

# Approssimazione polinomiale <sup>1</sup>

A. Sommariva <sup>2</sup>

---

*Keywords:* Approssimazione polinomiale ai minimi quadrati. Curve fitting.

---

*Revisione:* 4 giugno 2019

---

## 1. Approssimazione polinomiale

Dato un campionamento  $\{(x_i, y_i)\}$ ,  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , dove  $x_i \neq x_j$  se  $i \neq j$ , nell'approssimazione ai minimi quadrati invece di interpolare si cerca un polinomio  $\mathcal{L}_m$  di grado  $m \leq N$ , in cui tipicamente  $m \ll N$ , tale che la somma degli scarti quadratici

$$\sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - \mathcal{L}_m(x_i))^2}$$

è minima, ovvero che risolva il problema di ottimizzazione in  $m + 1$  variabili  $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_m)$

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}^{m+1}} \sum_{i=1}^N (y_i - (a_0 + a_1 x_i + \dots + a_m x_i^m))^2. \quad (1)$$

Si può dimostrare che tale problema ha una e una sola soluzione  $\mathbf{a}$ , ovvero esiste un unico polinomio  $\mathcal{L}_m$  minimizzante la somma degli scarti quadratici (1).

**Nota 1.1 (Richiede la conoscenza di algebra lineare).** *La dimostrazione usa elementi di algebra lineare. Ne forniamo una traccia*

Se

$$V = (v_{i,j})_{i=1, \dots, N, j=0, \dots, m} = (x_i^j)$$

è una matrice di Vandermonde rettangolare di dimensione  $N \times (m+1)$ , allora si mostra che  $V^T V$  è una matrice di dimensione  $(m+1) \times (m+1)$ , simmetrica e definita positiva (e quindi non singolare).

Inoltre si vede che  $\mathbf{a} = (a_i)$  è soluzione ai minimi quadrati se e solo se risolve il sistema  $V^T V \mathbf{a} = V^T \mathbf{y}$  per  $\mathbf{y} = (y_i)$ , ed essendo  $V^T V$  non singolare, necessariamente la soluzione  $\mathbf{a}$  è unica.

**Teorema 1.2.** *Se*

- $h = \max_i \Delta x_i \leq \theta(b-a)/m^2$ ,

- $\theta \in (0, 1)$ ,

allora per ogni  $f \in C^k([a, b])$ ,  $k > 1$ , esiste una costante  $c_k$  tale che

$$\max_{x \in [a, b]} |\mathcal{L}_m(x) - f(x)| \leq c_k m^{1-k}.$$

**Commento 1.3.** Questo teorema asserisce che la soluzione ai minimi quadrati  $\mathcal{L}_m$  di grado  $m$ , su un set di nodi sufficientemente fitti, darà uniformemente una buona approssimazione della funzione  $f$  da approssimare, tendenzialmente migliore se la funzione è molto regolare.

Non dice molto del valore della costante  $c_k$ , e quindi il termine  $c_k m^{1-k}$  non è direttamente valutabile.

**Esempio.** Approssimare ai minimi quadrati le funzioni

1.  $f_1(x) = x^{30} \in C^\infty([0, 1])$ ,
2.  $f_2(x) = x^{7/2} \in C^3([0, 1])$ ,
3.  $f_3(x) = \exp(x) \in C^\infty([0, 1])$ .

in opportuni nodi equispaziati.

Come noto dal teorema precedente, possiamo aspettarci che se  $x_k = a + kh$ ,  $k = 1, \dots, n$  con  $h$  sufficientemente piccolo, allora il massimo errore

$$\max_{x \in [a, b]} |\mathcal{L}_m(x) - f_k(x)|, \quad k = 1, 2, 3$$

tenderà a 0 al crescere di  $m$ .

Al variare di  $m$ , sceglieremo  $h = 0.5(b - a)/m^2$ . Se  $n$  è il numero di subintervalli di  $[a, b]$ , visto che  $nh = (b - a)$ , otteniamo

$$n = (b - a)/h = 2m^2.$$

Il calcolo della soluzione ai minimi quadrati viene eseguito utilizzando la funzione Matlab `polyfit`, e per avere una stima dell'errore commesso

$$E_m(f_k) = \max_{x \in [a, b]} |\mathcal{L}_m(x) - f_k(x)|$$

valutiamo

$$E_m^*(f_k) = \max_{x \in \Delta_{10000}} |\mathcal{L}_m(x) - f(x)| \approx E_m(f_k),$$

dove  $\Delta_{10000} = \{x_k = -5 + k/1000, \quad k = 0, \dots, 10000\}$ .

I risultati sono rappresentati in tabella.

$m$	$E_m^*(f_1)$	$E_m^*(f_2)$	$E_m^*(f_3)$	$n + 1$
1	$6.9e - 01$	$3.0e - 01$	$1.4e - 01$	3
2	$4.0e - 01$	$5.2e - 02$	$9.6e - 03$	9
3	$3.4e - 01$	$4.3e - 03$	$7.3e - 04$	19
4	$2.8e - 01$	$3.2e - 04$	$4.1e - 05$	33
5	$2.1e - 01$	$6.2e - 05$	$1.9e - 06$	51
6	$1.4e - 01$	$1.7e - 05$	$7.3e - 08$	73
7	$8.6e - 02$	$6.1e - 06$	$2.5e - 09$	99
8	$4.9e - 02$	$2.5e - 06$	$7.2e - 11$	129
9	$2.6e - 02$	$1.1e - 06$	$1.9e - 12$	163
10	$1.3e - 02$	$5.6e - 07$	$4.5e - 14$	201
15	$1.1e - 04$	$3.7e - 08$	$2.0e - 15$	451
20	$9.4e - 08$	$5.4e - 09$	$1.8e - 15$	801

Tabella 1: Nella tabella indichiamo il grado  $m = 1, \dots, 10, 15, 20$ , gli errori compiuti dalle approssimazioni ai minimi quadrati  $E_m^*(f_1)$ ,  $E_m^*(f_2)$ ,  $E_m^*(f_3)$  e il numero di punti di campionamento.

## 2. Minimi quadrati e curve fitting

**Nota 2.1.** Nelle scienze applicate capita frequentemente che gli esperimenti producano set di dati  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1, \dots, N}$  dove le ascisse sono distinte. Uno degli scopi è di determinare una formula del tipo  $y = f(x)$  che relazioni le variabili.

Usualmente è a disposizione una classe di funzioni  $\mathcal{F}$  e bisogna determinare  $f$  all'interno di questa famiglia. Tale problema è noto come *curve fitting*.

In questa sezione consideriamo il caso in cui  $\mathcal{F} = \mathbb{P}_m$ , ovvero i polinomi di grado al più  $m$  e determiniamo  $f$  utilizzando la soluzione ai minimi quadrati.

**Nota 2.2.** Inoltre i dati  $y_i$  sono spesso inesatti, dovuti agli errori sperimentali compiuti. Questa tecnica permette in qualche senso di evidenziare una curva che meglio li approssima

### 2.1. Regressione lineare

**Definizione 2.3 (Regressione lineare).** Se  $\mathcal{F} = \mathbb{P}_1$ , ovvero calcoliamo la soluzione ai minimi quadrati  $\mathcal{L}_1$ , si parla di *regressione lineare*.

**Esempio.** Si considerino i dati della seguente tabella (cf. [1, p.79])

$x_i$	1	3	4	6	7
$y_i$	-2.1	-0.9	-0.6	0.6	0.9

Si disegni il grafico della soluzione al problema di regressione lineare.

I risultati sono evidenziati in figura, dove la retta di regressione è quella che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati.

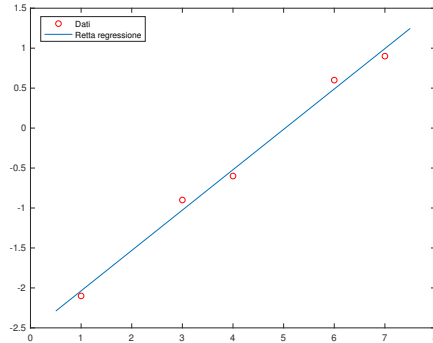


Figura 1: Dati e retta di regressione lineare.

## 2.2. Approssimazione polinomiale e dati inesatti

In alcuni problemi, i dati sono soggetti a rumore e uno vuole in qualche senso togliere il rumore.

**Esempio.** Consideriamo quali dati  $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, 40}$  in cui  $x_i = -1 + i \cdot \frac{1}{20}$  e  $y_i = \sin(10 \cdot x_i) + 10^3 \mu_i$  dove  $\mu_i$  è un numero random in  $[-0.5, 0.5]$ . Determinare il polinomio di miglior approssimazione.

In qualche modo simuliamo dei dati  $y_i^* = \sin(x_i)$  cui abbiamo aggiunto il rumore  $10^3 \mu_i$ .

- L'intento è approssimare la funzione  $f^*(x) = \sin(10x)$  togliendo il rumore.
- Non ha senso calcolare l'interpolante polinomiale, perché si riprodurrebbero i rumori e non la funzione cercata.

In figura, mostriamo i risultati ottenuti utilizzando le approssimanti  $\mathcal{L}_m$  ai minimi quadrati di grado rispettivamente  $m = 5, m = 10, m = 15, m = 30$ .

In virtù dei 6 cambi di convessità / concavità della funzione  $f^*$ , è chiaro che un polinomio di grado basso non fornisca risultati apprezzabili.

Ad esempio un polinomio di grado 5 può avere al più 4 cambi di convessità / concavità, e non può essere adatto allo scopo.

Un polinomio  $\mathcal{L}_m$  di grado  $m$  troppo alto approssimerebbe la funzione con rumore e non  $f^*$ .

Nel nostro esempio,  $m = 15$  sembra essere un buon compromesso. Si noti come a grado  $m = 30$  comincino a sorgere oscillazioni agli estremi. Inoltre per problemi dovuti a `polyfit`, il risultato non è quello corretto teoricamente.

La tabella che segue, mostra gli errori

$$E_m(f^*) = \max_{x \in [-1, 1]} |f^*(x) - \mathcal{L}_m(x)|, \quad E_m(f) = \sum_{i=1}^{40} |f(x_i) - \mathcal{L}_m(x_i)|^2,$$

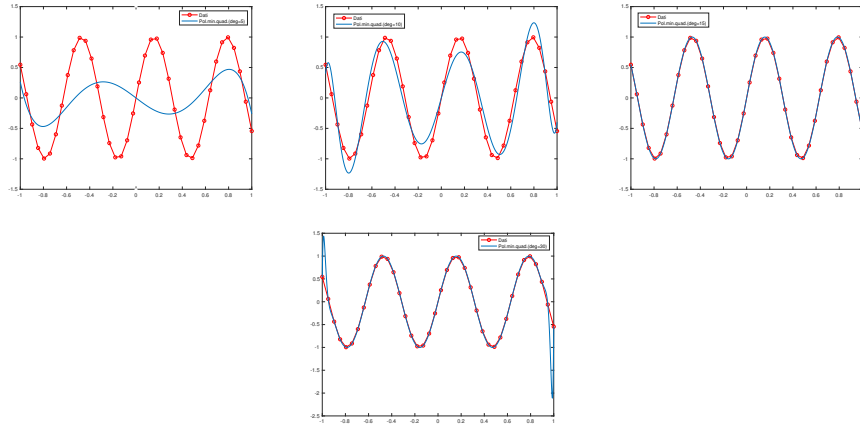


Figura 2: Dati (in rosso) e approssimanti ai minimi quadrati di grado  $m = 5, m = 10, m = 15, m = 30$  (in blu).

evidenziando un miglioramento di entrambe fino a grado  $m = 20$  e un peggioramento nell'approssimare la funzione senza rumore  $f^*$  pur approssimando sempre meglio i dati (nel senso dei minimi quadrati).

$m$	$E_m(f^*)$	$E_m(f)$
5	$1.2e + 00$	$4.0e + 00$
10	$3.3e - 01$	$1.2e + 00$
15	$4.0e - 03$	$5.1e - 03$
20	$5.7e - 03$	$2.3e - 03$
25	$3.6e - 02$	$2.2e - 03$
30	$1.7e + 00$	$1.8e - 03$

Tabella 2: Grado  $m$  ed errori  $E_m(f^*) = \max_{x \in [-1,1]} |f^*(x) - \mathcal{L}_m(x)|$ ,  $E_m(f) = \sum_{i=1}^{40} |y_i - \mathcal{L}_m(x_i)|^2$ .

### 3. Bibliografia

- [1] A. Quarteroni e F. Saleri, Elementi di calcolo numerico, Progetto Leonardo, 1999.