Università di Padova - Scuola di Ingegneria

Massimo Guarnieri

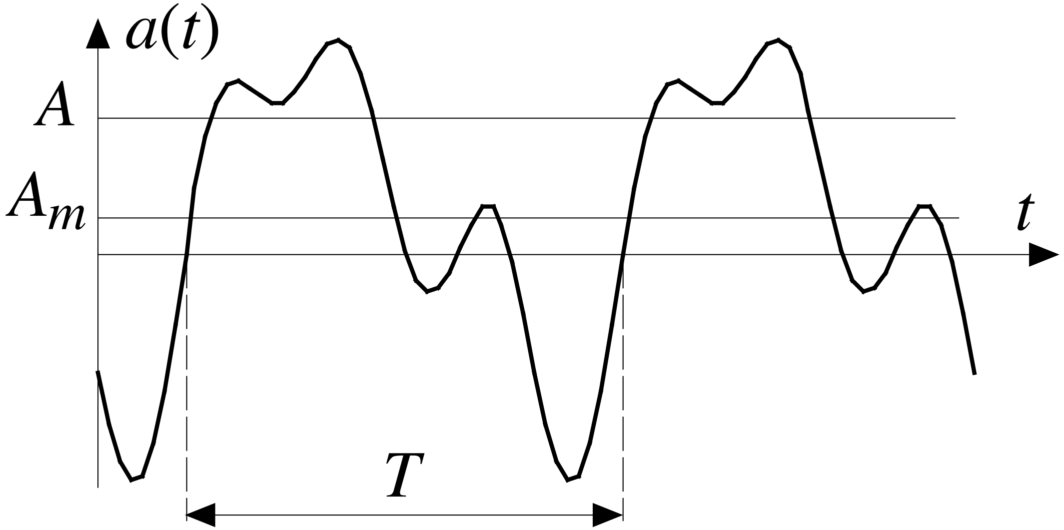
Elettrotecnica

Capitolo 14
Introduzione al regime sinusoidale e al metodo simbolico

Funzioni periodiche

Una funzione periodica verifica l'equazione

$a(t) = a(t+nT)$



T = **periodo** [s];

n = numero intero

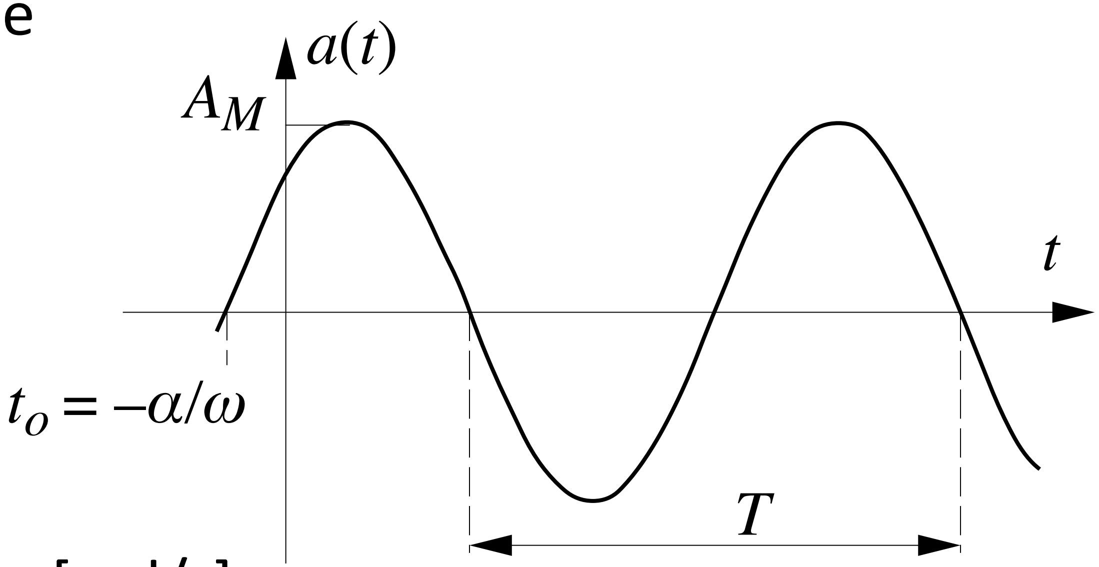
ovvero, $a(t)$ si ripete indefinitamente a intervalli di tempo uguali al periodo. In ogni periodo esegue un ciclo.

frequenza f = numero di cicli in un secondo → $Tf = 1$ →

$f = 1/T$ [Hz] ([kHz], [MHz], [GHz])

Funzioni sinusoidali

Per ora consideriamo solo le funzioni sinusoidali, che sono di gran lunga le più importanti funzioni periodiche



$a(t) = A_{\mathrm{M}}\,\mathrm{sen}(\omega t+\alpha)$

A_{M} = ampiezza o valore massimo
$\omega t+\alpha$ = fase istantanea [rad]
α = fase iniziale [rad]
ω = pulsazione o frequenza angolare [rad/s]

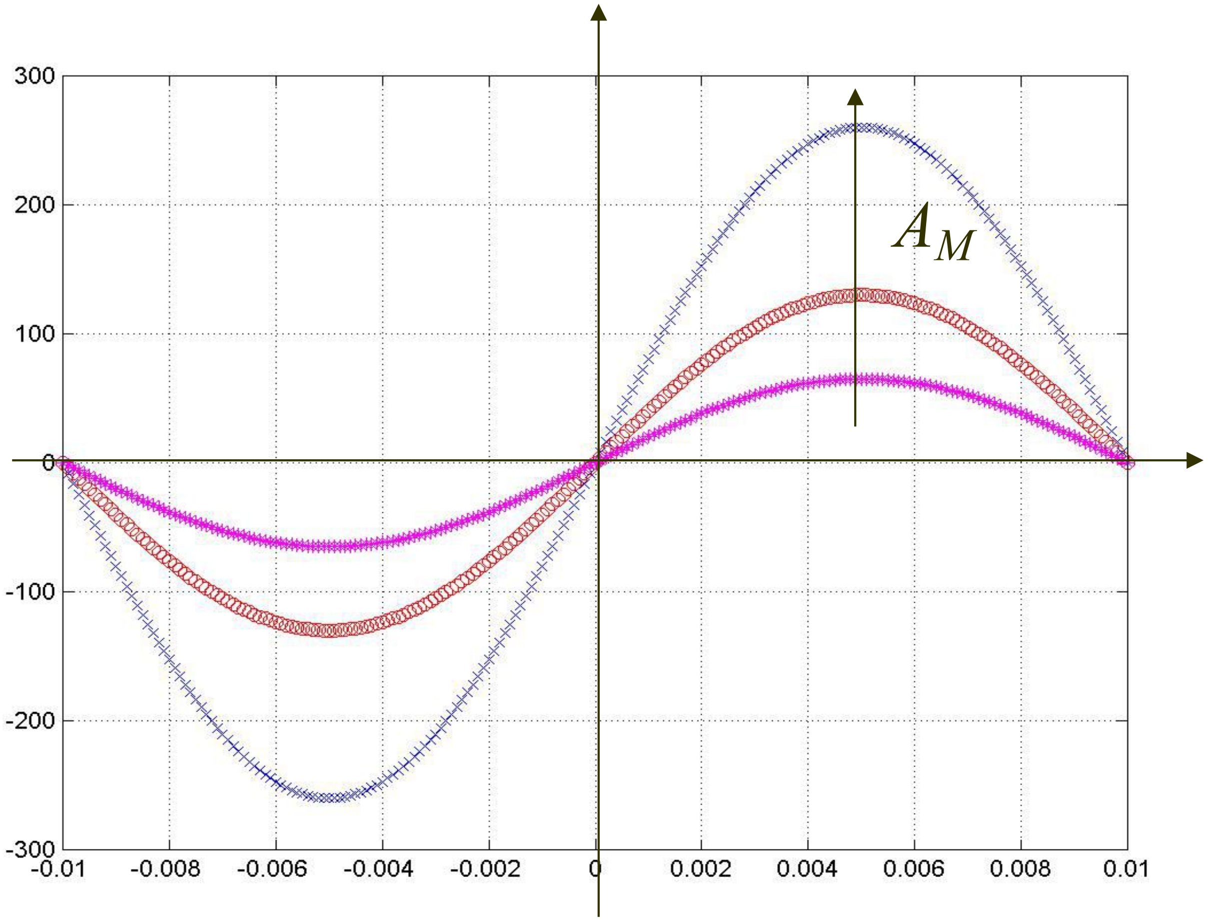
Nel periodo T la sinusoide compie un ciclo, ovvero la fase aumenta di 2π rad → $\omega T = 2\pi$:

$$\omega = 2\pi / T \quad , \quad \omega = 2\pi f$$

n.b.: α deve poter coprire tutto il ciclo → $-\pi \leq \alpha \leq +\pi$

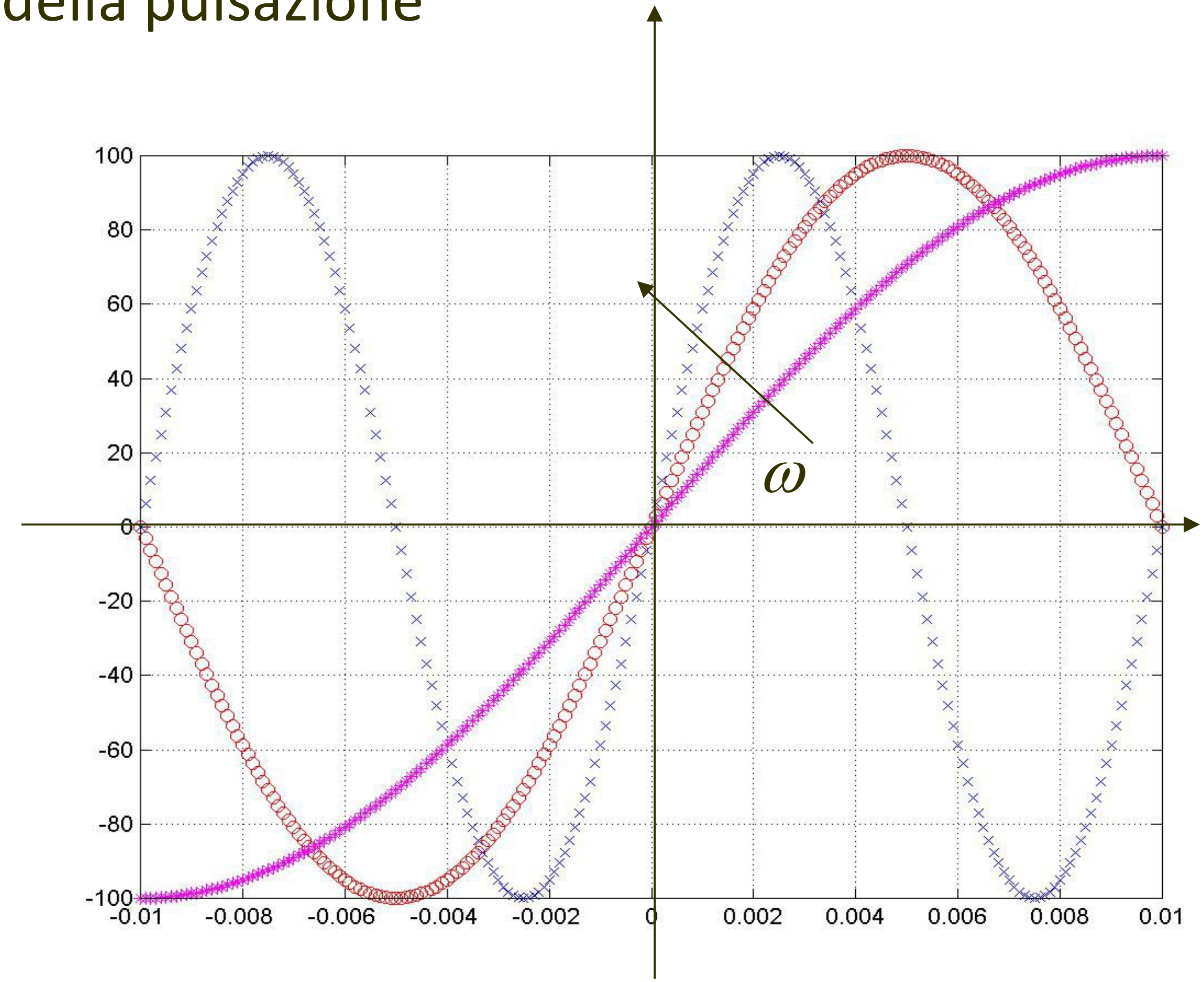
Ampiezza

Al variare dell'ampiezza



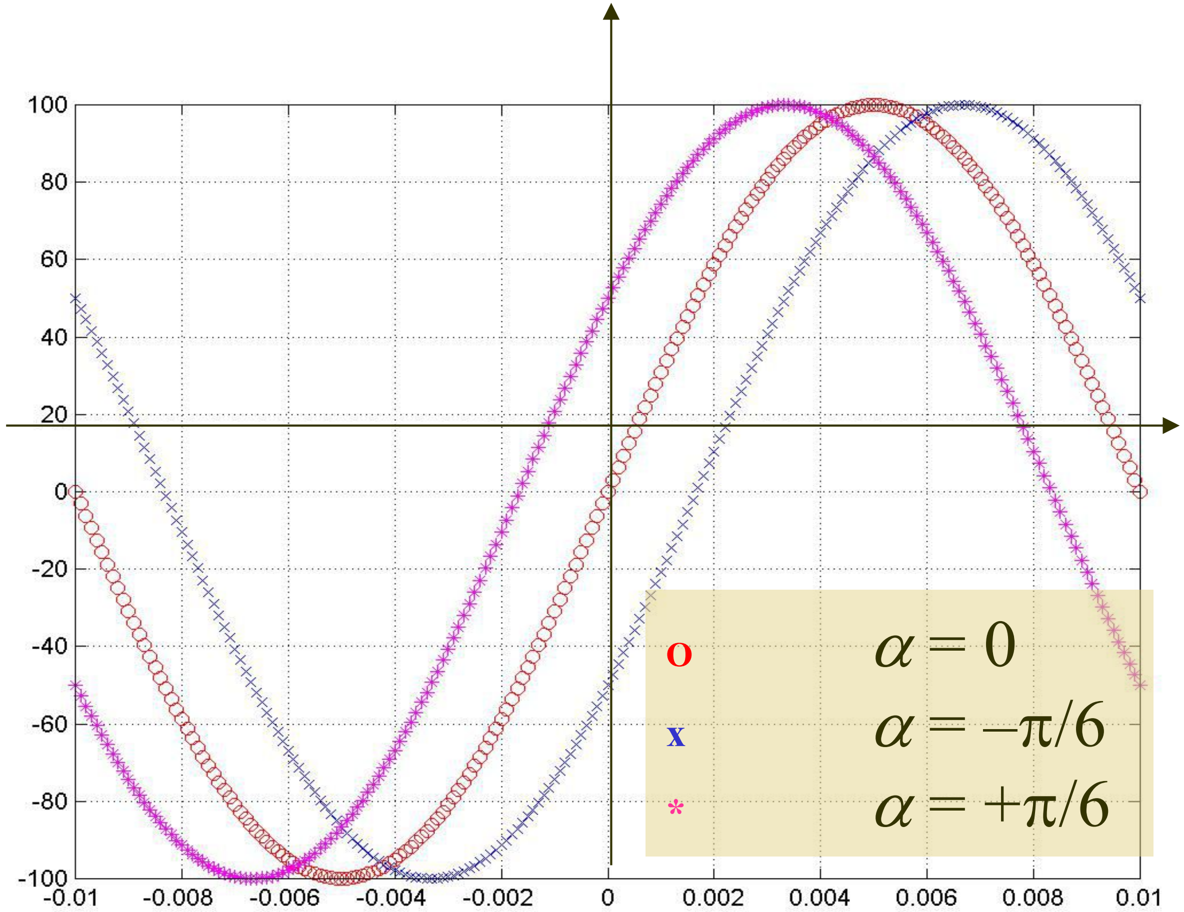
Pulsazione

Al variare della pulsazione



Fase iniziale

Al variare della fase iniziale



Espressioni delle funzioni sinusoidali

Date le relazioni tra seno e coseno, la funzione sinusoidale $a(t)$ si può anche scrivere in coseno

$$a(t) = A_{\mathrm{M}}\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha) = A_{\mathrm{M}}\cos(\omega t + \alpha - \pi/2) = A_{\mathrm{M}}\cos(\omega t + \delta)$$

con fase iniziale $\delta = \alpha - \pi/2$

Onde evitare equivoci sulle fasi iniziali e sulle loro relazioni, quando si considerano più sinusoidi è necessario che siano espresse tutte allo stesso modo: o in seno o in coseno

Valore efficace

In inglese *rms* (*root mean square*) value

Definizione generale valida per qualsiasi funzione periodica:

$$A \triangleq \sqrt{\frac{1}{T}\int_T a(t)^2\, dt}$$

n.b.:

- A ha la stessa dimensione fisica di $a(t)$
- è sempre $A \geq 0$

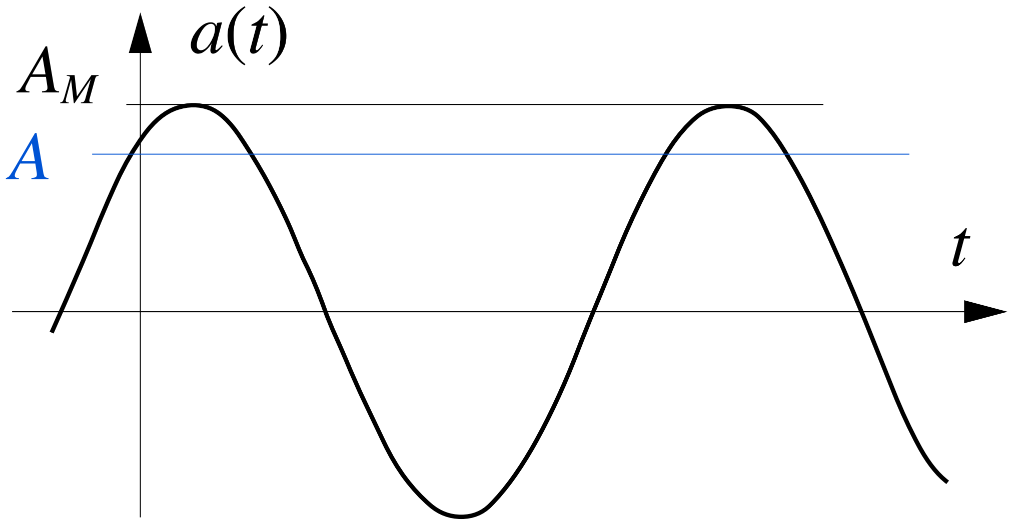
Valore efficace

Valore efficace di una **funzione sinusoidale** $a(t) = A_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$

Dalla definizione per integrazione si ricava:

$$A = \frac{A_M}{\sqrt{2}} \cong 0{,}707\, A_M$$

ovvero è anche $A_M = \sqrt{2}\, A$



Spesso è più importante dell'ampiezza, tanto che si scrive:

$$a(t) = \sqrt{2}\, A \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

Esempio: quando parliamo di una tensione alternata a 220 V, esprimiamo il valore efficace e non l'ampiezza (che è di 311 V)

Valore medio

Definizione generale valida per qualsiasi funzione periodica:

$$A_0 \triangleq \frac{1}{T}\int_T a(t)\,dt$$

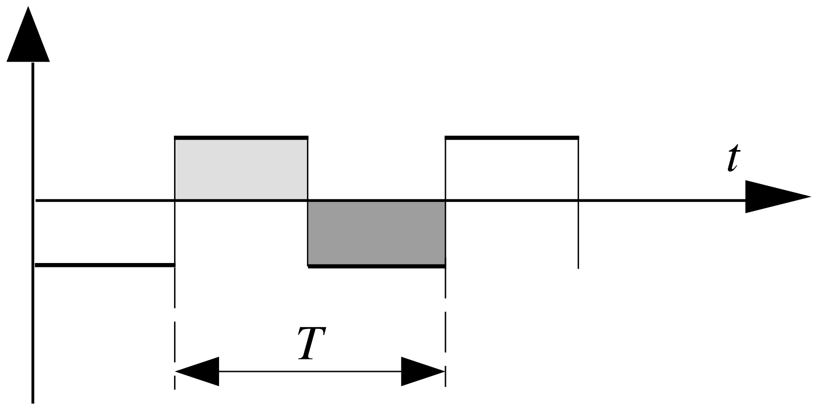
n.b.:

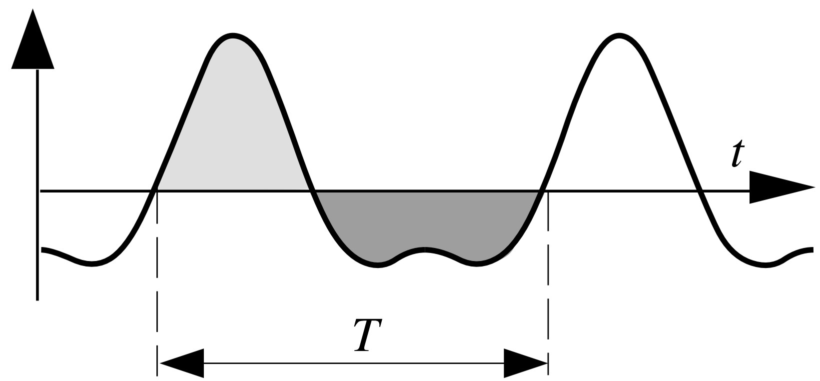
- A_0 ha la stessa dimensione fisica di $a(t)$
- può essere $A_0 < 0$, $A_0 = 0$, $A_0 > 0$

Funzioni alternate

Funzione alternata: è una funzione periodica a valor medio nullo:

$$A_0 = 0$$





Le funzioni sinusoidali sono alternate

Funzioni alternate - valore medio del modulo

Valore medio del modulo di una funzione alternata (o semplicemente valore medio)

Definizione generale valida per qualsiasi funzione alternata:

$$A_m \triangleq \frac{1}{T} \int_T |a(t)|\, dt$$

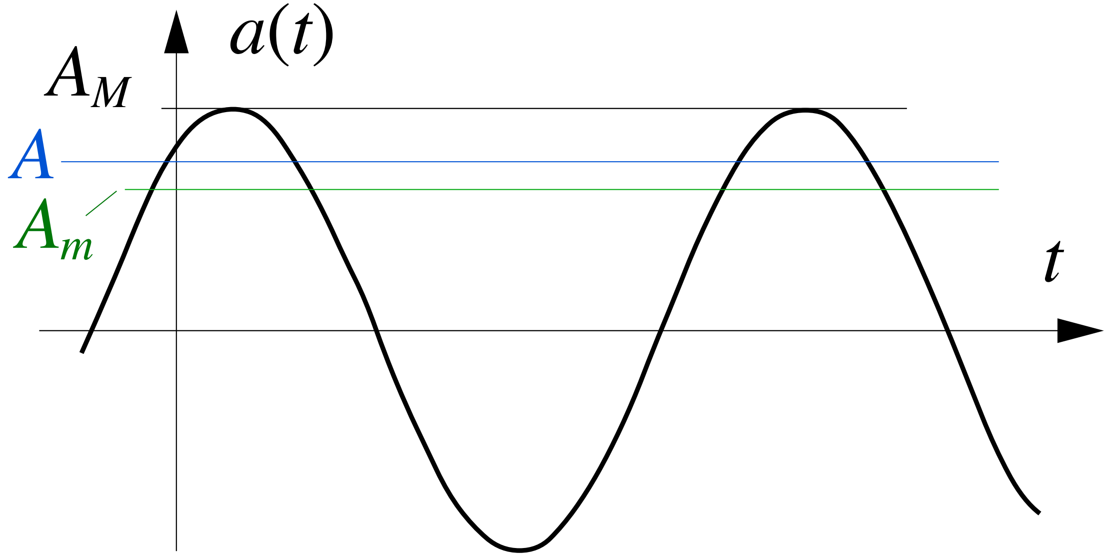
n.b.:

- A_m ha la stessa dimensione fisica di $a(t)$
- è sempre $A_m \geq 0$

Funzioni sinusoidali - valore medio del modulo

Valore medio (del modulo) di una **funzione sinusoidale**

$$a(t) = A_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$



Dalla definizione per integrazione:

$$A_m = \frac{2\,A_M}{\pi} \cong 0{,}636\,A_M$$

è anche

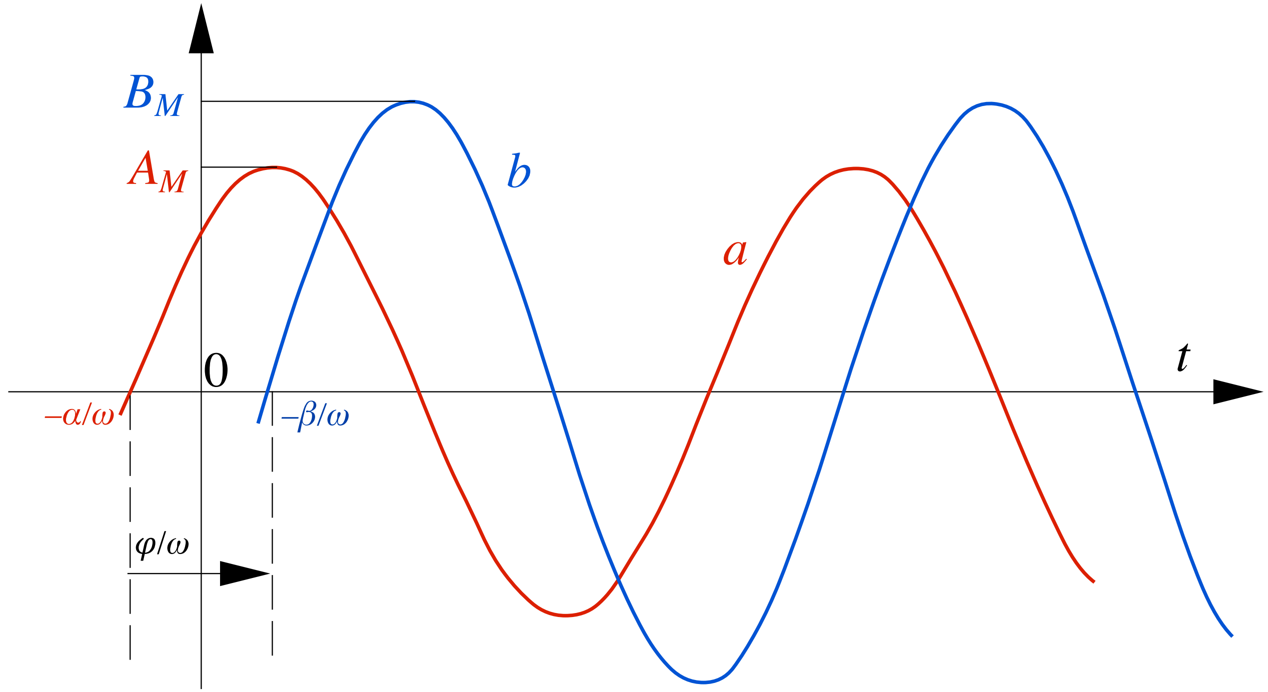
$$A_m = \frac{2\sqrt{2}A}{\pi} = \frac{A}{k_f} \quad \text{ove} \quad k_f = \frac{A}{A_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cong 1{,}11$$

k_f = **fattore di forma** (adimensionale), definibile anche funzioni alternate generiche

Sinusoidi isofrequenziali - sfasamento

$a(t) = A_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$

$b(t) = B_M \operatorname{sen}(\omega t + \beta)$



Sfasamento:

$$\varphi = (\omega t + \alpha) - (\omega t + \beta) = \alpha - \beta$$

$\varphi = 0$ a e b sono in fase

$\varphi > 0$ a è in anticipo su b

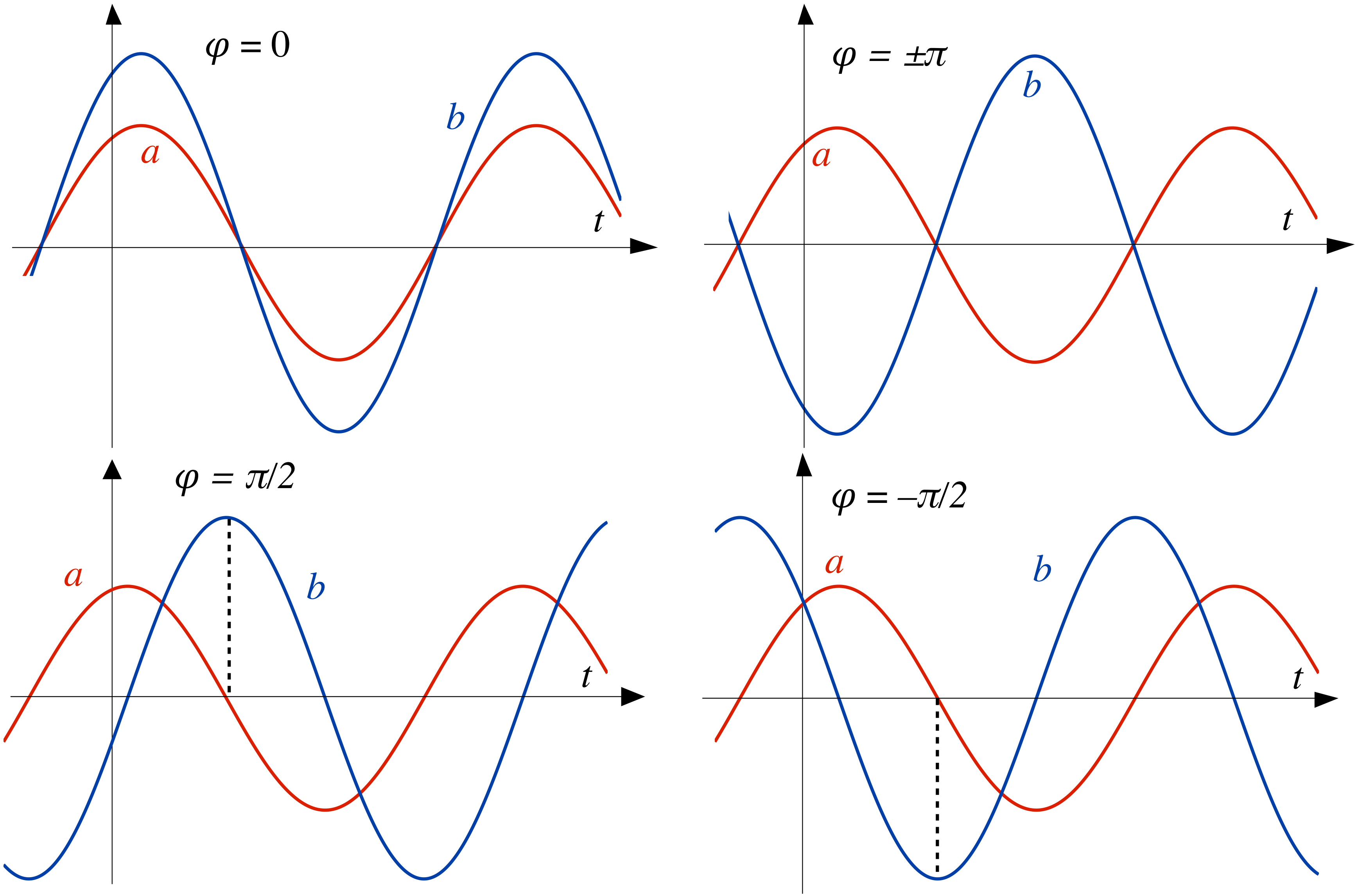
$\varphi < 0$ a è in ritardo su b

$\varphi = \pm\pi$ a e b sono in opposizione di fase

$\varphi = +\pi/2$ a è in quadratura in anticipo su b

$\varphi = -\pi/2$ a è in quadratura in ritardo su b

Sinusoidi isofrequenziali - sfasamento



Trasformata fasoriale o di Steinmetz

In un insieme di sinusoidi isofrequenziali (con ω uguale e fissata), ogni sinusoide è individuata da due parametri:

A_M (o A) e α (o φ rispetto ad una fase iniziale di riferimento)

usando tali parametri è possibile costruire un numero complesso detto **fasore** che è associato a tale sinusoide in modo biunivoco:

$$a(t) = A_M \, sen(\omega t + \alpha) \quad \Rightarrow \quad \bar{A} = \frac{A_M}{\sqrt{2}} e^{j\alpha} = A e^{j\alpha}$$

$$\bar{A} = A e^{j\alpha} \quad \Rightarrow \quad a(t) = \sqrt{2} \, A sen(\omega t + \alpha) = A_M \, sen(\omega t + \alpha)$$

n.b.: e = numero di Nepero

j = unità immaginaria: $j = \sqrt{-1}$

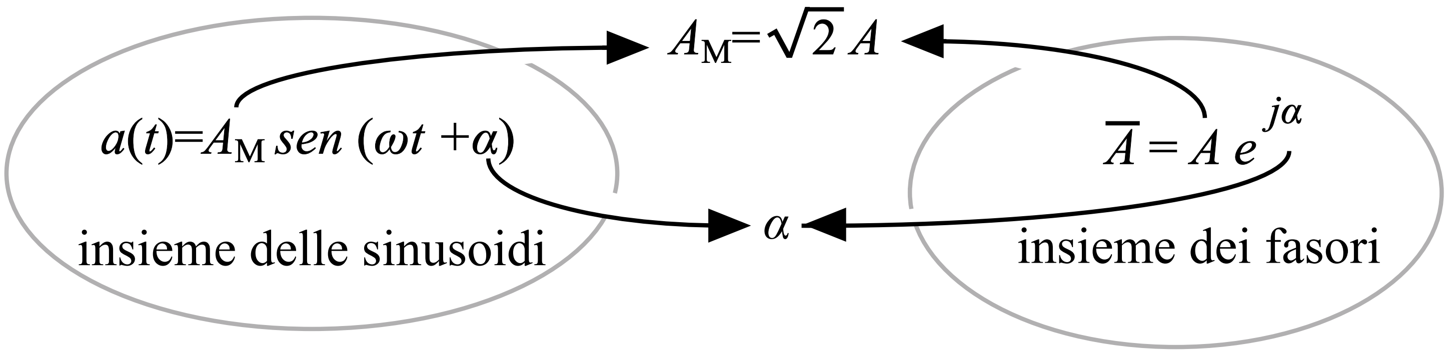
Trasformata fasoriale o di Steinmetz

FASORE: numero complesso che rappresenta una specifica sinusoide dell'insieme isofrequenziale ottenuto dalla trasformata di Steinmetz

$$a(t) = A_M\, sen(\omega t + \alpha) \quad \Rightarrow \quad \bar{A} = \frac{A_M}{\sqrt{2}} e^{j\alpha} = A e^{j\alpha}$$

$$\bar{A} = A e^{j\alpha} \quad \Rightarrow \quad a(t) = \sqrt{2}\, A sen(\omega t + \alpha) = A_M\, sen(\omega t + \alpha)$$

$$\bar{A} = S\left[a(t)\right] \qquad \Leftrightarrow \qquad a(t) = S^{-1}\left[\bar{A}\right]$$



Trasformata fasoriale o di Steinmetz

Relazione formale: $a(t) = \Im m\left(\sqrt{2}\,\bar{A} e^{j\omega t}\right)$

$$= \Im m\left(\sqrt{2}\,A e^{j\alpha} e^{j\omega t}\right) = \Im m\left(A_M\, e^{j(\omega t+\alpha)}\right)$$

$$= \Im m\left(A_M\, cos(\omega t+\alpha) + j\, A_M\, sen(\omega t+\alpha)\right)$$

L'estrazione della parte immaginaria è un'operazione lineare
→ si conservano **somme algebriche** e **prodotti per scalari**:

$$\begin{cases} \bar{C} = S[c(t)] = S[a(t)+b(t)] = S[a(t)] + S[b(t)] = \bar{A} + \bar{B} \\ \bar{C} = S[c(t)] = S[k\,a(t)] = k\,S[a(t)] = k\,\bar{A} \end{cases}$$

Ossia:

$$\begin{cases} c(t) = a(t) + b(t) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{C} = \bar{A} + \bar{B} \\ c(t) = k\,a(t) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{C} = k\,\bar{A} \end{cases}$$

Trasformata fasoriale o di Steinmetz

Quindi la **somma algebrica** e il **prodotto per scalare** dei fasori sono le operazioni che corrispondono alla **somma algebrica** e al **prodotto per scalare** delle sinusoidi.

Ci serve anche l'operazione sui fasori che corrisponde alla **derivata temprale** delle sinusoidi (n.b. i fasori non sono funzioni del tempo!)

La derivata di $a(t)$ è:

$$c(t) = \frac{da}{dt} = \omega A_M \cos(\omega t + \alpha) = (\omega A_M)\, sen\left[\omega t + \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

la cui trasformata è:

$$\bar{C} = (\omega A)\, e^{j\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = \omega A\, e^{j\alpha}\, e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega \bar{A}$$

→ In campo fasoriale il prodotto per $j\omega$ corrisponde alla derivata temporale di una sinusoide

Trasformata fasoriale o di Steinmetz

Quindi le operazioni che ci troviamo ad eseguire in campo fasoriale sono

$$
\begin{cases}
c(t) = a(t) + b(t) & \Leftrightarrow \quad \bar{C} = \bar{A} + \bar{B} \\
c(t) = k\, a(t) & \Leftrightarrow \quad \bar{C} = k\, \bar{A} \\
c(t) = \dfrac{da(t)}{dt} & \Leftrightarrow \quad \bar{C} = j\omega\, \bar{A}
\end{cases}
$$

→ Nel dominio del tempo le operazioni sono **algebrico-differenziali** sulle sinusoidi

→ In campo simbolico le operazioni sono **algebriche** su numeri complessi

Espressioni dei fasori e dei numeri complessi

$$\bar{A} = A e^{j\alpha}$$

Come tutti i numeri complessi possono essere scritti in due modi: forma cartesiana e forma

Forma cartesiana

$$\bar{A} = A_{\Re} + jA_{\Im}$$

parte reale $A_{\Re} = A \; cos \; \alpha$

parte immaginaria $A_{\Im} = A \; sen \; \alpha$

Forma polare

$$\bar{A} = A e^{j\alpha}$$

modulo $A = \sqrt{{A_{\Re}}^2 + {A_{\Im}}^2}$

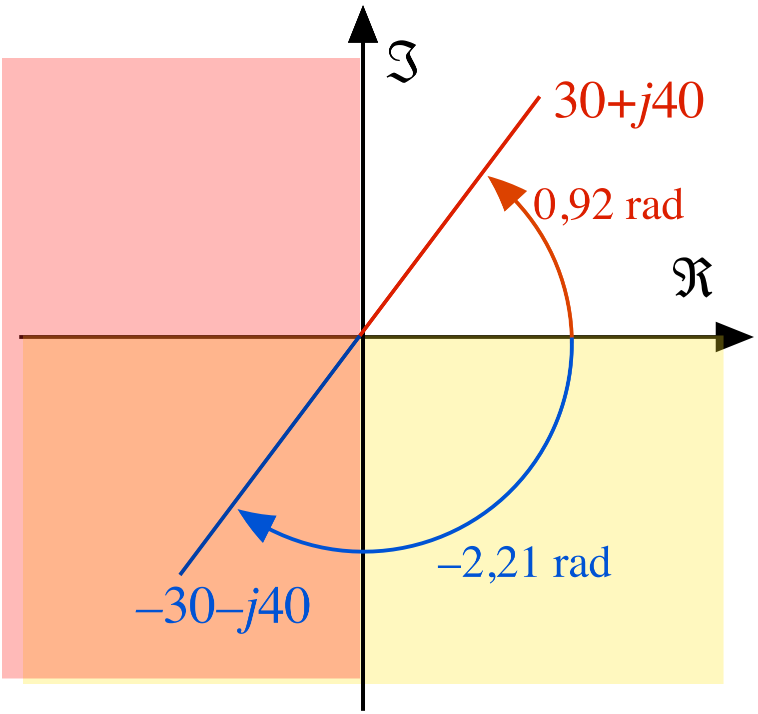
argomento $\alpha = arctan\dfrac{A_{\Im}}{A_{\Re}} + i\pi$

n.b.: $i\pi$ è necessario per garantire ad α tutto il suo dominio: $-\pi \le \alpha \le +\pi$

Esempio di conversione di numero complesso

Per scrivere in forma polare il numero complesso $-30-j40$

Si calcola il modulo come: $\sqrt{(-30)^2+(-40)^2}=50$



Ma l'argomento non si ottiene dall'arcotangente di $(-40)/(-30) = tan\ \alpha$ che fornirebbe $\alpha \cong 0{,}92\ \text{rad}\ \ (\cong 52°)$, ossia l'argomento di $30+j40$ che è posto nel primo quadrante, ove le due parti sono positive.

Il risultato giusto è invece

$\alpha \cong 0{,}92-\pi \cong -2{,}21\ \text{rad}\ \ (\cong -127°)$

posto nel terzo quadrante, ove le due parti sono negative

Formula di Eulero

$$e^{jx} = cos\,x + j\,sin\,x$$

Argomenti notevoli:

$$se\ \ x = 0 \qquad \rightarrow \qquad e^{j0} = cos\,0 + j\,sin\,0 = 1 \qquad \rightarrow \qquad e^{j0} = 1$$

$$se\ \ x = \frac{\pi}{2} \qquad \rightarrow \qquad e^{j\frac{\pi}{2}} = cos\frac{\pi}{2} + j\,sin\frac{\pi}{2} = j \qquad \rightarrow \qquad e^{j\frac{\pi}{2}} = j$$

$$se\ \ x = -\frac{\pi}{2} \qquad \rightarrow \qquad e^{-j\frac{\pi}{2}} = cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j\,sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -j \qquad \rightarrow \qquad e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$$

$$se\ \ x = \pi \qquad \rightarrow \qquad e^{j\pi} = cos\,\pi + j\,sin\,\pi = -1 \qquad \rightarrow \qquad e^{j\pi} = -1$$

n.b.: l'ultima si riscrive in un modo celebre, $e^{j\pi}+1 = 0$, che riunisce i numeri più importanti della matematica

Altre operazioni sui fasori

Prodotto tra fasori → non fornisce un fasore:

$$\bar{A}\bar{B} = A\,e^{j\,\alpha}\,B\,e^{j\,\beta} = A\,B\,e^{j(\alpha+\beta)} = P e^{j\,\gamma} = \dot{P}$$

Rapporto tra fasori → non fornisce un fasore, ma un operatore complesso

$$\frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \frac{A\,e^{j\,\alpha}}{B\,e^{j\,\beta}} = \frac{A}{B}\,e^{j(\alpha-\beta)} = R e^{j\,\rho} = \dot{R}$$

Prodotto tra fasore e operatore → fornisce un fasore $\dot{R}\,\bar{B} = \bar{A}$

Complesso coniugato: $\bar{A}^{*} = A e^{j(-\alpha)} = A_{\Re} - j A_{\Im}$

$$\left(\bar{A}+\bar{B}\right)^{*} = \bar{A}^{*} + \bar{B}^{*} \qquad \left(\bar{A}-\bar{B}\right)^{*} = \bar{A}^{*} - \bar{B}^{*}$$

$$\left(\bar{A}\bar{B}\right)^{*} = \bar{A}^{*}\,\bar{B}^{*} \qquad \left(\frac{\bar{A}}{\bar{B}}\right)^{*} = \frac{\bar{A}^{*}}{\bar{B}^{*}}$$

Prodotto per coniugato: $\bar{A}\,\bar{A}^{*} = A\,e^{j\,\alpha}\,A\,e^{j\,(-\alpha)} = A\,A\,e^{j(\alpha-\alpha)} = A^{2}$

Uso della trasformata fasoriale

Le operazioni che abbiamo individuato ci permettono di svolgere l'analisi delle reti in regime sinusoidale, che richiede:

- **Somme algebriche** (nelle equazioni topologiche KLT e LKC)
- **Prodotti per scalari** (per numeri reali, nelle equazioni tipologiche di bipoli e doppi bipoli adinamici)
- **Derivazioni temporali** (nelle equazioni tipologiche di bipoli e doppi bipoli dinamici)

Pertanto utilizzando i fasori ed il metodo simbolico esse si compattano come richiamato di seguito, sia nell'espressione che nella complessità di calcolo

Somma

Sinusoidi

$$a(\mathrm{t}) = A_{\mathrm{M}}\,\mathrm{sen}(\omega \mathrm{t} + \alpha)$$

$$b(\mathrm{t}) = B_{\mathrm{M}}\,\mathrm{sen}(\omega \mathrm{t} + \beta)$$

$$a(\mathrm{t}) + b(\mathrm{t}) = c(\mathrm{t}) = C_{\mathrm{M}}\,\mathrm{sen}(\omega \mathrm{t} + \gamma)$$

$$\begin{cases} C_{\mathrm{M}}\cos\gamma = A_{\mathrm{M}}\cos\alpha + B_{\mathrm{M}}\cos\beta \\ C_{\mathrm{M}}\,\mathrm{sen}\gamma = A_{\mathrm{M}}\,\mathrm{sen}\alpha + B_{\mathrm{M}}\,\mathrm{sen}\beta \end{cases}$$

Fasori

$$\bar{A} = A_{\Re} + jA_{\Im}$$

$$\bar{B} = B_{\Re} + jB_{\Im}$$

$$\bar{A} + \bar{B} = \bar{C} = C_{\Re} + jC_{\Im}$$

$$\begin{cases} C_{\Re} = A_{\Re} + B_{\Re} \\ C_{\Im} = A_{\Im} + B_{\Im} \end{cases}$$

Prodotto per scalare

Sinusoidi

$$a(t) = A_M \, sen(\omega t + \alpha)$$

$$k\, a(t) = C_M \, sen(\omega t + \gamma)$$

$$\begin{cases} C_M = |k|\, A_M \\ \gamma = \begin{cases} \alpha & se \quad k > 0 \\ \alpha \pm \pi & se \quad k < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Fasori

$$\overline{A} = A\, e^{j\alpha}$$

$$k\, \overline{A} = \overline{C} = C\, e^{j\gamma}$$

$$\begin{cases} C = |k|\, A \\ \gamma = \begin{cases} \alpha & se \quad k > 0 \\ \alpha \pm \pi & se \quad k < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Derivata temporale

Sinusoidi

$$a(t) = A_M \, sen(\omega t + \alpha)$$

$$\frac{d}{dt} a(t) = \mathrm{C}_M \, sen(\omega t + \gamma)$$

$$\begin{cases} \mathrm{C}_M = \omega \, A_M \\ \gamma = \alpha + \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Fasori

$$\overline{A} = A \, e^{j\alpha}$$

$$j\omega \, \overline{A} = \overline{C} = C \, e^{j\gamma}$$

$$\begin{cases} C = \omega \, A \\ \gamma = \alpha + \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Analisi tramite il metodo fasoriale

Dato che le operazioni sui fasori sono più veloci e compatte di quelle sulle sinusoidi … conviene:

- passare dalle sinusoidi note ai loro fasori rappresentativi applicando la trasformata di Steinmetz
- fare i calcoli su tali fasori per trovare i fasori delle sinusoidi incognite
- una volta trovati tali fasori, anti-trasformarli per ottenere le sinusoidi inizialmente incognite che essi rappresentano

Ma ci sono anche altri vantaggi …

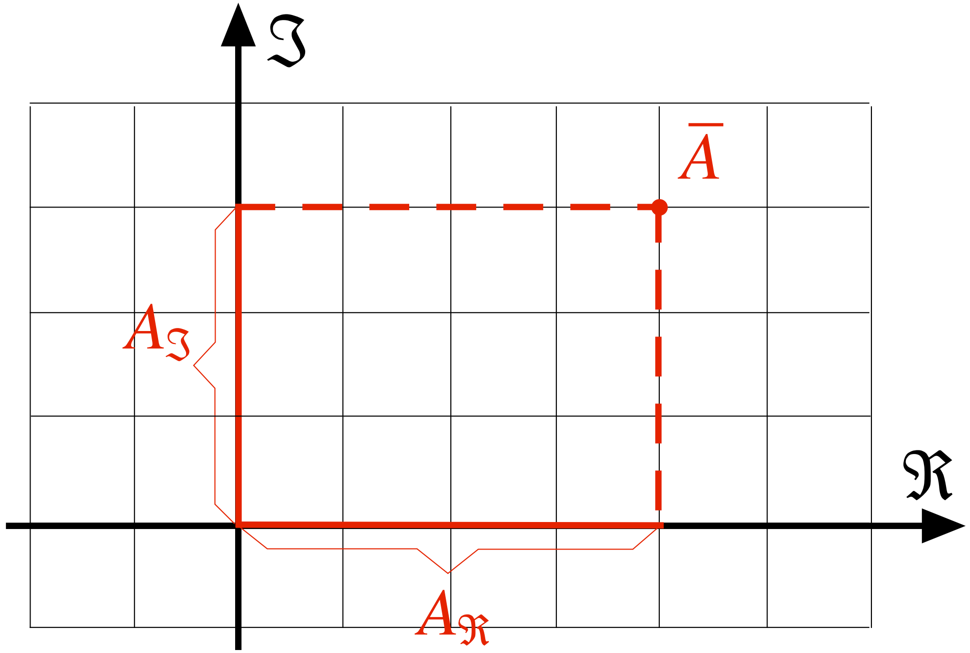
anzitutto un'efficace rappresentazione grafica …

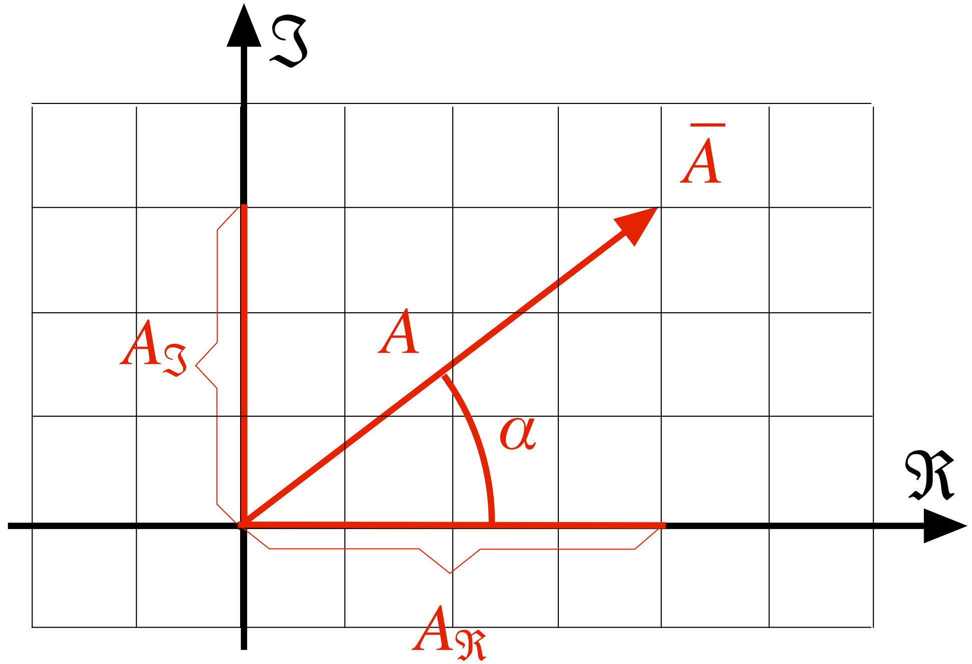
Rappresentazione grafica

I fasori sono rappresentabili graficamente nel piano di Gauss:

- piuttosto che come punti fissi
- si rappresentano come segmenti orientati, che contengono tutte le informazioni dei fasori stessi

$$\bar{A} = 4 + j\,3$$

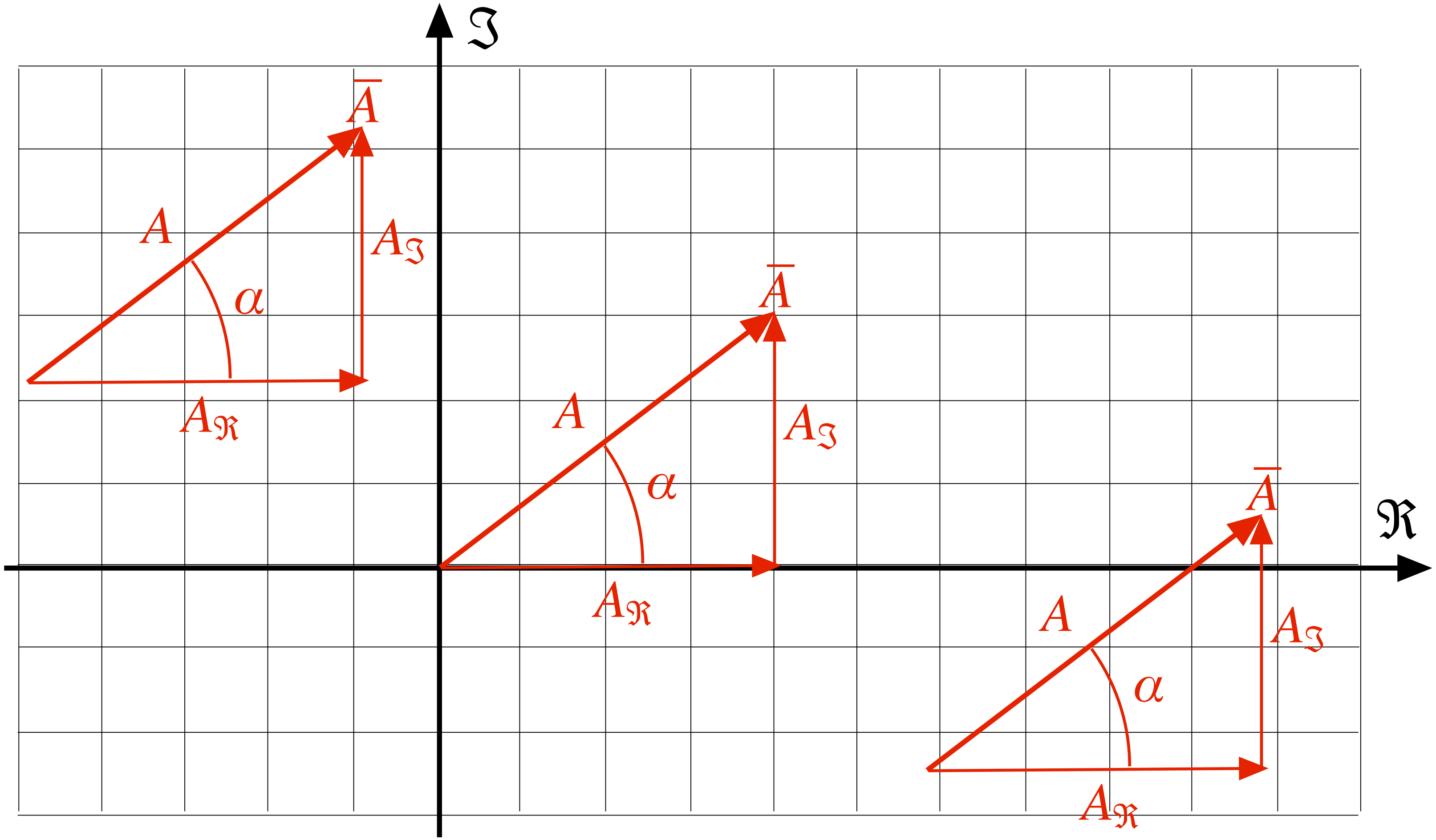




Rappresentazione grafica

Tali segmenti orientati sono traslabili rigidamente senza perdita di informazione

$$\overline{A} = 4 + j\,3$$



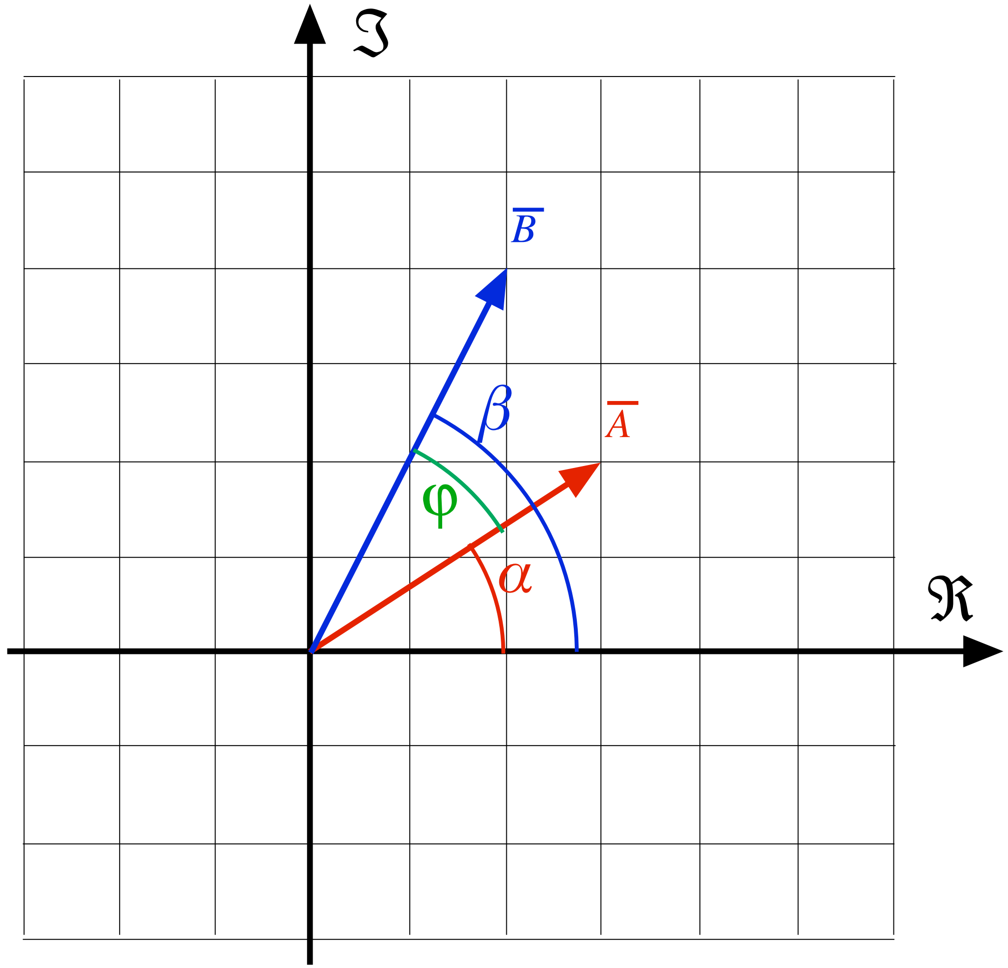
Rappresentazione grafica

Angolazione di un fasore = **fase iniziale** della sinusoide
Angolazione tra due fasori = **sfasamento** tra le due sinusoidi

$$\overline{A} = 3 + j\,2$$
$$\overline{B} = 2 + j\,4$$

qui $\overline{A}$ è in ritardo su $\overline{B}$:
$(\varphi = \alpha - \beta < 0)$

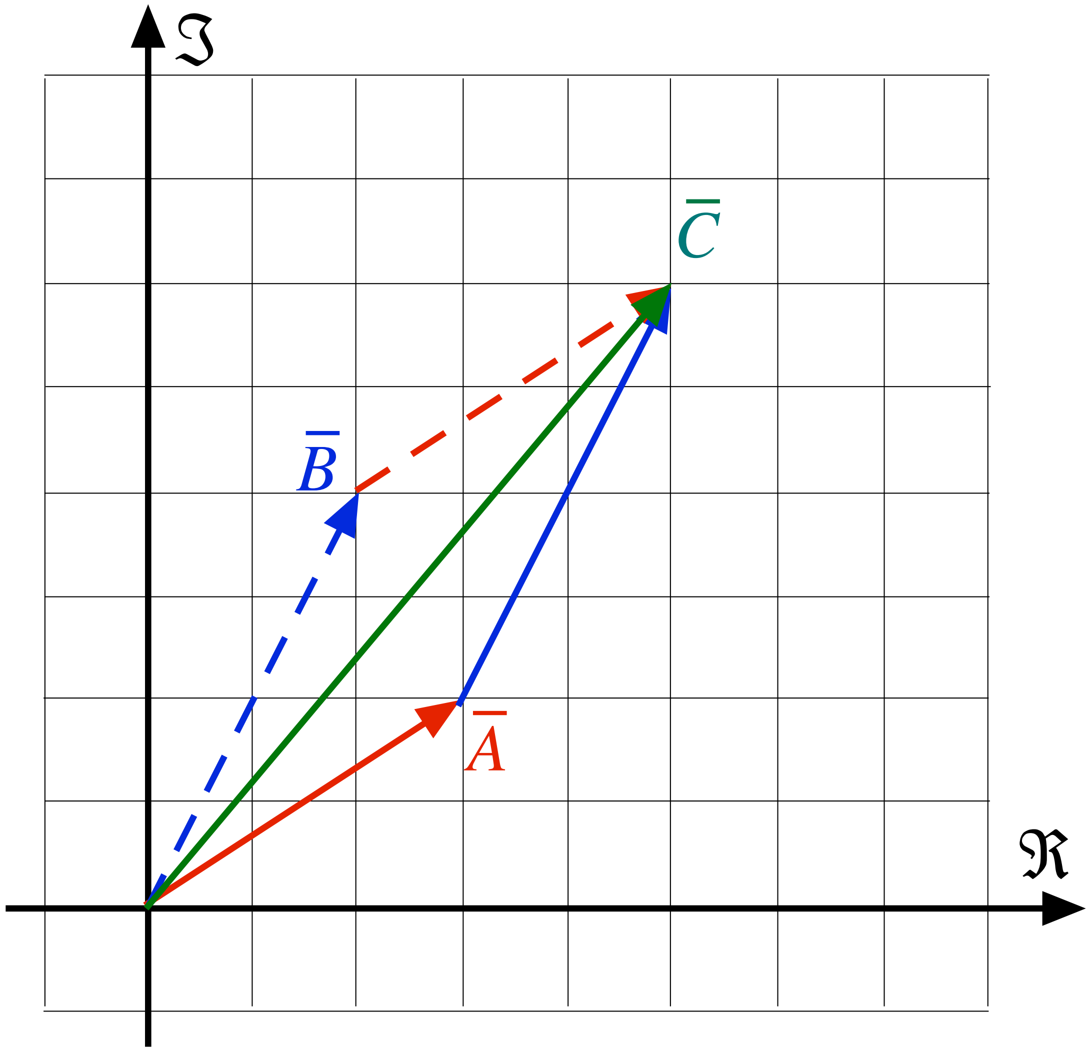
n.b.: fasi iniziali positive e sfasamenti positivi corrispondono a rotazioni antiorarie



Rappresentazione grafica

SOMMA

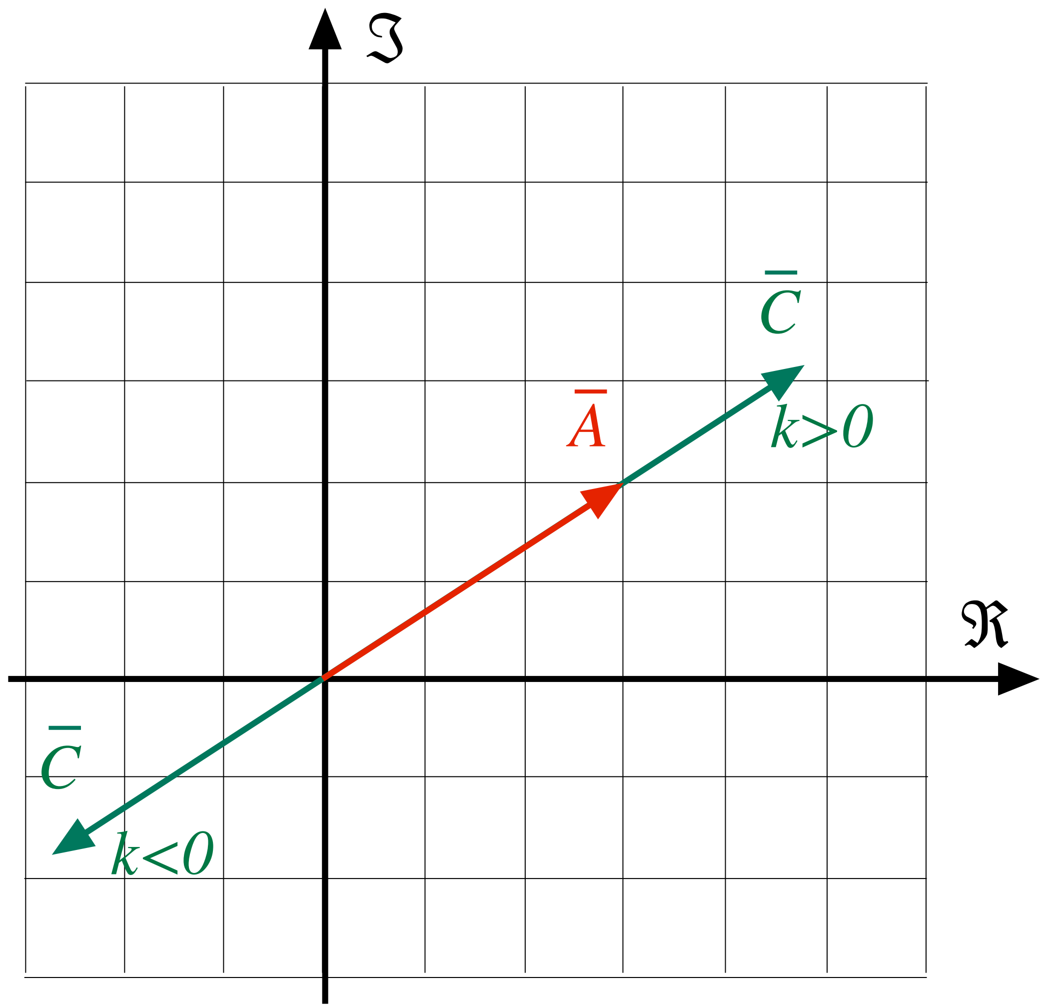
La somma in forma grafica si effettua con la regola del parallelogramma (come i vettori)



Rappresentazione grafica

PRODOTTO PER SCALARE *k*

La direzione è uguale o opposta a quella di A a seconda che $k>0$ o $k<0$



Rappresentazione grafica

PRODOTTO PER $j\omega$

L'angolazione aumenta di $\pi/2$ = rotazione antioraria, anticipo

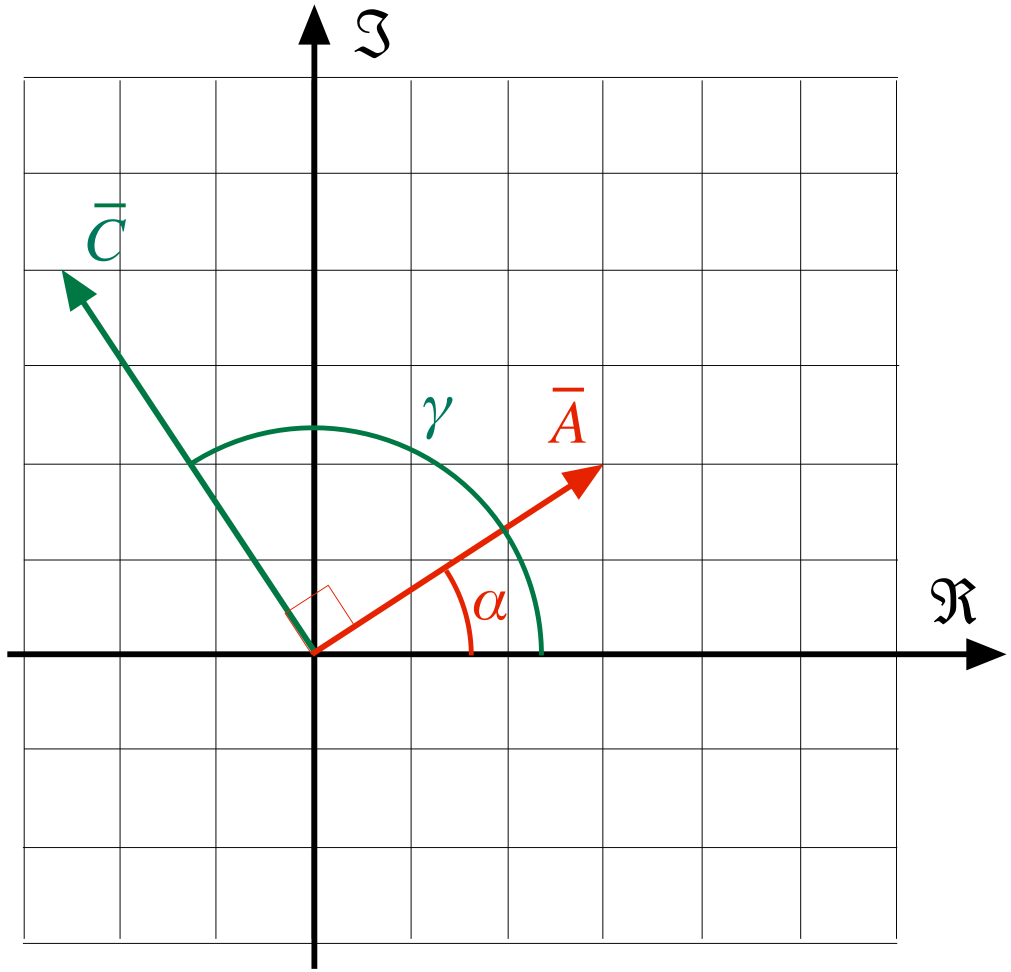


Diagramma fasoriale

È la rappresentazione grafica di più fasori di tensione e/o corrente insieme:

- le relazioni angolari di tutti i fasori (che sono tutte tra loro omogenee essendo misurate in radianti) vanno rispettate;
- i fasori di tensione devono rispettare una stessa scala metrica delle tensioni (ad es. 100 V per 1 cm);
- i fasori di corrente devono rispettare una stessa scala metrica delle correnti (ad es. 1 A per 1 cm).

Uso del diagramma fasoriale

La rappresentazione grafica dei fasori permette quindi di visualizzare le relazioni di fase e le operazioni necessarie all'analisi delle reti

- in generale non permette di eseguire analisi quantitative molto precise (la precisione è limitata dall'accuratezza del disegno)
- Però permette un'efficace visualizzazione delle grandezze fasoriali e delle loro relazioni
- in generale costituisce un'utile verifica dei calcoli eseguiti sui fasori numericamente
- talvolta consente da sola l'analisi in forma grafica, se i calcoli da eseguire sono semplici

Sintesi del metodo fasoriale

INGRESSI ——> **ANALISI** ————> **USCITE**

sinusoidi $x(t)$ —> operazioni nel dominio del tempo $\Sigma a(t)$, $k\,a(t)$, $\frac{d}{dt}a(t)$ —> sinusoidi $y(t)$

S (da $x(t)$ a $\bar{X}$) $\qquad$ S^{-1} (da $\bar{Y}$ a $y(t)$)

fasori $\bar{X}$ —> operazioni in campo complesso $\Sigma\,\bar{A}$, $k\,\bar{A}$, $j\omega\bar{A}$ —> fasori $\bar{Y}$