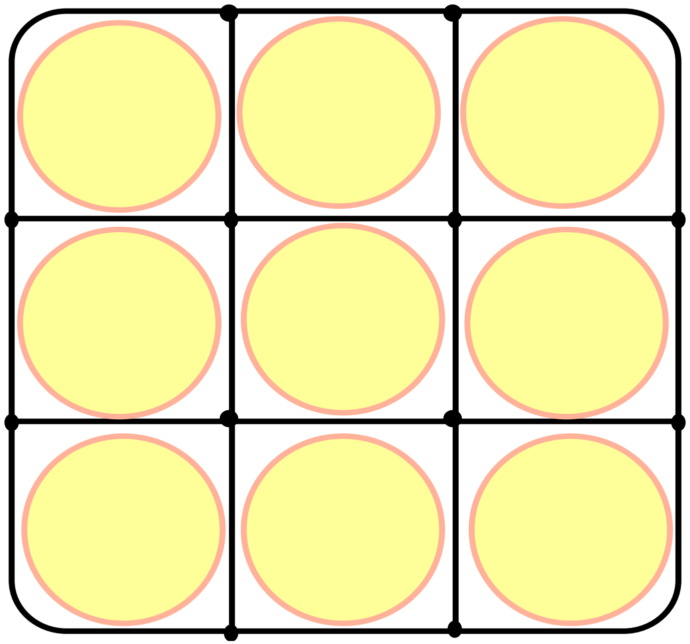
e $m = a$ x reti piane

Ma come trovarle?

1) Sistema di anelli (per reti piane)

m equazioni LKT scritte su *a* anelli **sono sempre indipendenti**

- Si possono usare gli *a*=*m* anelli interni
- oppure l'anello esterno + *a*–1 anelli interni*



* si può, ma in pratica non lo si fa quasi mai

2) Sistema di maglie fondamentali

m equazioni LKT scritte su *c* maglie fondamentali **sono sempre indipendenti**

- Si possono usare le corde di un qualsiasi coalbero per costruire le maglie fondamentali

- Si ottengono così *c*=*m* equazioni indipendenti

Vincoli e gradi di libertà della LKT

- In ogni caso con la LKT si possono scrivere

$m = c = a$ equazioni = vincoli

- Le tensioni in tutto sono ℓ, una per lato (=una per porta della rete)
- quindi la LKT lascia

$$\ell - m = n - 1$$

gradi di libertà alle tensioni

3) Potenziali ai nodi

Modo alternativo di usare questi vincoli e gradi di libertà della LKT:

- Scrivere le equazioni LKT per ogni lato nella forma (ℓ = vincoli) :

$$v_h(t) = u_r(t) - u_s(t)$$

- Così si attribuiscono i gradi di libertà ai potenziali di n–1 nodi, l'ultimo nodo (nodo di massa) avendo potenziale prefissato (tipicamente = 0).

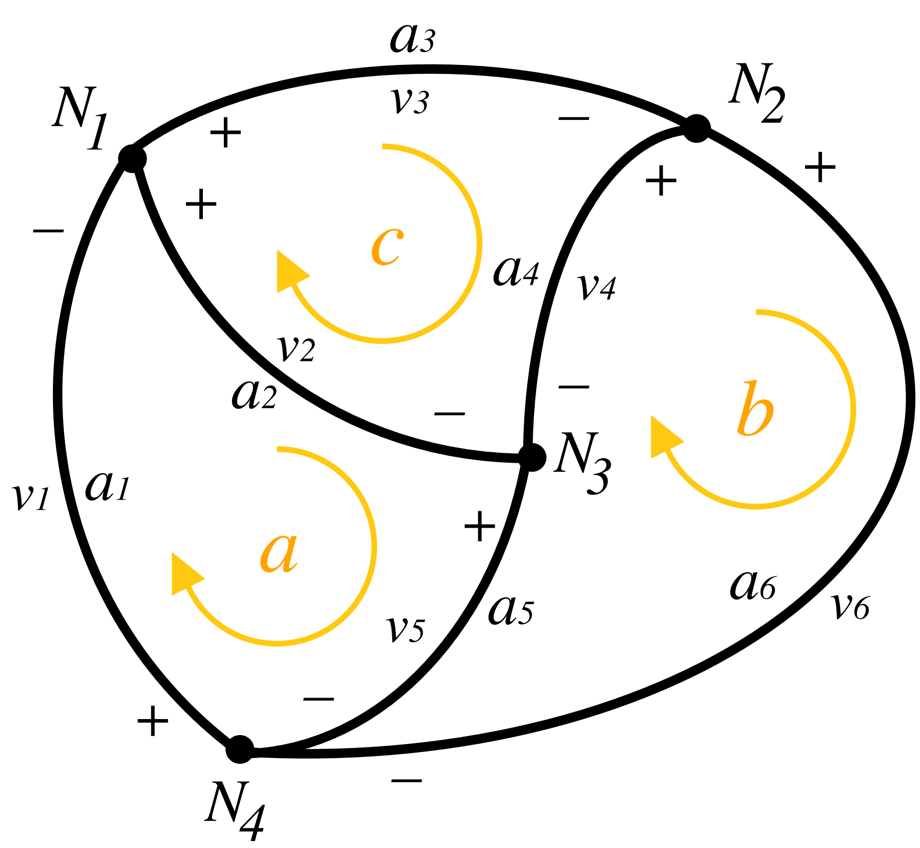
Esempi -1

➊ Anelli

a: $v_2+v_5+v_1=0$

b: $-v_4+v_6-v_5=0$

c: $-v_2+v_3+v_4=0$



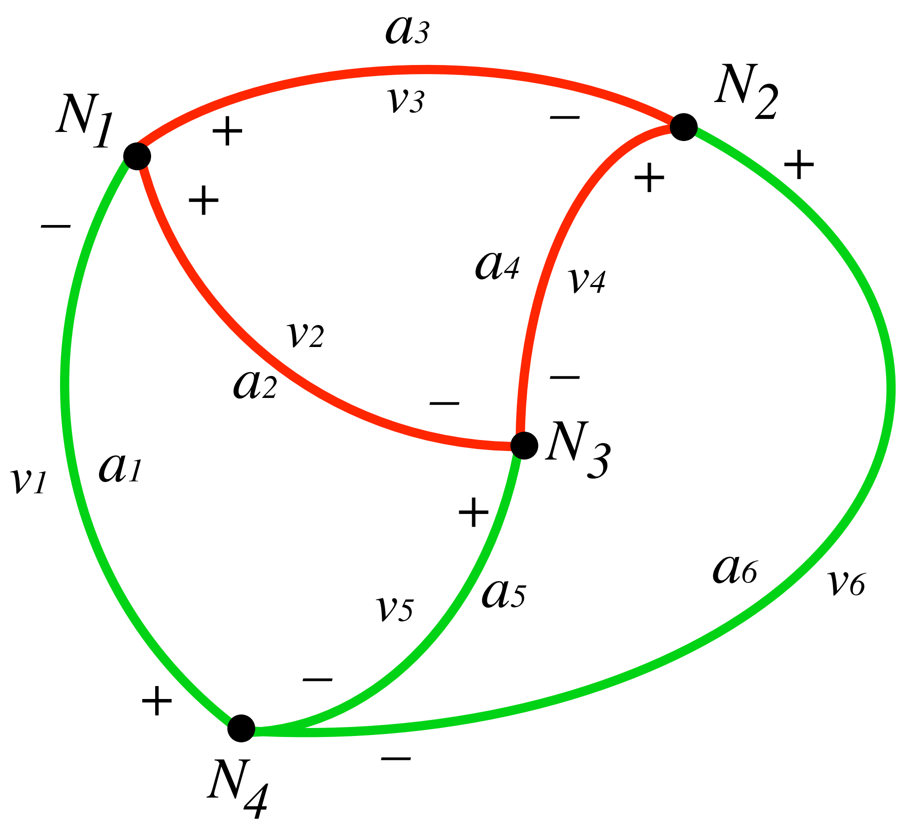
Esempi -1

❷Maglie fondamentali

2: $v_2+v_5+v_1=0$

4: $v_4+v_5-v_6=0$

3: $v_3+v_6+v_1=0$



Esempi -2

❸Potenziali ai nodi

posto: $u_4=0$

$v_1=-u_1$

$v_5=u_3$

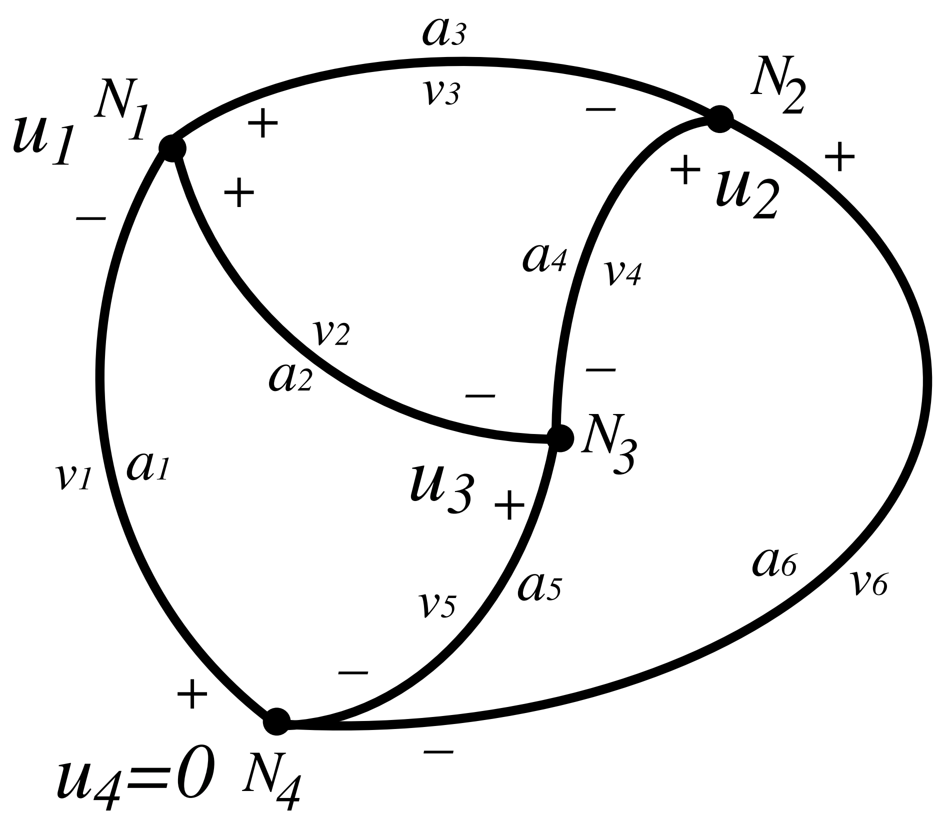
$v_6=u_2$

$v_2= u_1-u_3$

$v_3= u_1-u_2$

$v_4= u_2-u_3$

gradi di libertà: u_1, u_2, u_3



Sistemi di tagli indipendenti

- Sono quelli su cui si scrivono sistemi di equazioni LKC indipendenti

- Il numero massimo t di equazioni LKC indipendenti è:

$$t = n - 1$$

cioè: $t = r$

Ma come trovarle?

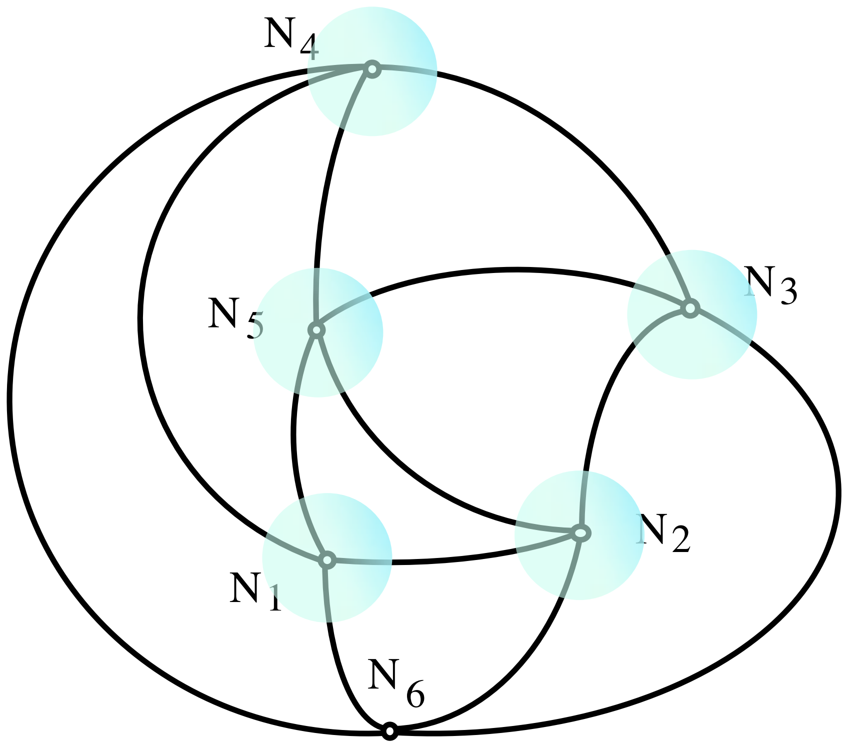
1) Sistema di nodi

- *t* equazioni LKC scritte su *n*–1 nodi **sono sempre indipendenti**
- Si può scegliere liberamente il nodo *n*-esimo da escludere (ad esempio il nodo di massa)

Esempio:

Si scelgono i nodi da

1 a 5 e si esclude 6



2) Sistema di tagli fondamentali

t equazioni LKC scritte su *r* tagli fondamentali **sono sempre indipendenti**

- Si possono usare i rami di un qualsiasi albero per costruire i tagli fondamentali

- Si ottengono così *r*=*t* equazioni indipendenti

Vincoli e gradi di libertà della LKC

- In ogni caso con la LKC si arriva a scrivere

$$t = r = n - 1 \text{ equazioni = vincoli}$$

- Le correnti in tutto sono ℓ, una per lato (=una per ogni porta della rete)
- quindi la LKC lascia

$$\ell - (n - 1) = m$$

gradi di libertà alle correnti

3) Correnti cicliche (di maglia)

Modo alternativo per usare questi vincoli e gradi di libertà della LKC:

- Si attribuisce a ciascuna delle *m* maglie fondamentali una corrente ciclica *k*, che la percorre richiudendosi su se stessa
- Le correnti di tutti i lati sono fissate (vincolate) dalle relazioni:

$$i_h(\mathrm{t}) = \sum_r \pm k_r(\mathrm{t})$$

- Gli *m* gradi di libertà sono attribuiti a tali *m* correnti cicliche k_1, … k_m

4) Correnti cicliche (di anello)

- Se la rete è piana, è meglio usare gli anelli
- Si attribuisce a ciascuno degli *m* anelli una corrente ciclica *k* , che lo percorre richiudendosi su se stessa
- Si impone riferimento concorde a tutte tali correnti (es. orario)
- Le correnti di tutti i lati sono fissate (vincolate) dalle relazioni:

$$i_h(\mathrm{t}) = k_r(\mathrm{t}) - k_s(\mathrm{t})$$

- Così si attribuiscono i gradi di libertà alle *m* correnti di anello (tipicamente gli anelli interni, escludendo l'anello esterno, ma è possibile anche considerare *m*-1 anelli interni + l'anello esterno).

Esempi -1

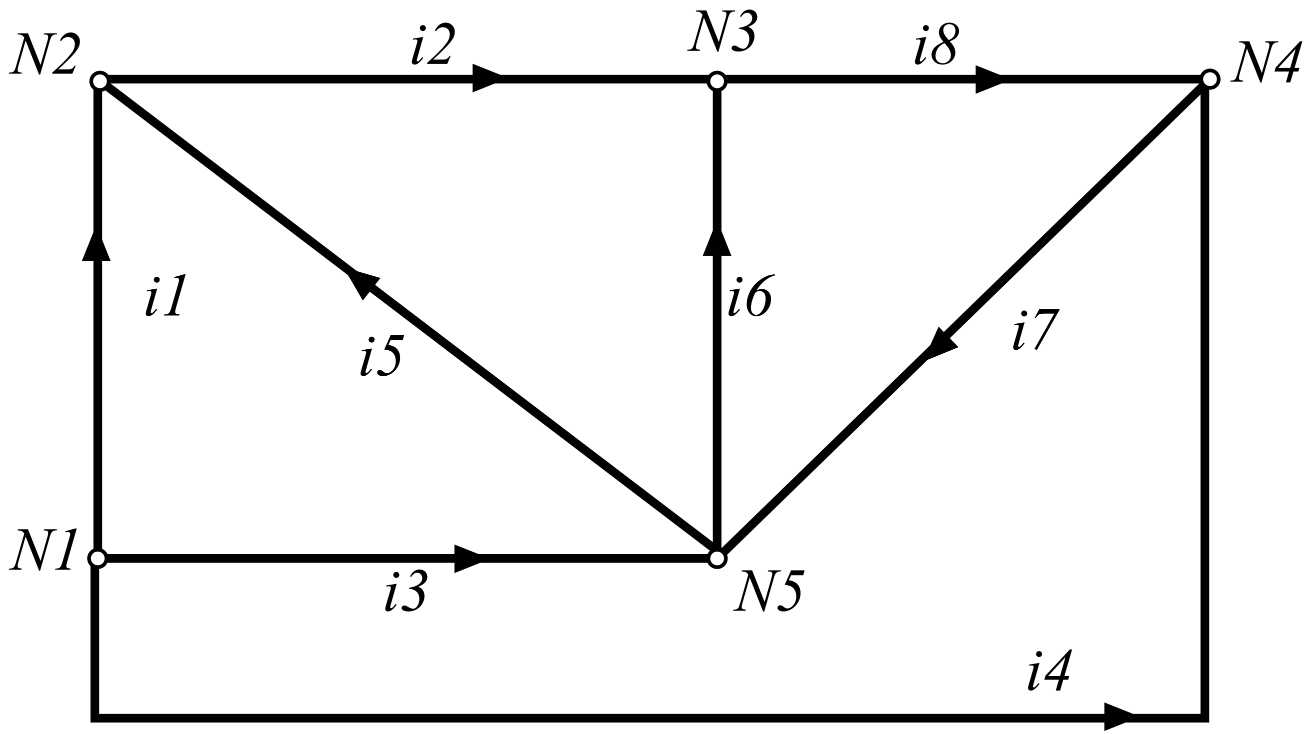
❶ Nodi (escludendo il nodo 5)

N_1: $i_1+i_3+i_4=0$

N_2: $-i_1+i_2-i_5=0$

N_3: $-i_2-i_6+i_8=0$

N_4: $-i_4+i_7-i_8=0$



Esempi -1

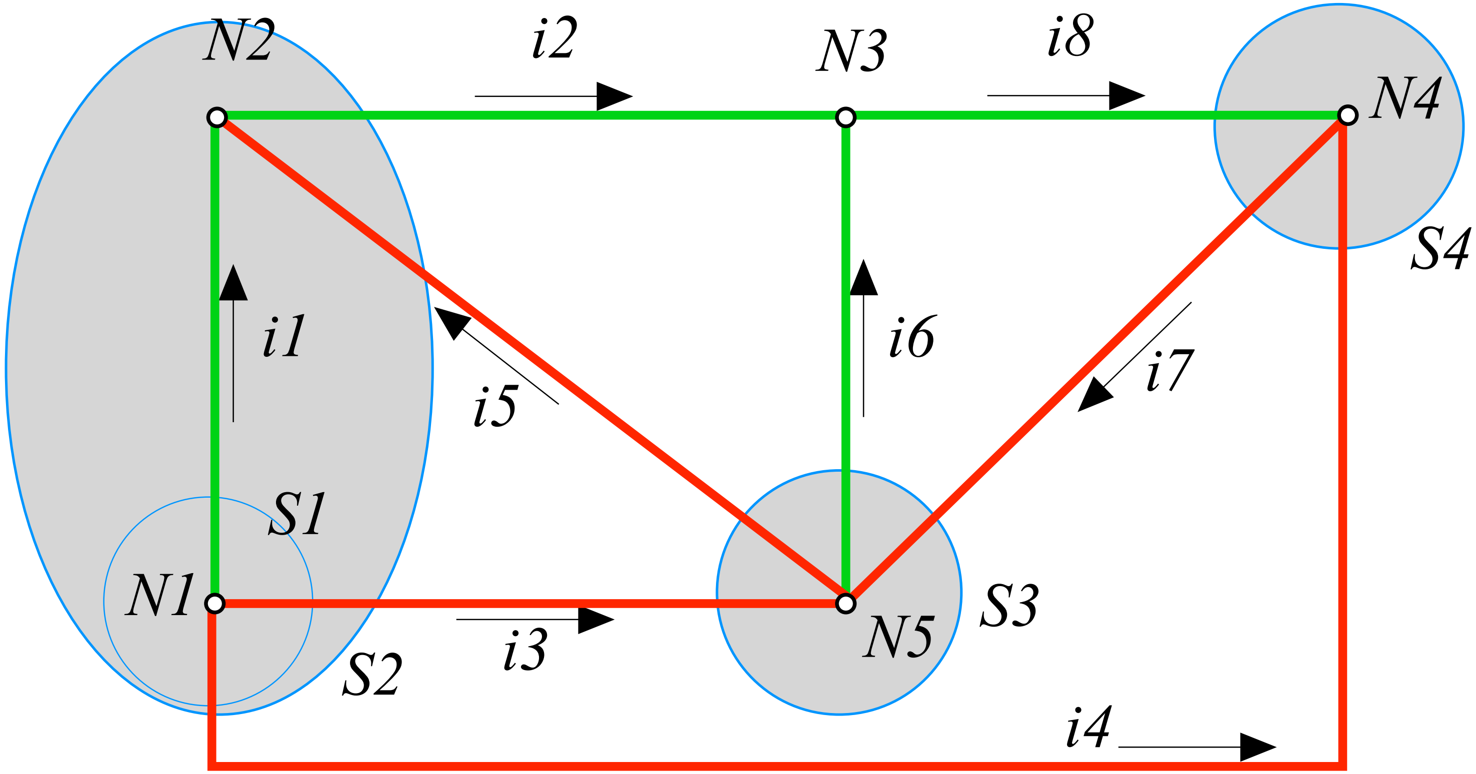
❷ Tagli fondamentali

S_1: $i_1+i_3+i_4=0$

S_2: $i_2+i_3+i_4-i_5=0$

S_3: $i_6-i_3+i_5-i_7=0$

S_4: $-i_8-i_4+i_7=0$



Esempi -2

❸ Correnti di maglia

$i_1 = -k_3 - k_4$

$i_2 = -k_3 - k_4 + k_2$

$i_3 = k_3$

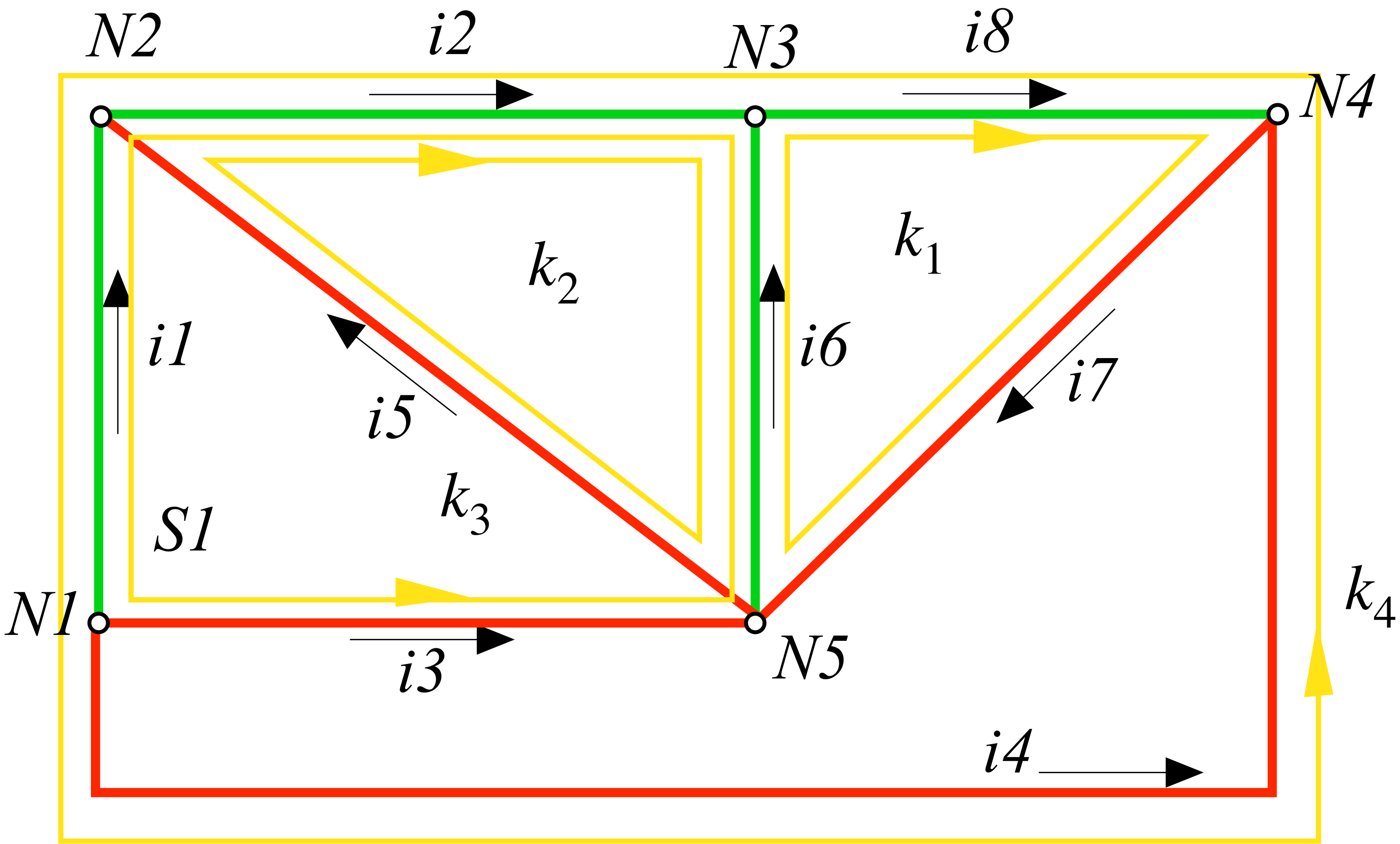
$i_4 = k_4$

$i_5 = k_2$

$i_6 = k_3 - k_2 + k_1$

$i_7 = k_1$

$i_8 = -k_4 + k_1$



Gradi di libertà: k_1, k_2, k_3 , k_4

Esempi -3

❹Correnti di anello

$i_1 = k_1$

$i_2 = k_2$

$i_3 = k_4 - k_1$

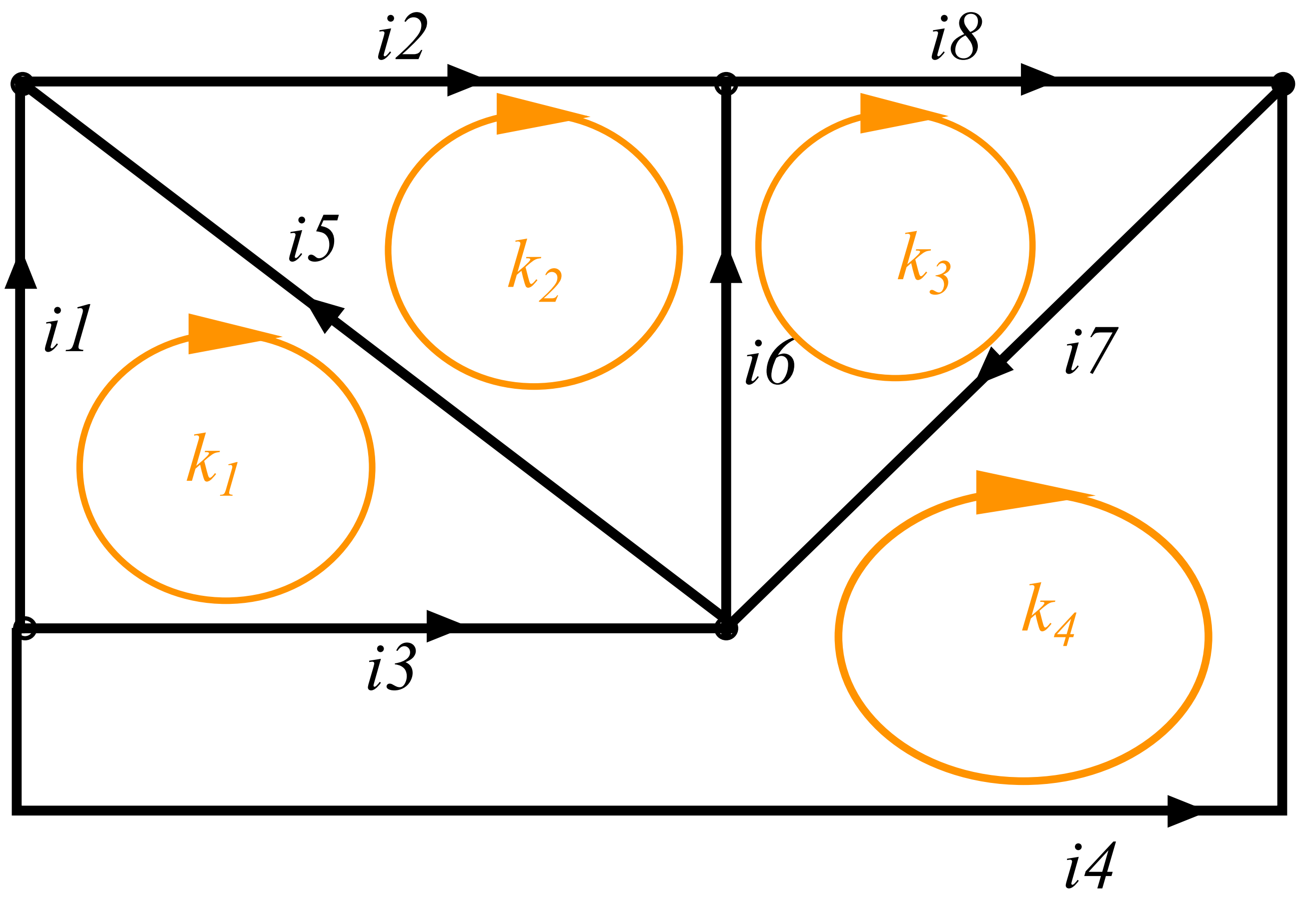
$i_4 = -k_4$

$i_5 = k_2 - k_1$

$i_6 = k_3 - k_2$

$i_7 = k_3 - k_4$

$i_8 = k_3$



Gradi di libertà: k_1, k_2, k_3, k_4

Conclusione

Usando bene le LKT e LKC possiamo così scrivere:

m ***equazioni per le tensioni (LKT) +***

n-1 ***equazioni per le correnti (LKC) =***

____

ℓ ***equazioni topologiche***

Teorema di Tellegen

Consideriamo un grafo di ℓ lati interconnessi in n nodi e tutti recanti la stessa convenzione delle potenze. Siano:

- $\{v_h\}_{h=1,2\ldots\ell}$ un insieme di valori di tensione compatibili con la LKT
- $\{i_h\}_{h=1,2\ldots\ell}$ un insieme di valori di corrente compatibili con la LKC

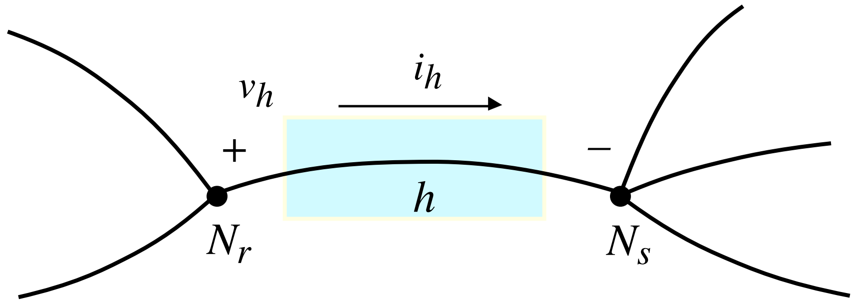
Vale la relazione:

$$\sum_{h=1}^{\ell} v_h \, i_h = 0$$

n.b.: basta che tensioni e correnti siano compatibili con LKT e LKC. Non si richiede che siano compatibili con le equazioni tipologiche degli m-bipoli

Dimostrazione

Consideriamo $v_h i_h = v_{rs} i_{rs}$,



per LKT: $v_{\text{rs}} = u_r - u_s$

➡ $$v_h i_h = (u_r - u_s) i_{rs}$$

➡ $$\sum_{h=1}^{\ell} v_h i_h = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} (u_r - u_s) i_{rs} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} u_r i_{rs} - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} u_s i_{rs}$$

➡ $$\sum_{h=1}^{\ell} v_h i_h = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} u_r \sum_{s=1}^{n} i_{rs} - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} u_s \sum_{r=1}^{n} i_{rs}$$

Per LKC: $\sum_{s=1}^{n} i_{rs} = 0 \quad e \quad \sum_{r=1}^{n} i_{rs} = 0$

Commenti

- È un teorema puramente topologico
- Prescinde dalla tipologia dei bipoli o *n*-poli che costituiscono i lati
- Quindi prescinde dai fenomeni fisici che possono avvenire nella rete
- Per questo si chiama anche **teorema delle potenze virtuali**, in quanto i prodotti *vi* non sono necessariamente vere potenze

- Se **in più** *i* e *v* coesistono (= verificano i vincoli tipologici)

→ i prodotti *vi* esprimono le potenze entranti nei bipoli e il teorema esprime la **conservazione delle potenze**.

Principio di dualità -2

Dualità topologiche

lati in serie	lati in parallelo
lato aperto	cappio
nodo	anello
n nodi	a_s anelli
nodo di massa	anello esterno
insieme di taglio	maglia
LKC	LKT

Principio di dualità -3

Altre dualità topologiche

n–1 tagli indipendenti	m maglie indipendenti
albero (ramo)	coalbero (corda)
taglio fondamentale	maglia fondamentale
a_s–1=m correnti d’anello	n–1 potenziali dei nodi
correnti di coalbero	tensioni d’albero
correnti di albero	tensioni di coalbero