Università di Padova - Scuola di Ingegneria

Massimo Guarnieri

Elettrotecnica

Capitolo 19
Discontinuità e impulsi

Introduzione ai regimi variabili

I regimi variabili aperiodici si manifestano in varie situazioni:

- L'evoluzione con cui le reti partendo da correnti e tensioni date (spesso nulle) si portano ai regimi permanenti (siano essi stazionari o periodici)
- Con ingressi variabili nel tempo (tempo-varianti) in modo non ripetitivo
- Con elementi inerti e passivi tempo-varianti

- Se la rete inerte è **adinamica**, si applicano istante dopo istante i metodi delle reti adinamiche che abbiamo studiato in regime stazionario
- Se la rete inerte è **dinamica** servono metodi specifici, completamente diversi, che iniziamo a studiare qui

Introduzione ai regimi variabili

Studiamo il primo caso di regime variabile: l'evoluzione con cui le reti, partendo da certe correnti e tensioni, si portano ai regimi permanenti (siano essi stazionari o periodici)

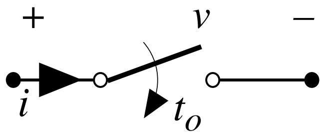
I metodi generali ricavati si applicano in gran parte anche agli altri casi di regime variabile

Tali regimi variabili sono scatenati da eventi che alterano bruscamente l'equilibrio elettrico della rete, in specifici istanti detti **istanti critici.** Studiamo anzitutto questi eventi

Eventi ed istanti critici

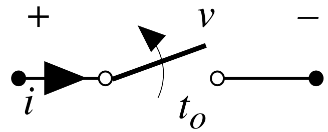
La brusca alterazione dell'equilibrio elettrico della rete può essere dovuta alla commutazione di un interruttore o alla discontinuità della tensione/corrente impressa da un generatore. Esempi:

$$\begin{cases} i = 0 & t < t_o \\ v = 0 & t > t_o \end{cases}$$



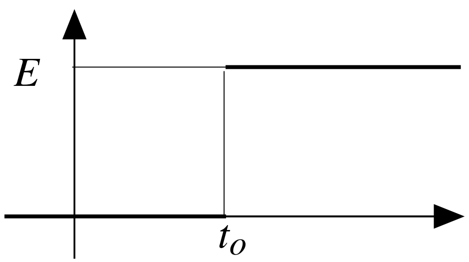
interruttore ideale in chiusura

$$\begin{cases} v = 0 & t < t_o \\ i = 0 & t > t_o \end{cases}$$

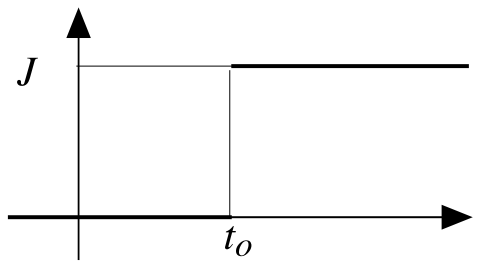


interruttore ideale in apertura

$$\begin{cases} e = 0 & t < t_o \\ e = E & t > t_o \end{cases}$$



$$\begin{cases} j = 0 & t < t_o \\ j = J & t > t_o \end{cases}$$



Questi sono **eventi critici** che avvengono nell'istante critico t_o: alterando l'equilibrio della rete, comportano la cessazione del regime preesistente e l'avvio di uno nuovo.

Eventi ed istanti critici

Significato degli istanti critici

Nelle reti reali nessuna commutazione/variazione è istantanea, ma richiede un intervallo temporale Δt_0.

Se interessa sviluppare l'analisi su un intervallo successivo Δt_1 molto più lungo, $\Delta t_1 >> \Delta t_0$, si può assumere $\Delta t_0 \cong 0$, con cui Δt_0 si riduce a t_0, tenendo però in debito conto le variazioni $\Delta v(t_o)$ e $\Delta i(t_o)$

→ t_0 è un **istante critico** e il comportamento della rete in tali istante è un **evento critico**

Discontinuità di v e i

In generale, la rete funziona prima di t_0 e quindi ha senso considerare i limiti in t_0 da sinistra, in generale non nulli (dati iniziali):

$$v(t_o^-) = \lim_{\varepsilon \to 0} v(t_o - \varepsilon) \quad , \quad i(t_o^-) = \lim_{\varepsilon \to 0} i(t_o - \varepsilon)$$

come pure gli analoghi limiti in t_0 da destra (valori iniziali):

$$v(t_o^+) = \lim_{\varepsilon \to 0} v(t_o + \varepsilon) \quad , \quad i(t_o^+) = \lim_{\varepsilon \to 0} i(t_o + \varepsilon)$$

In generale tali limiti non coincidono → si presentano **discontinuità** $\Delta v(t_o) = v(t_o^+) - v(t_o^-)$ e $\Delta i(t_o) = i(t_o^+) - i(t_o^-)$

tali funzioni sono **generalmente continue** (gli istanti critici sono in numero finito)

n.b.: è consuetudine chiamare t_0^- e t_0^+ “istanti”, benché a rigore siano due limiti.

Discontinuità delle variabili di stato

- Condensatori: v sono variabili di stato (esprimono l'energia $w_C = Cv^2/2$)
- Induttori: i sono variabili di stato (esprimono l'energia $w_L = Li^2/2$)
- DBI: i_1 e i_2 sono variabili di stato (esprimono l'energia w_L)

$\Delta v(t_o)$ e $\Delta i(t_o)$ causano $\Delta w_C(t_o)$ e $\Delta w_L(t_o)$ → potenze infinite in t_o

→ impossibile?
→ invece è possibile nella teoria delle reti, ma secondo precise condizioni
= discontinuità condizionate delle variabili di stato.

Lo studio di $\Delta v(t_o)$ di condensatori e $\Delta i(t_o)$ di induttori e DBI è fondamentale perché da essi si ottengono:

$$v(t_o^+) = v(t_o^-) + \Delta v(t_o) \qquad i(t_o^+) = i(t_o^-) + \Delta i(t_o)$$

Vettore di stato – stato zero

Tra le uscite y della rete, le tensioni di condensatori e le correnti di induttori e DBI sono uscite privilegiate, in quanto variabili di stato della rete (ne esprimono l'energia immagazzinata) e formano il vettore di stato:

$$\boldsymbol{y}_s(t) \triangleq \left[y_{s1} \; \dots \; y_{sp} \right]^{\mathrm{T}}$$

Quando tutte le variabili di stato sono nulle si dice che la **rete è nello stato nullo (zero)**. In particolare la rete può esserlo in t_0^- e/o t_0^+:

$$\boldsymbol{y}_s(t_o^-) = \boldsymbol{0} \qquad \Rightarrow \qquad \forall C \quad v(t_o^-) = 0 \quad , \quad \forall L, \boldsymbol{L} \quad i(t_o^-) = 0$$

$$\boldsymbol{y}_s(t_o^+) = \boldsymbol{0} \qquad \Rightarrow \qquad \forall C \quad v(t_o^+) = 0 \quad , \quad \forall L, \boldsymbol{L} \quad i(t_o^+) = 0$$

Rete a riposo

Quando tutte le tensioni e correnti dei lati sono nulle si dice che la **rete è a riposo**. In particolare la rete può essere a riposo in t_0^- e/o t_0^+:

$$\forall\, v(t_o^-) = 0 \quad , \quad \forall\, i(t_o^-) = 0$$

$$\forall\, v(t_o^+) = 0 \quad , \quad \forall\, i(t_o^+) = 0$$

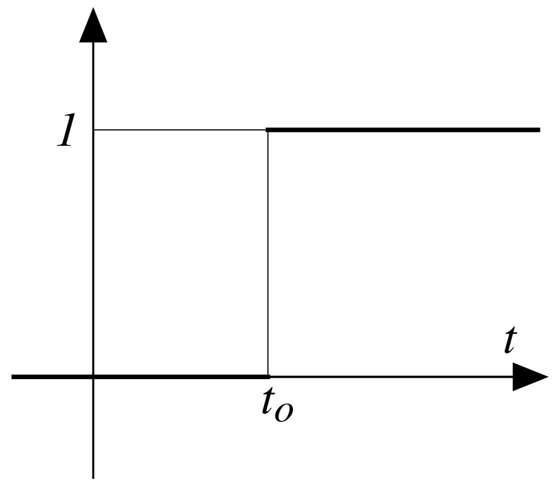
Una rete a riposo è nello stato nullo (ma non è vero il viceversa)

Funzioni impulsive (richiami)

Sono particolari enti matematici che permettono di studiare gli istanti critici. Sono dette anche **distribuzioni**.

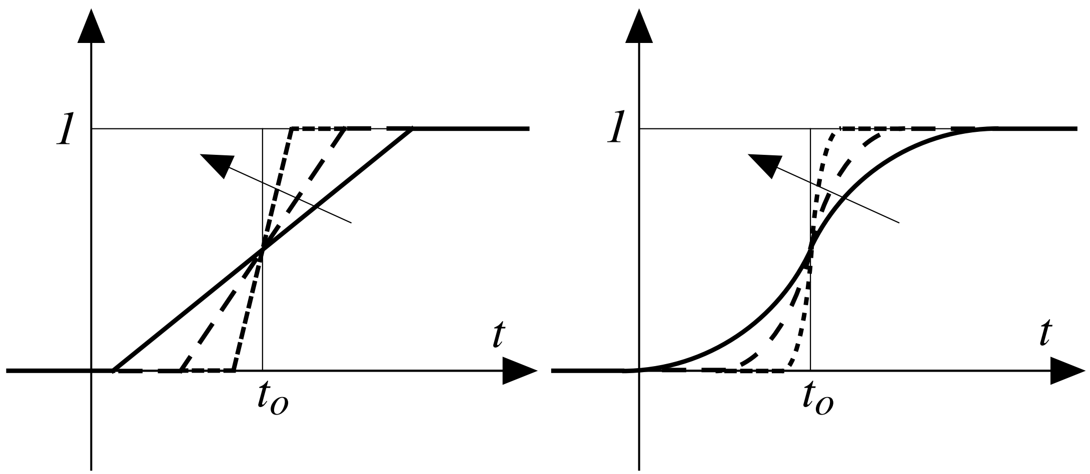
Funzione a gradino unitaria (di Heaviside):

$$\delta_{-1}(t-t_o) \triangleq \begin{cases} 0 & t < t_o \\ 1 & t > t_o \end{cases}$$



$H(t–t_o)$, $u(t–t_o)$. Si può ottenere come limite di certe successioni.

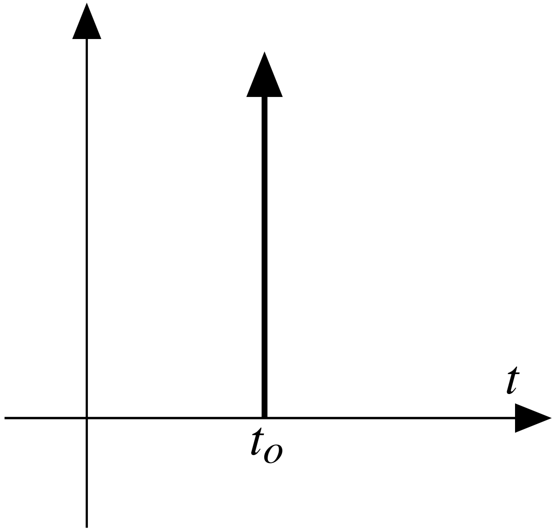
Esempi:



Funzioni impulsive (richiami)

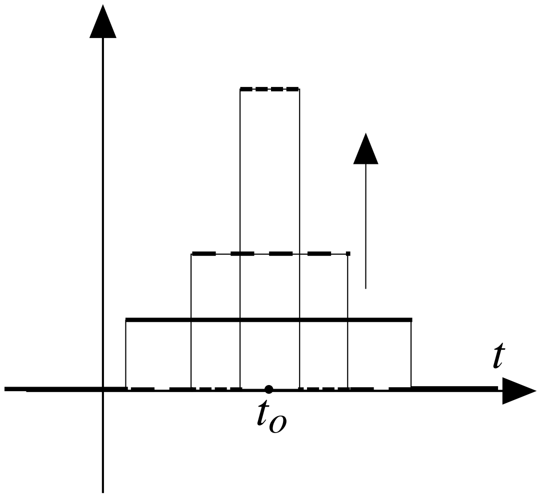
Funzione impulsiva unitaria (di Dirac):

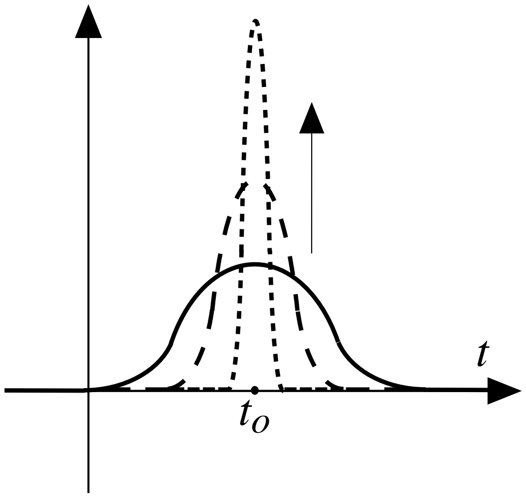
$$\begin{cases} \delta_0(t-t_o)=0 & \forall t \neq t_0 \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\displaystyle\int_{t_o-\varepsilon}^{t_o+\varepsilon}\delta_0(t-t_o)dt=1 \end{cases}$$



o $\delta(t-t_o)$. Si può ottenere come limite di certe successioni.

Esempi:





Funzioni impulsive (richiami)

Funzione impulsiva unitaria (di Dirac). Definizione più generale:

$$\begin{cases} \delta_0(t-t_o)=0 & \forall t \neq t_o \\ \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{t_o-\varepsilon}^{t_o+\varepsilon} a(t)\,\delta_0(t-t_o)\,dt = \dfrac{a(t_o^+)+a(t_o^-)}{2} \end{cases}$$

se $a(t_o^-) = a(t_o^+) = a(t_o)$

→ l'integrale rende il valore $a(t_o)$

questa è la **proprietà di campionamento** di $\delta_0(t)$.

Funzioni impulsive (richiami)

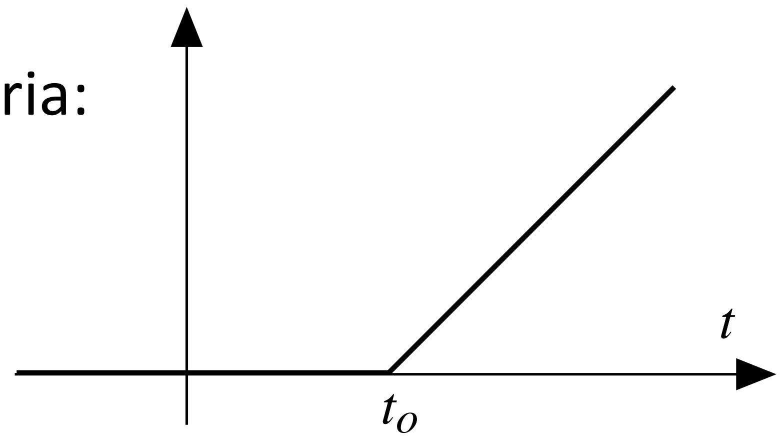
Relazioni tra gradino ed impulso unitari:

$$\int_{-\infty}^{t} \delta_0(t'-t_o)\,dt' = \begin{cases} 0 & t < t_o \\ 1 & t > t_o \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \delta_{-1}(t-t_o) = \int_{-\infty}^{t} \delta_0(t'-t_o)\,dt' \\ \delta_0(t-t_o) = \dfrac{d}{dt}\delta_{-1}(t-t_o) \end{cases}$$

$\delta_0(t)$ è la derivata di $\delta_{-1}(t)$: vale anche per le successioni di funzioni di cui sono limiti.

Integrando $\delta_{-1}(t)$ si ottiene la rampa unitaria:

$$\delta_{-2}(t-t_o) \triangleq \begin{cases} 0 & t < t_o \\ t-t_o & t > t_o \end{cases}$$



Dimensioni fisiche delle funzioni impulsive

$\delta_{-1}(t)$ è adimensionale

$\delta_0(t)$ ha dimensione di $[\mathrm{s}^{-1}]$

… $\delta_{-2}(t)$ ha dimensione di $[\mathrm{s}]$ …

$$\begin{cases} i(t) = I\,\delta_{-1}(t - t_o) & \text{con} \quad I \quad \text{in} \quad [\mathrm{A}] \\ v(t) = V\,\delta_{-1}(t - t_o) & \text{con} \quad V \quad \text{in} \quad [\mathrm{V}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} i(t) = \Theta\,\delta_0(t - t_o) & \text{con} \quad \Theta \quad \text{in} \quad [\mathrm{As}] \\ v(t) = \Lambda\,\delta_0(t - t_o) & \text{con} \quad \Lambda \quad \text{in} \quad [\mathrm{Vs}] \end{cases}$$

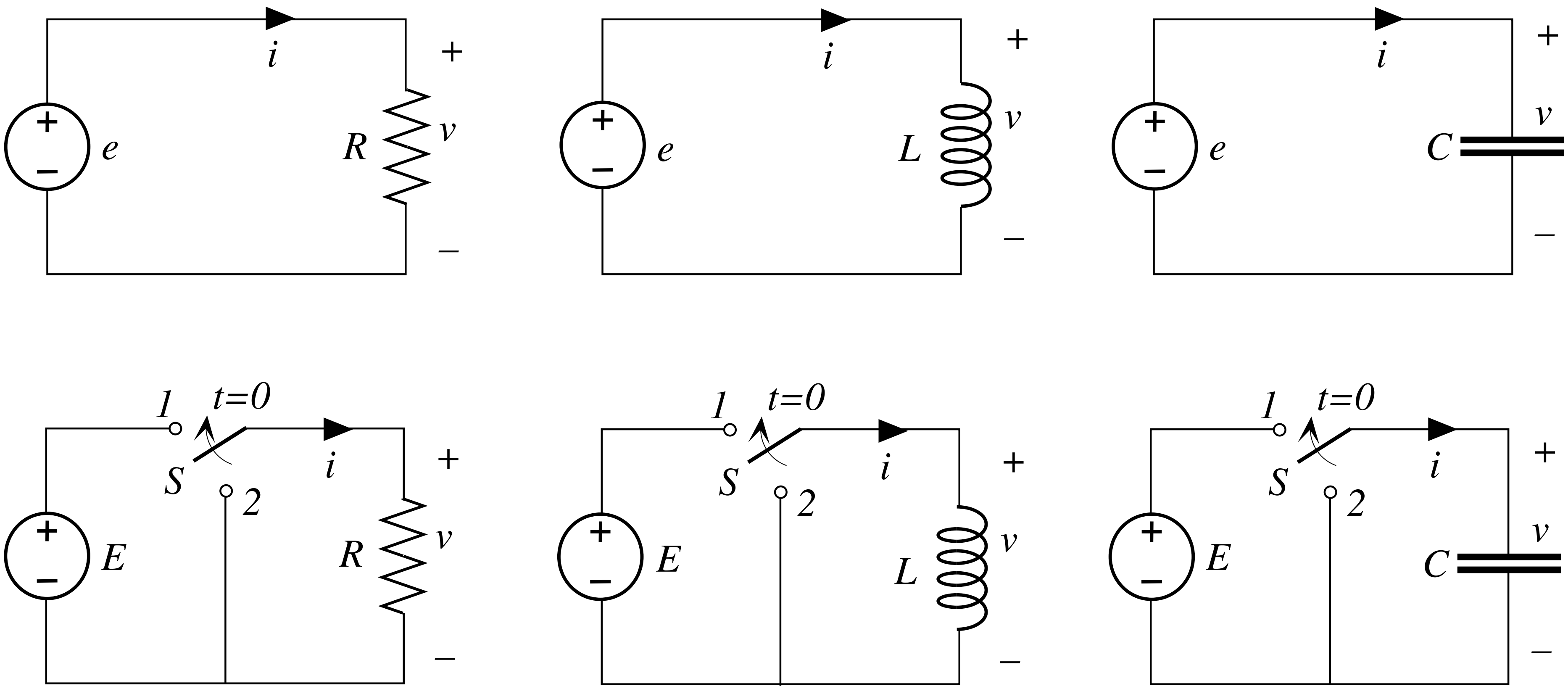
Θ = [As] come integrale di corrente

Λ = [Vs] come integrale di tensione

Comportamento dei bipoli passivi ideali

Applicazione di un gradino di tensione (poniamo $t_o = 0$)

$$e(t) = E\,\delta_{-1}(t)$$



Comportamento dei bipoli passivi ideali

Applicazione di un gradino di tensione

$$e(t) = E\,\delta_{-1}(t)$$

Resistore $i = v/R$ $\quad v(t) = V\,\delta_{-1}(t) \rightarrow i(t) = I\,\delta_{-1}(t)$

$$I = V/R$$

Induttore $i(t) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^t v(t')\,dt'$ $\quad v(t) = V\,\delta_{-1}(t) \rightarrow i(t) = K_i\,\delta_{-2}(t)$

$$K_i = V/L$$

Condensatore $i = C\,dv/dt$ $\quad v(t) = V\,\delta_{-1}(t) \rightarrow i(t) = \Theta\,\delta_0(t)$

$$\Theta = CV$$

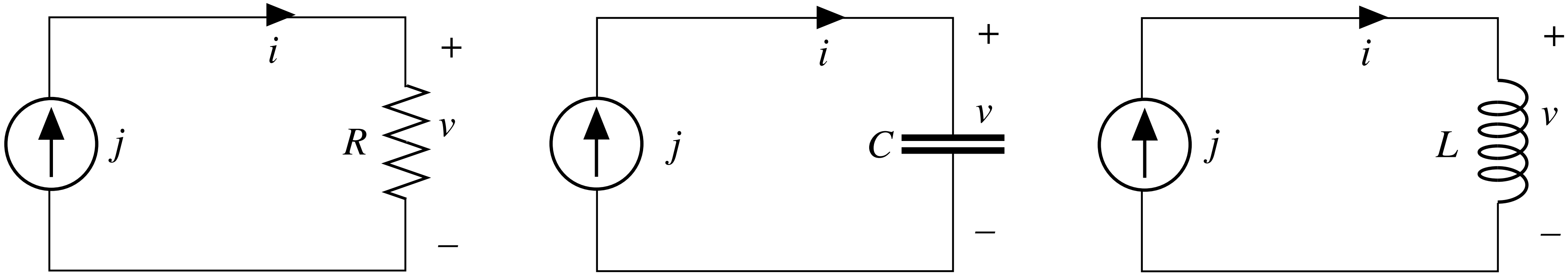
Potenza in C $p = vi$

Energia in C $W_C = \displaystyle\int_{dt} vi\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} V\delta_{-1}(t)\,\Theta\,\delta_0(t)\,dt = \frac{1}{2}CV^2$

Comportamento dei bipoli passivi ideali

Applicazione di un gradino di corrente (poniamo $t_o = 0$)

$$j(t) = J\,\delta_{-1}(t)$$



Comportamento dei bipoli passivi ideali

Applicazione di un gradino di corrente

$$j(t) = J\,\delta_{-1}(t)$$

Resistore $v = Ri$ $\quad i(t) = I\,\delta_{-1}(t) \quad \rightarrow \quad v(t) = V\,\delta_{-1}(t)$

$$V = R\,I$$

Condensatore $v(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(t')\,dt'$ $\quad i(t) = I\,\delta_{-1}(t) \quad \rightarrow \quad v(t) = K_v\,\delta_{-2}(t)$

$$K_v = I / C$$

Induttore $v = L\,di/dt$ $\quad i(t) = I\,\delta_{-1}(t) \quad \rightarrow \quad v(t) = \Lambda\,\delta_0(t)$

$$\Lambda = L\,I$$

Potenza in L $p = vi$

Energia in L $W_L = \displaystyle\int_{dt} v\,i\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \Lambda\delta_0(t)\,I\delta_{-1}(t)\,dt = \frac{1}{2}LI^2$

Condensatore con corrente impulsiva

Equazioni controllate in corrente con discontinuità di tensione

$$v(t) = v(t_o^-) + \frac{1}{C}\int_{t_o^-}^{t} i(t')\,dt'$$

$$= v(t_o^-) + \frac{1}{C}\int_{t_o^-}^{t_o^+} i(t')\,dt' + \frac{1}{C}\int_{t_o^+}^{t} i(t')\,dt'$$

$$v(t) = v(t_o^+) + \frac{1}{C}\int_{t_o^+}^{t} i(t')\,dt'$$

differenza $$C\,\Delta v(t_o) = \int_{t_o^-}^{t_o^+} i(t')\,dt' = \int_{t_o^-}^{t_o^+} \Theta\,\delta_o(t'-t_o)\,dt' = \Theta$$

eq. caratteristica $\vartheta(t) = C\,v(t)$ → $\Delta\vartheta(t_o) = \Theta$

Induttore con tensione impulsiva

Equazioni controllate in tensione con discontinuità di corrente

$$i(t) = i(t_o^-) + \frac{1}{L}\int_{t_o^-}^{t} v(t')dt'$$

$$= i(t_o^-) + \frac{1}{L}\int_{t_o^-}^{t_o^+} v(t')dt' + \frac{1}{L}\int_{t_o^+}^{t} v(t')dt'$$

$$i(t) = i(t_o^+) + \frac{1}{L}\int_{t_o^+}^{t} v(t')dt'$$

differenza $$L\,\Delta i(t_o) = \int_{t_o^-}^{t_o^+} v(t')dt' = \int_{t_o^-}^{t_o^+} \Lambda\delta_o(t'-t_o)dt' = \Lambda$$

eq. caratteristica $\lambda(t) = L\,i(t)$ → $\Delta\lambda(t_o) = \Lambda$

Condizioni per le correnti impulsive

1) i condensatori di una rete possono presentare **correnti impulsive** negli istanti critici in cui un generatore di tensione applica una discontinuità di tensione e/o un interruttore (o un deviatore) chiude
2) tali correnti impulsive possono manifestarsi solo in maglie (o anelli) formate esclusivamente da condensatori, generatori ideali di tensione e interruttori (o deviatori) che chiudono; esse sono dette **maglie impulsive**
3) nelle ipotesi suddette generatori ideali di corrente (non impulsivi*), resistori, induttori, interruttori che aprono, doppi bipoli adinamici e doppi bipoli induttivi non possono avere correnti impulsive (rispetto ad esse si comportano come lati aperti)
4) la comparsa di correnti impulsive richiede la presenza di almeno un bipolo che eroghi potenza impulsiva in t_o (tipicamente $t_o = 0$) e quindi le maglie impulsive devono comprendere almeno un generatore di tensione o un condensatore carico in $t=0^-$ (avente dato iniziale $v(0^-)\neq 0$)

* n.b.: si possono considerare generatori di corrente che producono impulsi di corrente - ma qui noi non li esaminiamo

Condizioni per le tensioni impulsive

1) gli induttori di una rete possono presentare **tensioni impulsive** negli istanti critici in cui un generatore di corrente applica una discontinuità di corrente impressa e/o un interruttore (o un deviatore) apre
2) tali tensioni impulsive possono manifestarsi solo in insiemi di taglio (o nodi) formati esclusivamente da induttori, porte di doppi bipoli induttivi, generatori ideali di corrente ed interruttori (o deviatori) che aprono; essi sono detti **insiemi di taglio impulsivi**
3) nelle ipotesi suddette generatori ideali di tensione (non impulsivi*), resistori, condensatori, interruttori che chiudono e doppi bipoli adinamici non possono avere tensioni impulsive (rispetto ad esse si comportano come cortocircuiti)
4) la comparsa di tensioni impulsive richiede la presenza di almeno un bipolo che eroghi potenza impulsiva in t_o (tipicamente $t_o = 0$) e quindi gli insiemi di taglio impulsivi devono comprendere almeno un generatore di corrente o un induttore carico in in $t=0^-$ (avente dato iniziale $i(0^-)\neq 0$)

* n.b.: si possono considerare generatori di tensione che producono impulsi di tensione - ma qui noi non li esaminiamo

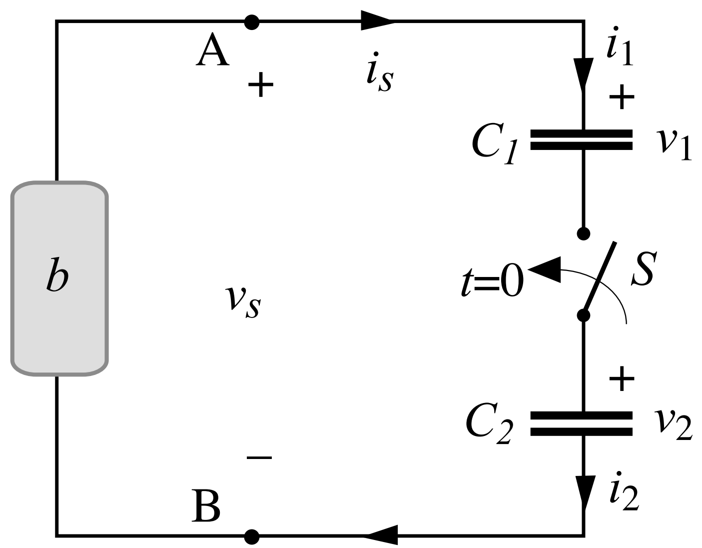
Serie di due condensatori

Le connessioni dei condensatori risentono delle condizioni in cui sono state create (sono bipoli con memoria)

Stato iniziale (prima della connessione in serie per chiusura di *S*)

$$v_1(0^-) \quad , \quad \vartheta_1(0^-) = C_1\, v_1(0^-)$$

$$v_2(0^-) \quad , \quad \vartheta_2(0^-) = C_2\, v_2(0^-)$$



Alla chiusura di *S* in t=0:

$i_s(t) = i_1(t) = i_2(t)$ per $t \geq 0$

$v_s(t) = v_1(t) + v_2(t)$ per $t > 0$

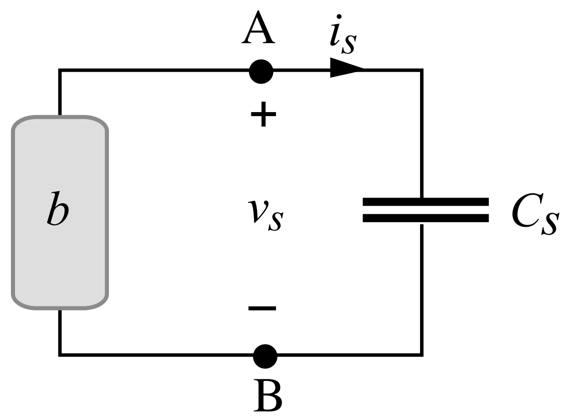
+ equazioni controllate in corrente:

→ $$v_s(t) = \left[v_1(0^+) + v_2(0^+)\right] + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)\int_{0^+}^{t} i_s(t')\,dt'$$

Serie di due condensatori

Condensatore equivalente:

$$C_s \triangleq \left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)^{-1}$$



→ $$v_s(t)=v_s(0^+)+\frac{1}{C_s}\int_{0^+}^{t} i_s(t')dt'$$

$$v_s(0^+)=v_1(0^+)+v_2(0^+)$$

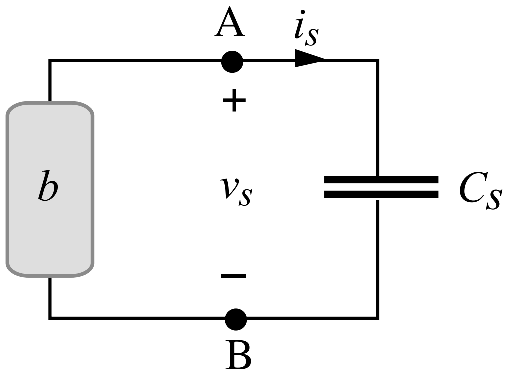
Valori iniziali?

Se *b* impedisce corrente di anello impulsiva → tensioni continue

$$\begin{cases} v_1(0^+)=v_1(0^-) \\ v_2(0^+)=v_2(0^-) \end{cases} \Rightarrow \quad v_s(0^+)=v_1(0^-)+v_2(0^-)$$

Serie di due condensatori

Energie in $t = 0^+$



Condensatore equivalente
(lavoro estraibile dalla serie):

$$w_s(0^+) = \frac{1}{2} C_s\, v_s(0^+)^2 = \frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \left[v_1(0^+) + v_2(0^+) \right]^2$$

Condensatori in serie:

$$w_C(0^+) = \frac{1}{2} C_1\, v_1(0^+)^2 + \frac{1}{2} C_2\, v_2(0^+)^2$$

diverse?

$$\rightarrow \quad w_C(0^+) - w_s(0^+) = \frac{\left[C_1 v_1(0^+) - C_2 v_2(0^+) \right]^2}{2\left(C_1 + C_2\right)} > 0$$

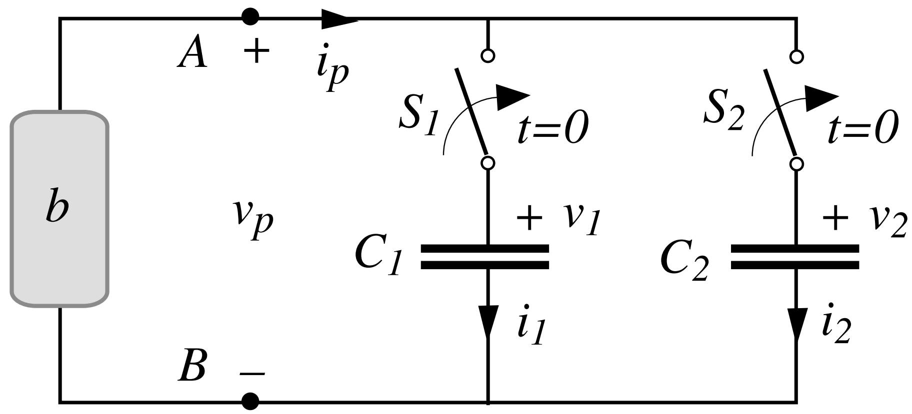
è l'energia che resta congelata nei due condensatori quando la serie è scarica, con $v_s(t^*) = v_1(t^*) + v_2(t^*) = 0$, ossia quando $v_1(t^*) = -v_2(t^*)$

Parallelo di due condensatori

Stato iniziale (prima della connessione in parallelo per chiusura di S_1 e S_2)

$$v_1(0^-) \quad , \quad \vartheta_1(0^-) = C_1\, v_1(0^-)$$

$$v_2(0^-) \quad , \quad \vartheta_2(0^-) = C_2\, v_2(0^-)$$



Alla chiusura di S_1 e S_2 in $t=0$:

$i_p(t) = i_1(t) + i_2(t)$ per $t \geq 0$

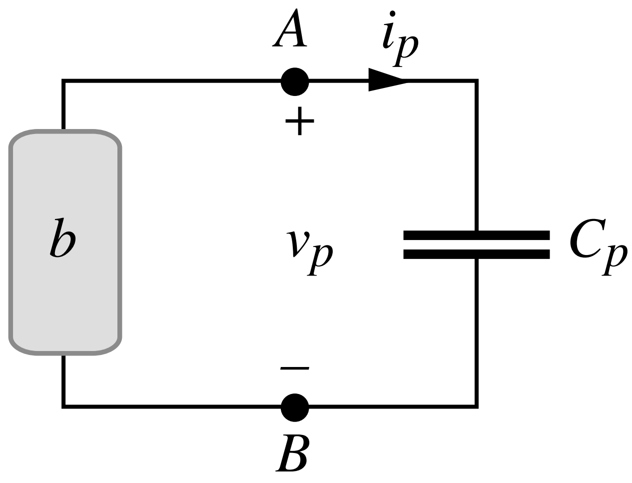
$v_p(t) = v_1(t) = v_2(t)$ per $t > 0$

+ equazioni controllate in tensione:

→ $$i_p = C_1 \frac{d\,v_1}{dt} + C_2 \frac{d\,v_2}{dt} = (C_1 + C_2)\frac{d\,v_p}{dt}$$

Parallelo di due condensatori

Condensatore equivalente:



$$C_p \triangleq C_1 + C_2$$

$$\rightarrow \qquad i_p = C_p \frac{dv_p}{dt}$$

$$v_p(0^+) = v_1(0^+) = v_2(0^+)$$

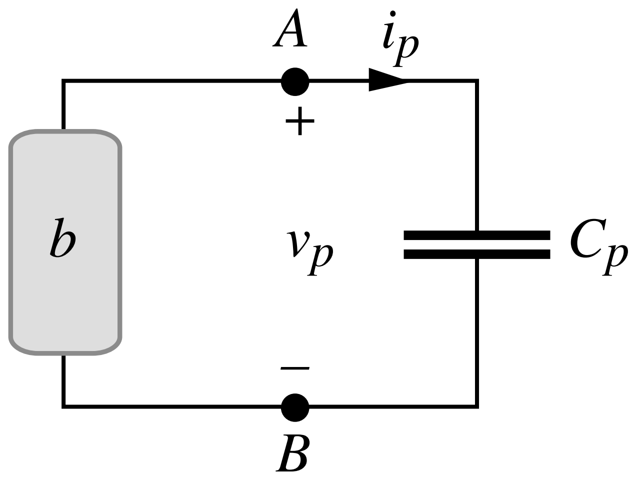
Valori iniziali? Se $v_1(0^-) \neq v_2(0^-)$ → tensioni certamente discontinue → i condensatori hanno correnti impulsive con $C\Delta v(0)=\Theta$; se *b* rifiuta la corrente impulsiva → c'è solo un anello impulsivo tra i due condensatori:

LKC: $\Theta_1\delta_0(t) + \Theta_2\delta_0(t) = 0 \rightarrow \Theta_1 + \Theta_2 = 0$

$$v_p(0^+) = \frac{C_1 v_1(0^-) + C_2 v_2(0^-)}{C_1 + C_2} = \frac{\vartheta_1(0^-) + \vartheta_2(0^-)}{C_1 + C_2}$$

Parallelo di due condensatori

Energie in $t = 0^+$



Condensatore equivalente
(lavoro erogabile dal parallelo):

$$w_p(0^+) = \frac{1}{2} C_p \, v_p(0^+)^2 = \frac{1}{2} C_1 \, v_1(0^+)^2 + \frac{1}{2} C_2 \, v_2(0^+)^2$$

→ Tutta l'energia dei due condensatori può essere estratta scaricando il parallelo

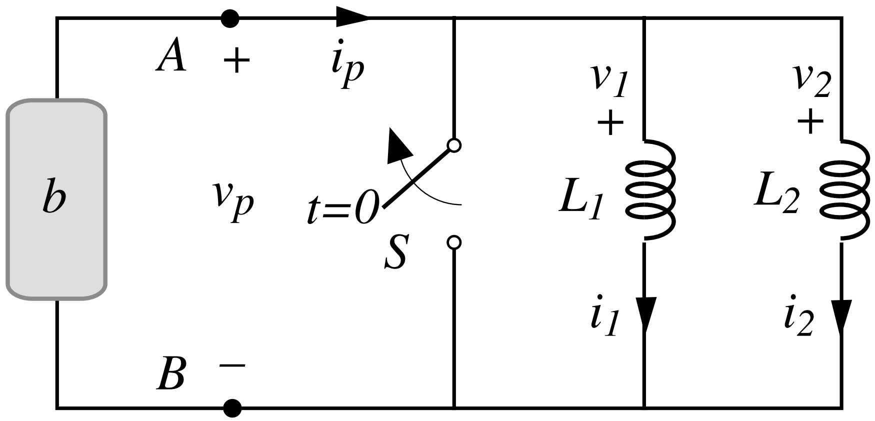
Parallelo di due induttori

Le connessioni degli induttori risentono delle condizioni in cui sono state create (sono bipoli con memoria)

Stato iniziale (prima della connessione in serie per apertura di *S*)

$$i_1(0^-) \quad , \quad \lambda_1(0^-) = L_1\, i_1(0^-)$$

$$i_2(0^-) \quad , \quad \lambda_2(0^-) = L_2\, i_2(0^-)$$



All'apertura di *S* in t=0:

$v_p(t) = v_1(t) = v_2(t)$ per $t \geq 0$

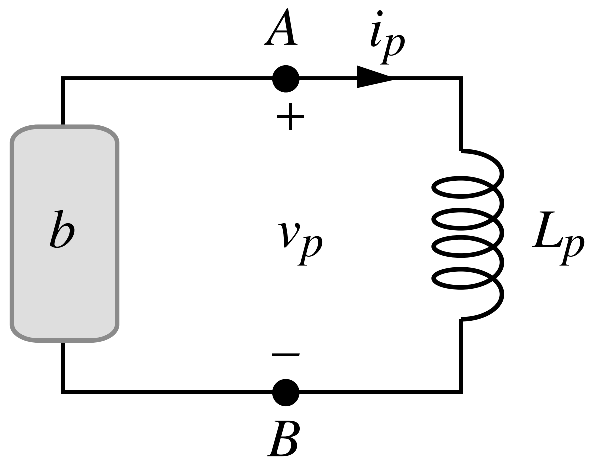
$i_p(t) = i_1(t) + i_2(t)$ per $t > 0$

+ equazioni controllate in tensione:

→ $$i_p(t) = \left[i_1(0^+) + i_2(0^+) \right] + \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) \int_{0^+}^{t} v_p(t')dt'$$

Parallelo di due induttori

Induttore equivalente:



$$L_p \triangleq \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right)^{-1}$$

$$\rightarrow \qquad i_p(t) = i_p(0^+) + \frac{1}{L_p} \int_{0^+}^{t} v_p(t')\,dt'$$

$$i_p(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+)$$

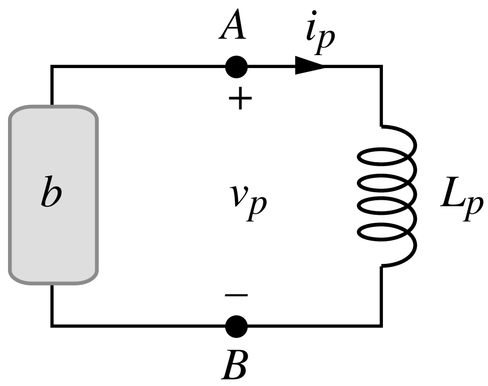
Valori iniziali?

Se *b* impedisce tensione impulsiva → correnti continue

$$\begin{cases} i_1(0^+) = i_1(0^-) \\ i_2(0^+) = i_2(0^-) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad i_p(0^+) = i_1(0^-) + i_2(0^-)$$

Parallelo di due induttori

Energie in $t = 0^+$



Induttore equivalente
(lavoro estraibile dal parallelo):

$$w_p(0^+) = \frac{1}{2} L_p \, i_p(0^+)^2 = \frac{1}{2} \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \left[i_1(0^+) + i_2(0^+) \right]^2$$

Induttori in parallelo:

$$w_L(0^+) = \frac{1}{2} L_1 \, i_1(0^+)^2 + \frac{1}{2} L_2 \, i_2(0^+)^2$$

diverse?

$$\rightarrow \quad w_L(0^+) - w_p(0^+) = \frac{\left[L_1 i_1(0^+) - L_2 i_2(0^+) \right]^2}{2\left(L_1 + L_2\right)} > 0$$

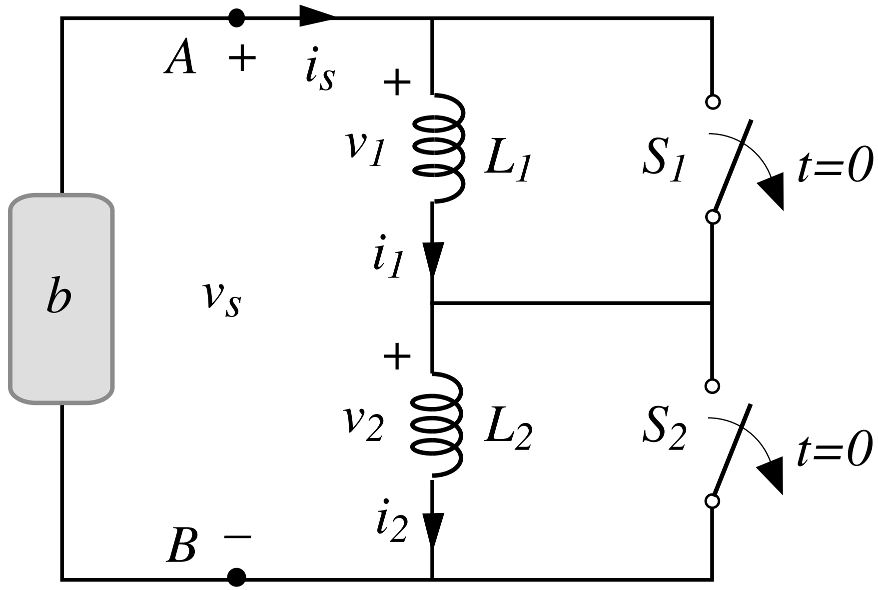
è l'energia che resta congelata nei due induttori quando il parallelo è scarico, con $i_p(t^*) = i_1(t^*) + i_2(t^*) = 0$, ossia quando $i_1(t^*) = -i_2(t^*)$

Serie di due induttori

Stato iniziale (prima della connessione in parallelo per apertura di S_1 e S_2)

$$i_1(0^-) \quad , \quad \lambda_1(0^-) = L_1\, i_1(0^-)$$

$$i_2(0^-) \quad , \quad \lambda_2(0^-) = L_2\, i_2(0^-)$$



All'apertura di S_1 e S_2 in $t=0$:

$v_s(t) = v_1(t) + v_2(t)$ per $t \geq 0$

$i_s(t) = i_1(t) = i_2(t)$ per $t > 0$

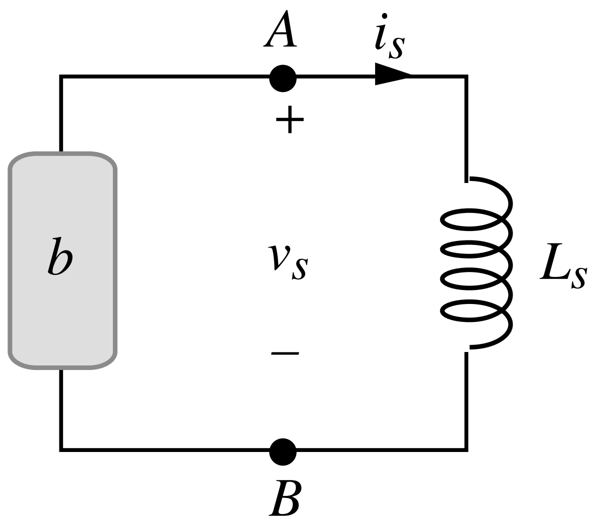
+ equazioni controllate in corrente:

→ $$v_s = L_1 \frac{d i_1}{dt} + L_2 \frac{d i_2}{dt} = (L_1 + L_2) \frac{d i_s}{dt}$$

Serie di due induttori

Induttore equivalente:

$$L_s \triangleq L_1 + L_2$$



→ $$v_s = L_s \frac{di_s}{dt}$$

$$i_s(0^+) = i_1(0^+) = i_2(0^+)$$

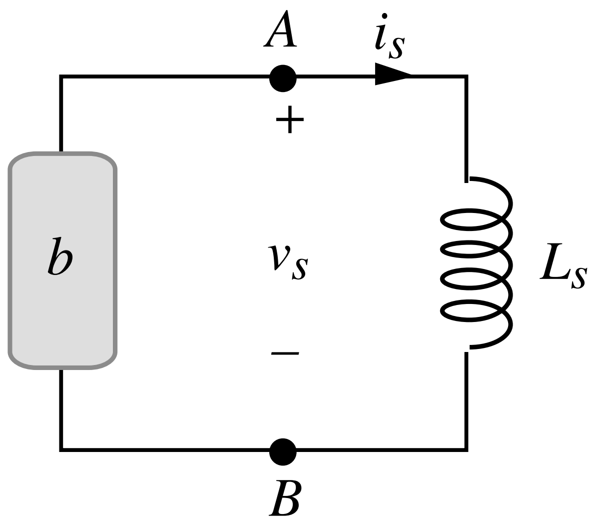
Valori iniziali? Se $i_1(0^-) \neq i_2(0^-)$ → correnti certamente discontinue → gli induttori hanno tensioni impulsive con $L\Delta i(0)=\Lambda$; se *b* rifiuta la tensione impulsiva → c'è solo un taglio impulsivo tra i due induttori:

LKT: $\Lambda_1\delta_0(t) + \Lambda_2\delta_0(t) = 0$ → $\Lambda_1 + \Lambda_2 = 0$

$$i_s(0^+) = \frac{L_1 i_1(0^-) + L_2 i_2(0^-)}{L_1 + L_2} = \frac{\lambda_1(0^-) + \lambda_2(0^-)}{L_1 + L_2}$$

Serie di due induttori

Energie in $t = 0^+$



Induttore equivalente
(lavoro erogabile dalla serie):

$$w_s(0^+) = \frac{1}{2} L_s i_s(0^+)^2 = \frac{1}{2} L_1 i_1(0^+)^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2(0^+)^2$$

→ Tutta l'energia dei due induttori può essere estratta scaricando la serie