

Interpolazione polinomiale a tratti e spline ¹

A. Sommariva ²

Keywords: Interpolazione polinomiale. Funzioni polinomiali a tratti. Interpolazione spline. Errore dell'interpolante spline cubica.

Revisione: 2 luglio 2019

1. Un problema dell'interpolazione polinomiale

Si è visto che nel caso dell'interpolazione polinomiale, dati $n + 1$ punti $a = x_0 < \dots < x_n = b$, e i valori y_0, \dots, y_n , ad esempio ivi assunti da una funzione $y = f(x)$, esiste uno ed un solo polinomio p_n di grado n tale che

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n. \quad (1)$$

Nel caso di nodi equispaziati

$$x_k = a + k \frac{(b-a)}{n}, \quad k = 0, \dots, n; \quad (2)$$

al crescere di n , non si può garantire che $f(x) - p_n(x)$ tenda a 0 (si ricordi il fenomeno di Runge!).

Più in generale per un teorema di Faber (cf. [2, p.132], qualsiasi sia l'insieme di nodi relativi all'intervallo limitato $[a, b]$ esiste una funzione continua f tale che l'interpolante P_n in tale set di punti non converge uniformemente a f (per $n \rightarrow \infty$).

In altre parole al tendere di $n \rightarrow +\infty$, non si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - P_n(x)| \rightarrow 0.$$

Di conseguente sorge spontaneo porsi il seguente

Problema 1.1. *Qualora si possenga un gran numero di punti, anche equispaziati, risulta possibile calcolare un'approssimante di tipo polinomiale per cui al crescere di n si abbia $p_n \rightarrow f$ (uniformemente)?*

2. Funzioni polinomiali a tratti

Definizione 2.1 (Funzioni polinomiali a tratti). *Sia dato un intervallo $[a, b]$ e sia $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Una funzione f si dice polinomiale a tratti se la sua restrizione ad ogni intervallo $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, \dots, n - 1$ è un polinomio.*

Definizione 2.2 (Interpolante polinomiale a tratti di grado s). Siano $x_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$ e si supponga che sia

$$t_k = x_{k \cdot s} < x_{k \cdot s + 1} < \dots < x_{k \cdot (s+1) - 1} < x_{k \cdot (s+1)} = t_{k+1}.$$

Si consideri la funzione p_s^* tale che in ogni subintervallo $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, \dots, n$, sia il polinomio di grado s interpolante nei punti $x_{k \cdot s}, \dots, x_{(k+1) \cdot s}$ i valori $y_{k \cdot s}, \dots, y_{(k+1) \cdot s}$. Tale p_s^* si chiama funzione polinomiale a tratti di grado s , interpolante le coppie $(x_j, y_j)_{j=0, \dots, n}$.

In altri termini p_s^* si ottiene incollando per continuità pezzi polinomiali ove in generale i punti di raccordo $x_s, x_{2s}, x_{3s}, \dots$ sono punti angolosi della funzione interpolante.

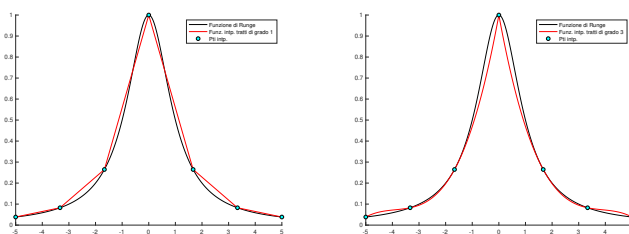


Figura 1: La funzione di Runge, la interpolante polinomiale a tratti p_1^* a tratti di grado 1 e la interpolante polinomiale a tratti p_3^* a tratti di grado 3, nei punti $x_k = -5 + k \cdot 10/6$, $k = 0, \dots, 6$. Si osservi che i punti $x_4 = 0$ è angoloso per f in entrambi i casi.

Siccome in ogni subintervallo $[t_k, t_{k+1}]$ l'interpolante richiesta esiste ed è unica, possiamo affermare che tali interpolanti relativamente ai dati $(x_k, y_k)_{k=0, \dots, n}$ esistono e sono uniche.

Il primo caso è quello delle interpolanti polinomiali a tratti di grado 1, cioè funzioni che in ogni intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ (per $i = 0, \dots, n-1$) sono polinomi di grado $m = 1$ (e globalmente funzioni continue).

2.1. Errore dell'interpolante polinomiale a tratti di grado 1

Teorema 2.3. Sia $p_1^* : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione interpolante a tratti di grado 1 relativamente alle coppie $(x_i, f(x_i))$ dove

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b.$$

Allora se

1. $x \in [x_i, x_{i+1}]$,
2. $h_i = x_{i+1} - x_i$,
3. la funzione f è derivabile due volte con continuità ed è

$$M_i = \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |f^{(2)}(x)|,$$

abbiamo

$$|f(x) - p_1^*(x)| \leq h_i^2 \frac{M_i}{8}. \quad (3)$$

Dimostrazione. Dal teorema dell'errore dell'interpolazione polinomiale di grado $n = 1$, relativamente alle coppie $(x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, per $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$f(x) - p_1^*(x) = f^{(2)}(\xi) \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2}, \quad \xi \in (x_i, x_{i+1}) \quad (4)$$

Se $x \in [x_i, x_{i+1}]$, da (4)

$$\begin{aligned} |f(x) - p_1^*(x)| &= \left| f^{(2)}(\xi) \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2} \right| = |f^{(2)}(\xi)| \left| \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2} \right| \\ &\leq \max_{t \in [x_i, x_{i+1}]} |f^{(2)}(t)| \cdot \max_{t \in [x_i, x_{i+1}]} \left| \frac{(t - x_i)(t - x_{i+1})}{2} \right| \end{aligned}$$

da cui l'asserto in quanto visto che essendo $c = (x_i + x_{i+1})/2$ il punto di massimo in $[x_i, x_{i+1}]$ di $\left| \frac{(t - x_i)(t - x_{i+1})}{2} \right|$ deduciamo visto che $h_i = x_{i+1} - x_i$,

$$\max_{t \in [x_i, x_{i+1}]} \left| \frac{(t - x_i)(t - x_{i+1})}{2} \right| = \left| \frac{(c - x_i)(c - x_{i+1})}{2} \right| = \frac{(h_i/2)(h_i/2)}{2} = \frac{h_i^2}{8}.$$

e quindi essendo $M_i := \max_{t \in [x_i, x_{i+1}]} |f^{(2)}(t)|$

$$|f(x) - p_1^*(x)| \leq M_i \frac{h_i^2}{8}. \quad (5)$$

Nota 2.4. 1. *Il teorema precedente, vale per h_i generica.*

2. *Il massimo $M_i = \max_{s \in (x_i, x_{i+1})} |f^{(2)}(s)|$ dipende solo dal i -simo intervallo che è quello in cui si esamina l'errore compiuto nel punto x .*

A priori uno potrebbe utilizzare $M = \max_{s \in (a, b)} |f^{(2)}(s)| \geq M_i$ ma la disuguaglianza sarebbe meno precisa.

Corollario 2.5. *Sia $p_1^* : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione interpolante a tratti relativamente alle coppie $(x_k, f(x_k))$ dove $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$, $k = 0, \dots, n$.*

Allora se la funzione f è derivabile due volte con continuità in $[a, b]$ ed è $M = \max_{t \in [a, b]} |f^{(2)}(t)|$, abbiamo

$$0 \leq \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_1^*(x)| \leq \frac{(b-a)^2 M}{8n^2}.$$

Dimostrazione 2.6. *Si osserva che i punti x_k , con $k = 0, \dots, n$ sono equispaziati, ovvero $x_k = a + kh$ con $k = 0, \dots, n$. Visto che*

$$M = \max_{t \in [a, b]} |f^{(2)}(t)| \geq M_i = \max_{t \in [x_i, x_{i+1}]} |f^{(2)}(t)|$$

ricaviamo dal teorema precedente

$$|f(x) - p_1^*(x)| \leq M_i \frac{h^2}{8} \leq M \frac{h^2}{8}.$$

da cui, visto che $M \frac{h^2}{8}$ non dipende da x ,

$$0 \leq \max_{t \in [a, b]} |f(t) - p_1^*(t)| \leq M \frac{h^2}{8}.$$

Importante 2.7 (Convergenza uniforme). *Indicato con $p_{1,n}^*$ il polinomio a tratti interpolante $n + 1$ nodi equispaziati di $[a, b]$, essendo $h = (b - a)/n$, ricaviamo*

$$0 \leq \max_{t \in [a, b]} |f(t) - p_{1,n}^*(t)| \leq \frac{(b-a)^2 M}{8n^2}. \quad (6)$$

da cui si evince che se $f \in C^2([a, b])$, $-\infty < a < b < +\infty$ e il numero di punti equispaziati nell'intervallo $[a, b]$ tende ad infinito allora, per il teorema del confronto

$$\max_{t \in [a, b]} |f(t) - p_{1,n}^*(t)| \rightarrow 0$$

ovvero la successione $\{p_{1,n}^*\}$ converge uniformemente a f .

2.2. Il controesempio di Runge

In questa sezione analizziamo numericamente la convergenza delle splines lineari $s_{1,n}$ interpolanti in n punti equispaziati

$$x_k = -5 + \frac{10k}{n}, \quad k = 0, \dots, n,$$

la funzione di Runge

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5].$$

Dopo qualche calcolo si vede che

$$f^{(1)}(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{2 \cdot (3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3}$$

e quindi l'errore di interpolazione è per $x \in [x_i, x_{i+1}]$, visto che

- $h_i = x_{i+1} - x_i = h = 10/n$,
- $\max_{s \in [-5, 5]} |f^{(2)}(s)| = 2$

ricaviamo

$$|f(x) - p_{1,n}^*(x)| \leq h_i^2 \max_{s \in (x_i, x_{i+1})} |f^{(2)}(s)| \quad (7)$$

$$= \frac{100 \cdot 2}{n^2}. \quad (8)$$

Di conseguenza,

$$0 \leq \max_{x \in [-5, 5]} |f(x) - p_{1,n}^*(x)| \leq \frac{200}{n^2}.$$

e come detto sopra deduciamo per il teorema del confronto che

$$\lim_n \max_{x \in [-5, 5]} |f(x) - p_{1,n}^*(x)| = 0,$$

ovvero la successione $\{p_{1,n}^*\}$ converge uniformemente a f .

n	E_n	n	E_n
2	$9.62e - 01$	16384	$9.31e - 08$
4	$7.35e - 01$	32768	$2.32e - 08$
8	$3.38e - 01$	65536	$5.79e - 09$
16	$1.00e - 01$	131072	$1.45e - 09$
32	$2.54e - 02$	262144	$3.63e - 10$
64	$6.26e - 03$	524288	$9.08e - 11$
128	$1.55e - 03$	1048576	$2.27e - 11$
256	$3.84e - 04$	2097152	$5.67e - 12$
512	$9.55e - 05$	4194304	$1.42e - 12$
1024	$2.38e - 05$	8388608	$3.54e - 13$
2048	$5.95e - 06$	16777216	$8.78e - 14$
4096	$1.49e - 06$	33554432	$2.23e - 14$
8192	$3.71e - 07$	67108864	$5.66e - 15$

Tabella 1: Grado n ed errore $E_n = \max_{x \in [-5, 5]} |f(x) - p_{1,n}^*(x)|$ con $p_{1,n}^*$ interpolante f di tipo lineare a tratti, in $n + 1$ nodi equispaziati. Si osservi come numericamente $E_n \rightarrow 0$.

3. Interpolazione spline

Una risposta al citato problema di convergenza dell'interpolazione polinomiale è stata data nel 1946 da Schoenberg, lo scopritore delle splines (cf. [8] [5], [6], [7]).

Definizione 3.1. Una spline $s_m : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ di grado m è una funzione polinomiale a tratti di grado m , tale che

$$s_m \in C^{m-1}([a, b])$$

ovvero è una funzione la cui derivata $m - 1$ -sima è derivabile.

In particolare fornite le coppie (x_k, y_k) , con $x_k < x_{k+1}$, $k = 0, \dots, n$, la spline si dice interpolante se

$$s_m(x_k) = y_k, \quad k = 0, \dots, n.$$

Esempio. Il primo caso è quello delle splines di grado 1, cioè funzioni che in ogni intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ (per $i = 0, \dots, n - 1$) sono polinomi di grado $m = 1$ e globalmente funzioni di classe $C^{m-1}([a, b]) = C^0([a, b])$, cioè continue. Evidentemente coincidono con funzioni interpolanti polinomiali a tratti nei punti $\{x_i\}$.

Esempio. Per $m = 3$ otteniamo le cosiddette splines cubiche s_3 , cioè funzioni che in ogni intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ (per $i = 0, \dots, n - 1$) siano polinomi di grado $m = 3$ e globalmente funzioni di classe $C^{m-1}([a, b]) = C^2([a, b])$. Come vedremo dopo, per garantirne l'unicità si chiedono condizioni aggiuntive.

Commento 3.2 (Funzioni polinomiali a tratti e splines: differenze). Esistono molte differenze tra interpolanti spline e interpolanti polinomiali a tratti. Ne citiamo alcune.

- Possono avere diversa regolarità. Osserviamo che non sempre le funzioni polinomiali a tratti di grado m sono di classe C^{m-1} come invece lo sono le splines.

- Mentre le funzioni a tratti di grado m richiedono che il numero di punti da interpolare sia

$$sm + 1$$

per qualche numero naturale s , le splines di grado m sono definite su un insieme di punti arbitrari, indipendentemente dal grado.

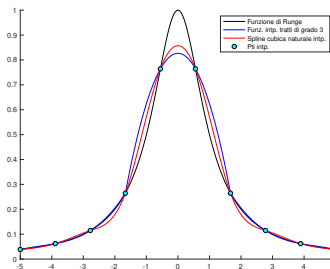


Figura 2: La funzione di Runge, la interpolante polinomiale p_3^* a tratti di grado 3 e la interpolante spline cubica s_3 (con condizioni naturali), nei punti $x_k = -5 + k * 10/9, k = 0, \dots, 9$. Si osservi che i punti x_3, x_6 sono angolosi per f . Le derivate infatti valgono $\lim_{x \rightarrow x_3^-} f'(x) \approx 0.1990, \lim_{x \rightarrow x_3^+} f'(x) \approx 0.6743, \lim_{x \rightarrow x_6^-} f'(x) \approx -0.6736, \lim_{x \rightarrow x_6^+} f'(x) \approx -0.1992$.

3.1. Interpolazione spline: cubiche

Nel caso delle splines cubiche s_3 , l'unicità dell'interpolante è legata (ma non solo!) all'aggiungere alcune proprietà di s_3 agli estremi x_0, x_n .

Osserviamo infatti che in ogni intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ le splines si possano rappresentare come

$$s_3(x) = c_{1,i} + c_{2,i}(x - x_i) + c_{3,i}(x - x_i)^2 + c_{4,i}(x - x_i)^3, \quad i = 0, \dots, n - 1$$

e quindi per determinare s_3 in $\{x_i\}_{i=0, \dots, n}$ servono $4n$ valori $c_{i,j}$, ovvero 4 valori per ogni indice i .

Da ragionamenti sulle proprietà della regolarità della spline interpolante si vede che sono disponibili solo $4n - 2$ condizioni (di cui $n + 1$ dal fatto che $s_3(x_i) = f_i$).

Si procede richiedendo quindi una delle seguenti proprietà aggiuntive a s_3 :

- Spline naturale: $s_3^{(2)}(a) = s_3^{(2)}(b) = 0$.
- Spline periodica: $s_3^{(1)}(a) = s_3^{(1)}(b), s_3^{(2)}(a) = s_3^{(2)}(b)$.
- Spline vincolata: $s_3^{(1)}(a) = f^{(1)}(a), s_3^{(1)}(b) = f^{(1)}(b)$.

La spline con vincolo not-a-knot forza $s_3^{(3)}$ ad essere continua nel secondo e nel penultimo nodo (e di conseguenza si può mostrare che ciò impone che i polinomi nei primi e negli ultimi due intervalli siano uguali).

In altre parole,

- la suddivisione è data dai subintervalli $[x_0, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-2}, x_n]$,
- si interpolano i dati y_0, \dots, y_n nei nodi x_0, \dots, x_n .

Si osservi che, nel caso della condizione *knot-a-knot* se i punti da interpolare sono x_0, \dots, x_n e gli $n - 2$ intervalli della suddivisione sono $[x_0, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-2}, x_n]$ allora necessitano $4(n - 2)$ condizioni per determinare la spline cubica.

Le condizioni dovute

- all'interpolazione sono $n + 1$,
- alla regolarità sono $3(n - 3)$, poichè gli $n - 3$ punti che sono estremi di subintervalli *interni* sono x_2, \dots, x_{n-2} .

3.2. Errore dell'interpolante spline cubica.

Analizziamo l'errore effettuato da una spline cubica $s_3 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ che interpola le coppie $(x_i, f(x_i))$ dove

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b.$$

E' utile ricordare che

- se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora porremo

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

- $\{\Omega_k\}_{k=1, \dots, M}$ è una suddivisione del dominio Ω se

1. $\Omega = \cup_{k=1}^M \Omega_k$,
2. detta $\delta\Omega_k$ la frontiera di Ω_k allora $(\Omega_i \setminus \delta\Omega_i) \cap (\Omega_j \setminus \delta\Omega_j) = \emptyset$ se $i \neq j$.

Per quanto riguarda l'errore, si può provare (non facile!) quanto segue (cf. [2], p. 163, [1], p. 163)

Teorema 3.3. *Supponiamo $f \in C^4([a, b])$. Posto $h = \max_i (h_i)$, si consideri una successione di suddivisioni Δ_n tale che esista una costante K tale che*

$$\frac{h}{h_j} \leq K, \quad j = 0, \dots, n - 1.$$

Allora esiste una costante c_k indipendente da h tale che

$$\|f^{(k)} - s_{3, \Delta_n}^{(k)}\|_\infty \leq c_k K h^{(4-k)} \|f^{(4)}\|_\infty, \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (9)$$

dove $\|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$, $\Delta_n = \{x_i\}_{i=0, \dots, n}$.

Teorema 3.4. *Supponiamo $f \in C^4([a, b])$. Fissata un'ampiezza $h = (b - a)/n$, si consideri la suddivisione di $[a, b]$ in intervalli equipazati di ampiezza h . Allora esistono delle costanti c_0, c_1, c_2, c_3 indipendenti da h tali che*

$$\|f - s_{3, \Delta_n}\|_\infty \leq c_0 h^4 \|f^{(4)}\|_\infty = c_0 (b - a)^4 \|f^{(4)}\|_\infty / n^4, \quad (10)$$

$$\|f^{(1)} - s_{3, \Delta_n}^{(1)}\|_\infty \leq c_1 h^3 \|f^{(4)}\|_\infty = c_1 (b - a)^3 \|f^{(4)}\|_\infty / n^3, \quad (11)$$

$$\|f^{(2)} - s_{3, \Delta_n}^{(2)}\|_\infty \leq c_2 h^2 \|f^{(4)}\|_\infty = c_2 (b - a)^2 \|f^{(4)}\|_\infty / n^2, \quad (12)$$

$$\|f^{(3)} - s_{3, \Delta_n}^{(3)}\|_\infty \leq c_3 h^1 \|f^{(4)}\|_\infty = c_3 (b - a) \|f^{(4)}\|_\infty / n, \quad (13)$$

dove

- $\|g\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |g(x)|$,
- $\Delta_n = \{x_i\}_{i=0, \dots, n}$, con $x_k = a + kh$, con $k = 0, \dots, n$

- s_{3,Δ_n} è la spline cubica che interpola f nei punti $\{x_k\}_{k=0,\dots,n}$.

Nota 3.5. Si noti come in quest'ultimo teorema si afferma come non solo come la spline approssima la funzione, ma come pure le sue derivate convergano uniformemente alle rispettive derivate della funzione f , qualora n tenda ad infinito.

Nota 3.6. Nel caso di spline interpolanti e vincolate si ha $c_0 = 5/384$, $c_1 = 1/24$, $c_2 = 3/8$. Nel caso di spline di tipo Hermite si ha $c_0 = 1/384$ (cf. [4], p. 301).

3.3. Il controesempio di Runge e spline cubiche

In questa sezione analizziamo numericamente la convergenza delle spline cubiche s_{3,Δ_n} interpolanti in n punti equispaziati

$$x_k = -5 + \frac{10k}{n}, \quad k = 0, \dots, n,$$

la funzione di Runge

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5].$$

In questo caso la suddivisione Δ_n dell'intervallo è determinata naturalmente dai punti $\{x_k\}$ essendo

1. $[-5, 5] = \cup_{k=0}^{n-1} [x_k, x_{k+1}]$,
2. $(x_i, x_{i+1}) \cap (x_j, x_{j+1}) = \emptyset$, se $i \neq j$.

Dopo qualche calcolo si vede che

$$f^{(4)}(x) = \frac{24(5x^4 - 10x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^5}$$

che in $[-5, 5]$ assume massimo in $x = 0$, con valore 24.

Visto che

- $h = h_0 = \dots = h_{n-1} = (b-a)/n$, $K = \max_{i=0,\dots,n-1} h/h_i = 1$,
- $\|f^{(4)}\|_\infty = \max_{x \in [-5,5]} |f^{(4)}(x)| = 24$,

abbiamo per un qualche c_0 indipendente da n

$$\begin{aligned} 0 \leq \|f - s_{3,\Delta_n}\|_\infty &:= \max_{x \in [-5,5]} |f(x) - s_{3,\Delta_n}(x)| \leq c_0 h^4 \|f^{(4)}\|_\infty \\ &= c_0 \frac{(b-a)^4}{n^4} \cdot 24. \end{aligned} \quad (14)$$

Quindi, per il teorema del confronto

$$\lim_n \|f - s_{3,\Delta_n}\|_\infty = 0$$

ovvero le spline cubiche s_{3,Δ_n} che interpolano nei nodi

$$x_k = -5 + k \frac{10}{n}, \quad k = 0, \dots, n$$

la funzione di Runge f , sono tali che la successione $\{s_{3,\Delta_n}\}$ converge uniformemente a f .

n	E_n	n	E_n
2	$9.62e - 01$	512	$1.58e - 07$
4	$7.01e - 01$	1024	$3.93e - 08$
8	$2.46e - 01$	2048	$9.82e - 09$
16	$3.09e - 02$	4096	$2.45e - 09$
32	$1.31e - 03$	8192	$2.15e - 10$
64	$4.81e - 05$	16384	$2.98e - 11$
128	$2.56e - 06$	32768	$6.95e - 13$
256	$6.36e - 07$	65536	$3.08e - 15$

Tabella 2: Grado n ed errore $E_n = \max_{x \in [-5, 5]} |f(x) - s_{3, \Delta_n}^*(x)|$ con $p_{1, n}^*$ interpolante f di tipo cubiche naturali, in $n + 1$ nodi equispaziati. Si osservi come numericamente $E_n \rightarrow 0$ e di come la convergenza sia molto più rapida che nel caso delle spline interpolanti di grado 1.

4. Bibliografia

- [1] K. Atkinson, *Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, 1989.
- [2] V. Comincioli, *Analisi Numerica, metodi modelli applicazioni*, Mc Graw-Hill, 1990.
- [3] Carl DeBoor, *personal homepage*,
<http://pages.cs.wisc.edu/deboor/draftspline.html>.
- [4] A. Suli e D. Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis*, Cambridge University Press, 2003.
- [5] Wikipedia, Funzione Spline,
http://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_spline.
- [6] Wikipedia, Spline Device,
http://en.wikipedia.org/wiki/Spline_%28device%29.
- [7] Wikipedia, Spline Mathematics,
http://en.wikipedia.org/wiki/Spline_%28mathematics%29.
- [8] Wikipedia, Interpolazione Spline,
http://it.wikipedia.org/wiki/Interpolazione_spline.