Università di Padova - Scuola di Ingegneria

Massimo Guarnieri

Elettrotecnica

Capitolo 16
Reti in regime sinusoidale

Reti in regime sinusoidale

In una rete in regime sinusoidale tutte le tensioni e tutte le correnti, siano esse impresse (ingressi) o incognite (uscite), sono sinusoidi isofrequenziali e come tali presentano la stessa pulsazione ω (che si assume nota):

$$v(t) = V_M \, sen(\omega t + \alpha)$$

$$i(t) = I_M \, sen(\omega t + \beta)$$

Ciascuna di queste grandezze è individuata dalla sua ampiezza V_M, I_M e fase iniziale α, β. A ciascuna è associabile un fasore con modulo uguale al valore efficace e argomento uguale alla fase iniziale

$$\bar{V} = V \, e^{j\alpha}$$

$$\bar{I} = I \, e^{j\beta}$$

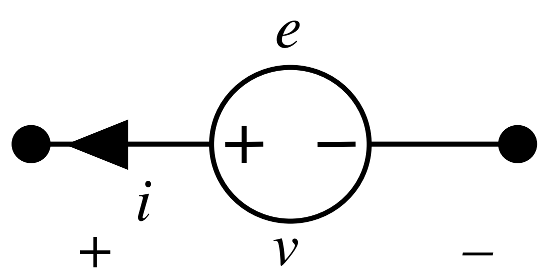
Generatori ideali in regime sinusoidale

Generatore ideale di tensione sinusoidale:

$v(t) = e(t) = E_M\, sen(\omega t + \alpha) \qquad \forall i_e(t)$

$e(t)$ = tensione impressa, ingresso

regime sinusoidale: $i_e(t)$ = sinusoide incognita

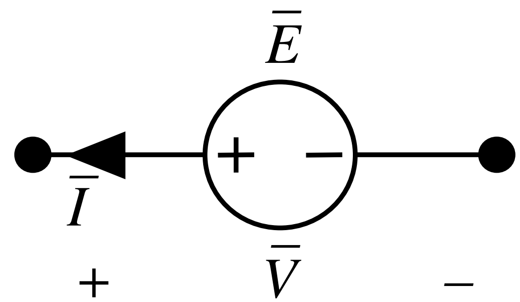


Generatore ideale di tensione simbolica - GITS:

fasori

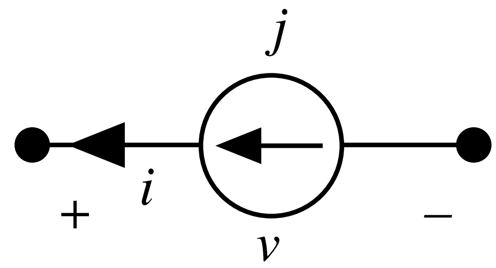
$\bar{E} = E\, e^{j\alpha}$ tensione impressa (ingresso)

$\bar{I}_e = I_e\, e^{j\beta}$ corrente incognita (uscita)



Generatori ideali in regime sinusoidale

Generatore ideale di corrente sinusoidale:

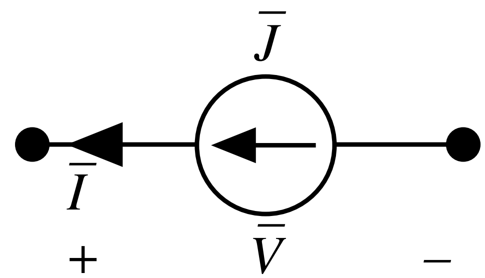


$i(t) = j(t) = J_M \, sen(\omega t + \beta) \qquad \forall v_j(t)$

$j(t)$ = corrente impressa, ingresso

regime sinusoidale: $v_j(t)$ = sinusoide incognita

Generatore ideale di corrente simbolica - GICS:



fasori

$\bar{J} = J\, e^{j\beta}$ corrente impressa (ingresso)

$\bar{V}_j = V_j \, e^{j\alpha}$ tensione incognita (uscita)

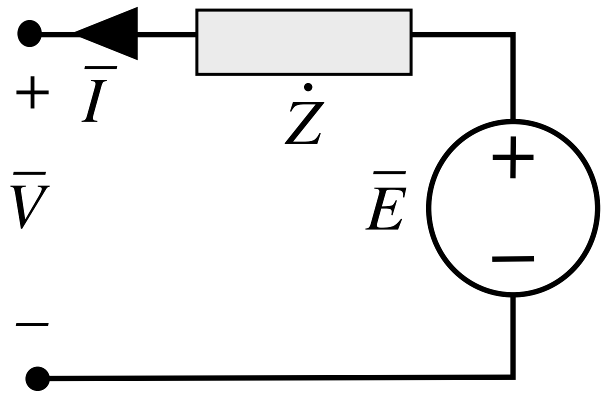
Generatori affini simbolici

Generatore affine di tensione simbolica – GATS

convenzionato da generatore: $\bar{V} = \bar{E} - \dot{Z}\,\bar{I}$

casi limite:

- $\dot{Z} = 0$ → GITS
- $\bar{E} = 0$ → impedenza

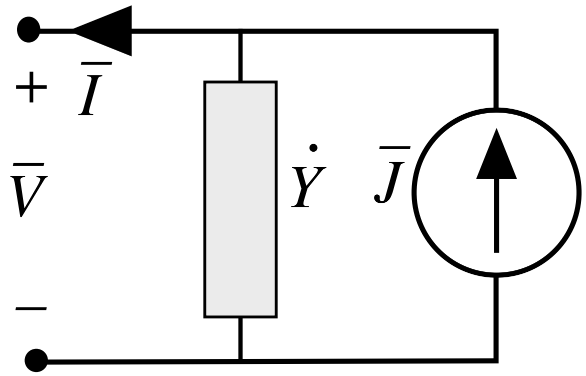


Generatore affine di corrente simbolica – GACS

convenzionato da generatore: $\bar{I} = \bar{J} - \dot{Y}\,\bar{V}$

casi limite:

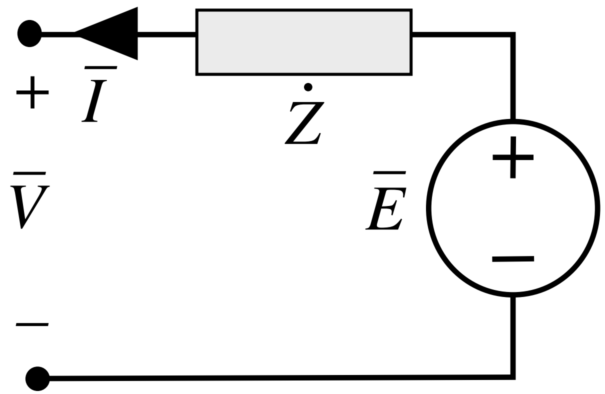
- $\dot{Y} = 0$ → GICS
- $\bar{J} = 0$ → ammettenza

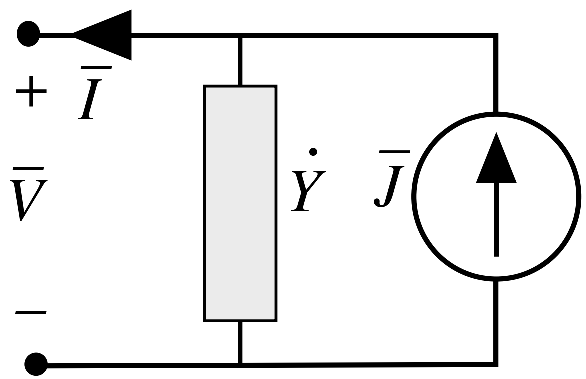


Generatori affini simbolici

Trasformazioni tra GATS e GACS

$$\begin{cases} \bar{J} = \dfrac{\bar{E}}{\dot{Z}} \\ \dot{Y} = \dfrac{1}{\dot{Z}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{E} = \dfrac{\bar{J}}{\dot{Y}} \\ \dot{Z} = \dfrac{1}{\dot{Y}} \end{cases}$$





Salvo che $\dot{Z} = 0$ e $\dot{Y} = 0$

n.b.: cambiando i riferimenti possono comparire dei meno (–), come nel caso dei GAT e GAC adinamici

Equazioni di rete

relazioni	Rete simbolica (reg. sinusoidale)
LKC (*n*–1 equazioni)	$\sum \pm \bar{I} = 0$
LKT (*m* equazioni)	$\sum \pm \bar{V} = 0$
Bipolo passivo	$\bar{V} = \dot{Z}\bar{I} \quad \bar{I} = \dot{Y}\bar{V}$
Gen. ideale di tensione	$\bar{V} = \bar{E}$
Gen. ideale di corrente	$\bar{I} = \bar{J}$
Gen. affine di tensione	$\bar{V} = \bar{E} - \dot{Z}\bar{I}$
Gen. affine di corrente	$\bar{I} = \bar{J} - \dot{Y}\bar{V}$

Equazioni di rete

relazioni	Rete simbolica (reg. sinusoidale)	Rete adinamica lineare (reg. stazionario)
LKC (n–1 equazioni)	$\sum \pm \bar{I} = 0$	$\Sigma \pm I = 0$
LKT (m equazioni)	$\sum \pm \bar{V} = 0$	$\Sigma \pm V = 0$
Bipolo passivo	$\bar{V} = \dot{Z}\bar{I} \quad \bar{I} = \dot{Y}\bar{V}$	$V = R\,I\,,\; I = G\,V$
Gen. ideale di tensione	$\bar{V} = \bar{E}$	$V = E$
Gen. ideale di corrente	$\bar{I} = \bar{J}$	$I = J$
Gen. affine di tensione	$\bar{V} = \bar{E} - \dot{Z}\,\bar{I}$	$V = E - R\,I$
Gen. affine di corrente	$\bar{I} = \bar{J} - \dot{Y}\,\bar{V}$	$I = J - G\,V$

Proprietà della rete simbolica

- La rete simbolica è lineare in campo complesso = retta da un sistema di equazioni complesse algebriche lineari.
- L'algebra complessa lineare ha proprietà matematiche analoghe a quelle dell'algebra reale lineare che governa le reti adinamiche lineari

→ Procedendo come fatto per le reti adinamiche lineari, si deducono molte proprietà analoghe delle reti simboliche. In particolare:

- metodi di analisi
- teoremi

Metodo delle correnti d'anello simboliche

Per reti piane. Richiede che i lati si presentino come in GATS (eventualmente per trasformazione di GACS in GATS*) – applicato a *m* anelli:

$$\dot{Z}_{A_{rr}} \bar{K}_r + \sum_s \dot{Z}_{A_{rs}} \bar{K}_s = \bar{E}_{A_r} \qquad r = 1 \ldots m$$

$\dot{Z}_{A_{rr}}$ = autoimpedenza dell'anello r-esimo
(somma delle impedenze dei lati dell'anello)

$\dot{Z}_{A_{rs}}$ = mutua impedenza tra gli anelli r-esimo e s-esimo
(opposto della somma delle impedenze dei lati comuni ai due anelli)

$\bar{E}_{A_r}$ = tensione impressa simbolica d'anello r-esimo
(somma algebrica delle tensioni impresse simboliche dei lati dell'anello)

* se sono presenti lati di soli GICS, si applica il metodo delle correnti d'anello simboliche modificato, analogo a quello delle reti adinamiche

Metodo dei potenziali nodali simbolici

Per reti piane. Richiede che i lati si presentino come in GACS (eventualmente per trasformazione di GATS in GACS*) – applicato a *n*–1 nodi:

$$\dot{Y}_{N_{rr}} \bar{U}_r + \sum_s \dot{Y}_{N_{rs}} \bar{U}_s = \bar{J}_{N_r} \qquad r = 1 \ldots n-1$$

$\dot{Y}_{N_{rr}}$ = autoammettenza del nodo r-esimo
(somma delle ammetteze dei lati che si appoggiano al nodo)

$\dot{Y}_{N_{rs}}$ = mutua ammettenza tra i nodi r-esimo e s-esimo
(opposto della somma delle ammettenze dei lati che si appoggiano ai due anelli)

$\bar{J}_{N_r}$ = corrente impressa simbolica del nodo r-esimo
(somma algebrica delle correnti impresse simboliche che si appoggianio al nodo)

* se sono presenti lati di soli GITS, si applica il metodo dei potenziali nodali simbolici modificato, analogo a quello delle reti adinamiche

Sovrapposizione degli effetti

Ingressi = cause = tensioni impresse e correnti impresse simboliche, indipendenti dalla configurazione della rete

Uscite = effetti = tensioni e correnti simboliche dei lati, dipendenti dalla configurazione della rete. Si calcolano come combinazioni lineari degli ingressi. Per il generico lato *h*-esimo:

$$\begin{cases} \bar{V}_h = \sum_{k=1}^{r} \dot{H}_{V_{hk}} \bar{E}_k + \sum_{k=s}^{\ell} \dot{H}_{Z_{hk}} \bar{J}_k \\ \bar{I}_h = \sum_{k=1}^{r} \dot{H}_{Y_{hk}} \bar{E}_k + \sum_{k=s}^{\ell} \dot{H}_{I_{hk}} \bar{J}_k \end{cases}$$

Coefficienti di proporzionalità complessi = coefficienti di rete simbolici

n.b.: non vale la sovrapposizione delle potenze.

Sovrapposizione degli effetti

Coefficienti di rete simbolici:

$$
\begin{cases}
\dot{H}_{V_{hk}} \triangleq \left.\dfrac{\bar{V}_h}{\bar{E}_k}\right|_{\substack{\bar{E}_p=0\ p\neq k \\ \bar{J}_q=0\ \forall q}} & \dot{H}_{Z_{hk}} \triangleq \left.\dfrac{\bar{V}_h}{\bar{J}_k}\right|_{\substack{\bar{E}_p=0\ \forall p \\ \bar{J}_q=0\ q\neq k}} \\[2em]
\dot{H}_{Y_{hk}} \triangleq \left.\dfrac{\bar{I}_h}{\bar{E}_k}\right|_{\substack{\bar{E}_p=0\ p\neq k \\ \bar{J}_q=0\ \forall q}} & \dot{H}_{I_{hk}} \triangleq \left.\dfrac{\bar{I}_h}{\bar{J}_k}\right|_{\substack{\bar{E}_p=0\ \forall p \\ \bar{J}_q=0\ q\neq k}}
\end{cases}
$$

Sono operatori complessi che dipendono dalla rete inerte = delle impedenze, delle ammettenze e delle loro connessioni

Sovrapposizione degli effetti

Coefficienti di rete simbolici :
in quanto rapporti tra **effetti (uscite)** e **cause (ingressi)** sono

FUNZIONI DI TRASFERIMENTO

Le troviamo qui relativamente al regime sinusoidale, sono numeri complessi che dipendono da

$$R \qquad jX_L = j\omega L \qquad jB_C = j\omega C$$

quindi sono funzioni complesse della variabile immaginaria $j\omega$:

$$\dot{H}(j\omega)$$

→ il nome «funzioni» assume significato matematico proprio

Teorema di reciprocità simbolico

Stabilisce le seguenti uguaglianze tra i coefficiente di rete simbolici:

$$\begin{cases} \dot{H}_{Z_{hk}} = \dot{H}_{Z_{kh}} \\ \dot{H}_{Y_{hk}} = \dot{H}_{Y_{kh}} \\ \dot{H}_{V_{hk}} = -\dot{H}_{I_{hk}} \end{cases}$$

Vale sempre per le reti simboliche di soli bipoli

Teoremi generali

Teorema di sostituzione

Se la rete simbolica non presenta singolarità (soluzioni indeterminate o impossibili) il teorema è applicabile

Teoremi di non amplificazione

valgono sempre, purché applicati ai valori istantanei (va verificato istante per istante che un solo bipolo eroghi potenza e tutti gli altri la assorbano).

Non si applicano ai fasori, che non danno indicazioni istantanee e non ammettono valutazioni comparative (di maggiore o minore).

Formule di Millmann simboliche

Come per le reti adinamiche

ℓ **bipoli affini simbolici in serie** (espressi tutti come GATS) equivalgono ad un GATS avente:

$$\bar{E}_{eq} = \sum_h \pm \bar{E}_h \qquad \dot{Z}_{eq} = \sum_h \dot{Z}_h$$

e ad un GACS avente:

$$\bar{J}_{eq} = \frac{\bar{E}_{eq}}{\dot{Z}_{eq}} = \frac{\sum_h \pm \bar{E}_h}{\sum_h \dot{Z}_h} \qquad \dot{Y}_{eq} = \frac{1}{\dot{Z}_{eq}} = \frac{1}{\sum_h \dot{Z}_h}$$

Formule di Millmann simboliche

Come per le reti adinamiche

ℓ bipoli affini simbolici in parallelo (espressi tutti come GACS) equivalgono ad un GACS avente:

$$\bar{J}_{eq} = \sum_h \pm \bar{J}_h \qquad \dot{Y}_{eq} = \sum_h \dot{Y}_h$$

e ad un GATS avente:

$$\bar{E}_{eq} = \frac{\bar{J}_{eq}}{\dot{Y}_{eq}} = \frac{\sum_h \pm \bar{J}_h}{\sum_h \dot{Y}_h} \qquad \dot{Z}_{eq} = \frac{1}{\dot{Y}_{eq}} = \frac{1}{\sum_h \dot{Y}_h}$$

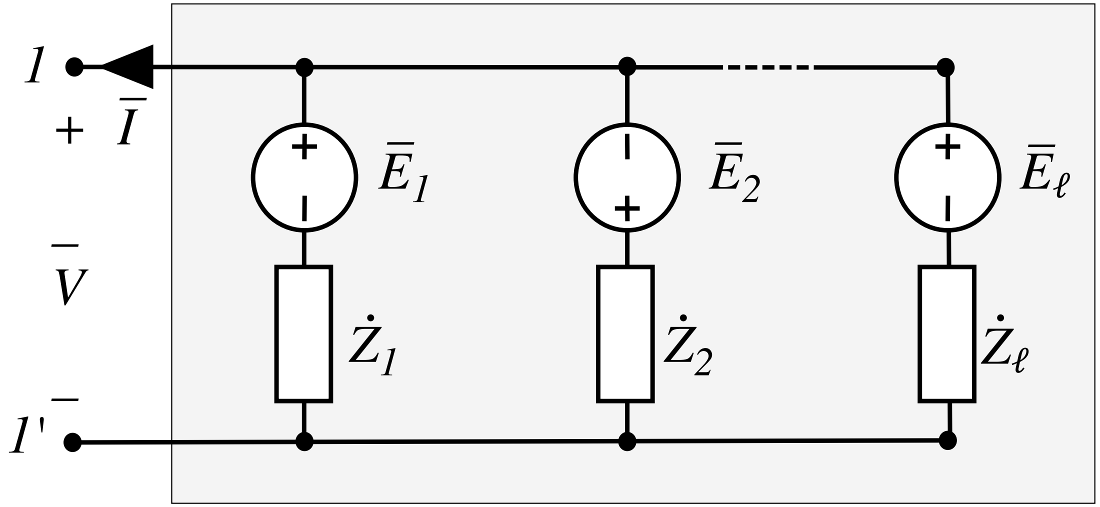
Formule di Millmann simboliche

Inoltre:

ℓ bipoli affini simbolici in parallelo espressi tutti come GATS) equivalgono ad un GATS avente:

$$\bar{E}_{eq} = \frac{\sum_h \pm \frac{\bar{E}_h}{\dot{Z}_h}}{\sum_h \frac{1}{\dot{Z}_h}}$$

$$\dot{Z}_{eq} = \frac{1}{\sum_h \frac{1}{\dot{Z}_h}}$$

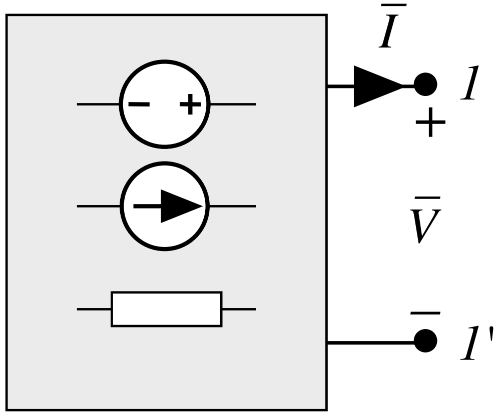


Come al solito, la tensione impressa equivalente corrisponde alla tensione vuoto della rete alla porta 1-1’

Teoremi dei generatori equivalenti simbolici

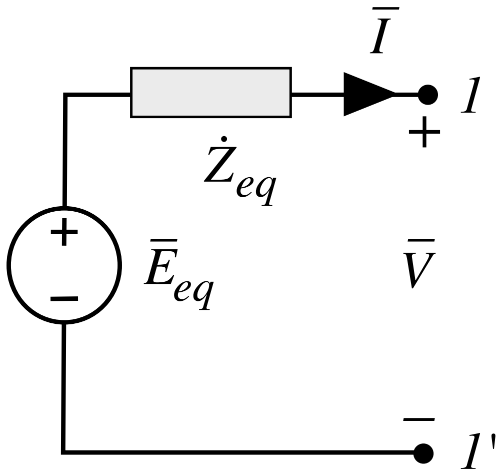
Teorema di Thévenin simbolico

se alla porta 1-1’ la rete può funzionare a vuoto, essa equivale al GATS detto generatore di Thèvenin simbolico:



$$\bar{V} = \bar{E}_{eq} - \dot{Z}_{eq}\,\bar{I}$$

$$\bar{E}_{eq} = \bar{V}_o \qquad \dot{Z}_{eq} = \dot{Z}_i = \frac{\bar{V}_o}{\bar{I}_{cc}}$$

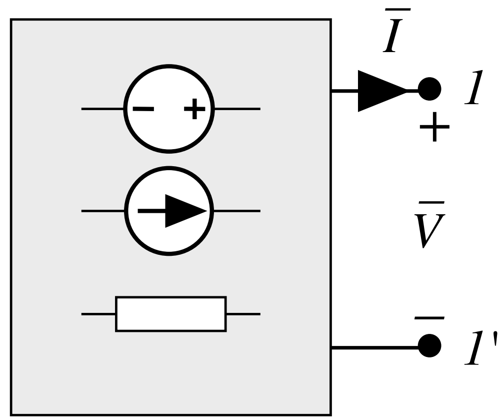


n.b.: l’ultima uguaglianza richiede che alla porta 1-1’ la rete possa funzionare anche in cortocircuito

Teoremi dei generatori equivalenti simbolici

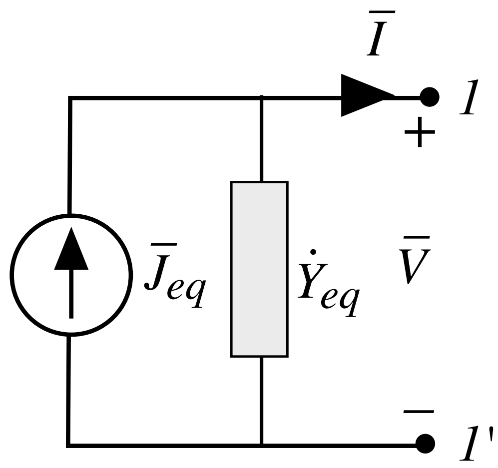
Teorema di Norton simbolico

se alla porta 1-1’ la rete può funzionare in cortocircuito, essa equivale al GACS detto generatore di Norton simbolico:



$$\bar{I} = \bar{J}_{eq} - \dot{Y}_{eq}\bar{V}$$

$$\bar{J}_{eq} = \bar{I}_{cc} \qquad \dot{Y}_{eq} = \dot{Y}_i = \frac{\bar{I}_{cc}}{\bar{V}_o}$$



n.b.: l’ultima uguaglianza richiede che alla porta 1-1’ la rete possa funzionare anche in cortocircuito

Teorema di Boucherot

Teorema di Tellegen

$$\sum v_h(t) i_h(t) = 0$$

richiede solo che tensioni e correnti rispettino le LKT a LKC del grafo e che i lati presentino la stessa convenzione delle potenze. Ovviamente si applica anche a $v_h(t)$ e $i_h(t)$ sinusoidali, compatibili con il grafo della rete.

Inoltre, dato che al grafo si applicano anche le LKTS e LKCS

$$\sum \pm \overline{I}_h = 0 \qquad \sum \pm \overline{V}_h = 0$$

Il teorema di Tellegen vale anche per tali fasori

$$\sum \overline{V}_h \, \overline{I}_h = 0$$

e più interessante però elaborarlo in altra forma ....

Teorema di Boucherot -2

Possiamo applicare la coniugazione alle equazioni della LKCS. Essendo questa distributiva rispetto alla somma si ottiene:

$$\left(\sum \pm \bar{I}_h\right)^* = 0 \quad \rightarrow \quad \sum \pm \bar{I}_h^* = 0$$

→ anche i coniugati dei fasori di corrente verificano la LKCS sullo stesso grafo

→ si può applicare Tellegen ai fasori di tensione e ai coniugati dei fasori di corrente (che verificano le LKTS e LKCS, sullo stesso grafo)

$$\sum \bar{V}_h \bar{I}_h^* = 0$$

→ Ma in questa i prodotto esprimono la potenza complessa …

Teorema di Boucherot - 3

Quindi, con tutti i bipoli convenzionati allo stesso modo, si ottiene:

$$\sum_{h=1}^{\ell} \overline{V}_h \, \overline{I}_h^* = \sum_{h=1}^{\ell} \dot{S}_h = 0$$

→ vale la conservazione delle potenze complesse.

Esprimendo le potenze complesse in parti reali e immaginarie:

$$\sum_{h=1}^{\ell} P_h = 0 \qquad\qquad \sum_{h=1}^{\ell} Q_h = 0$$

→ vale la conservazione delle potenze attive e delle potenze reattive

n.b.: non vale la conservazione delle potenze apparenti

Teorema di Boucherot - 4

Convenzionando i bipoli attivi da generatori e quelli passivi da utilizzatori, come è consuetudine, le precedenti equazioni diventano:

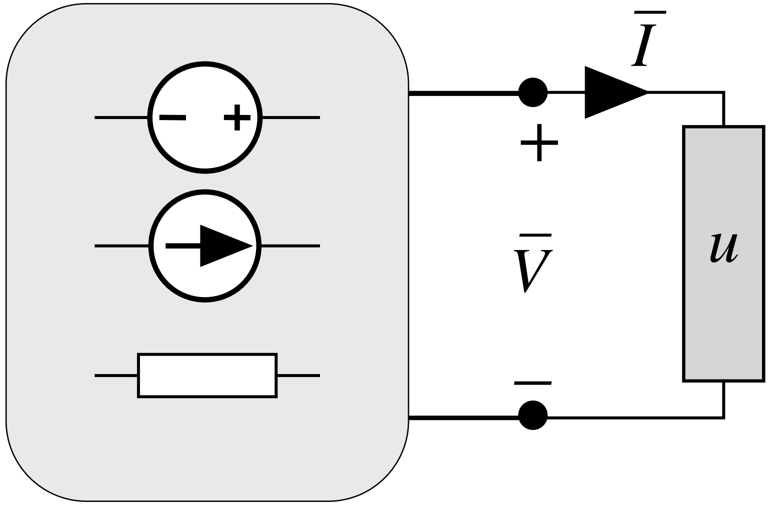
$$\sum \dot{S}_g = \sum \dot{S}_u$$

$$\sum P_g = \sum P_u$$

$$\sum Q_g = \sum Q_u$$

Teorema del massimo trasferimento di potenza attiva

La massima potenza attiva erogabile da un bipolo attivo (rappresentabile come GATS = serie di $\bar{E}$ e $\dot{Z}_i$) è:



$$P_{max} = \frac{E^2}{4\,\Re e\left(\dot{Z}_i\right)}$$

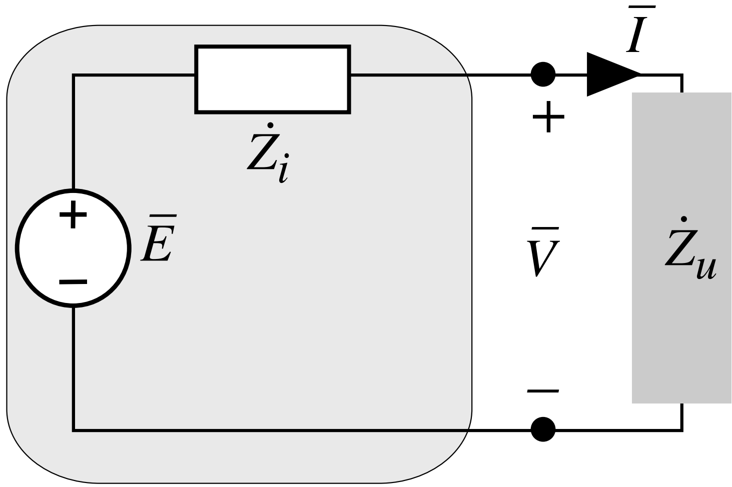
e si ottiene quando l'impedenza del carico è:

$$\dot{Z}_{u_{mt}} = \dot{Z}_i^*$$

Teorema del massimo trasferimento di potenza attiva - 2

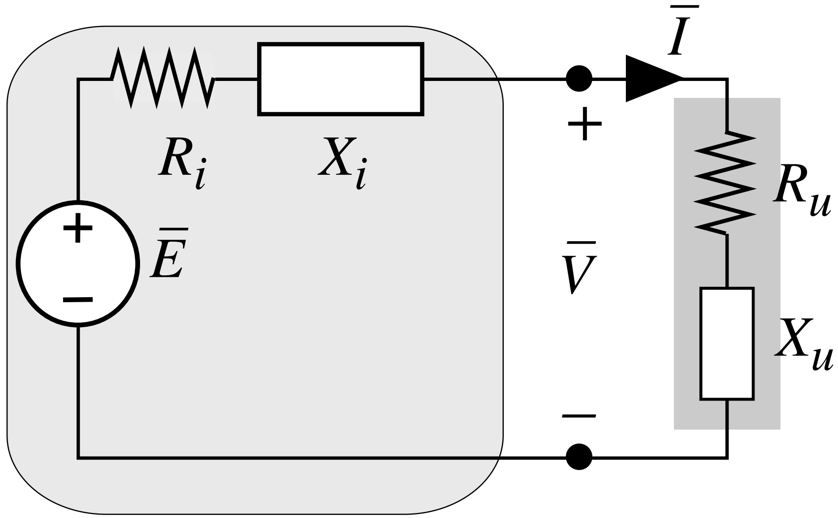
Dimostrazione. Corrente d'anello:

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\dot{Z}_i + \dot{Z}_u}$$



Potenza complessa uscente:
(con sintesi serie delle due impedenze):

$$\dot{S} = \dot{Z}_u I^2 = \frac{\left(R_u + j X_u\right) E^2}{\left(R_i + R_u\right)^2 + \left(X_i + X_u\right)^2}$$



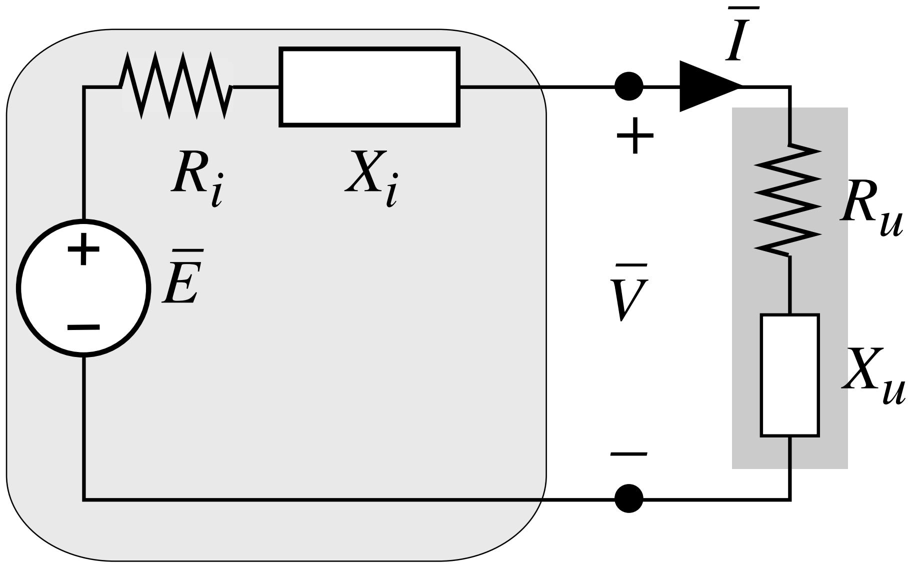
Potenza attiva erogata:

$$P = \Re e\left[\dot{S}\right] = \frac{R_u E^2}{\left(R_i + R_u\right)^2 + \left(X_i + X_u\right)^2}$$

Teorema del massimo trasferimento di potenza attiva - 3

Massimo della potenza attiva erogata P=$P(R_u, X_u)$:

$$P\left(R_u, X_u\right) = \frac{R_u\ E^2}{\left(R_i + R_u\right)^2 + \left(X_i + X_u\right)^2}$$



1) $X_u = -X_i \quad \rightarrow \quad P = \dfrac{R_u\ E^2}{\left(R_i + R_u\right)^2}$

2) $R_u = R_i \quad \rightarrow \quad P_{max} = \dfrac{E^2}{4\ R_i}$

$$\rightarrow \dot{Z}_{u_{mt}} = R_i - jX_i = \dot{Z}_i^*$$