

Quadratura in Matlab per Ingegneria dell'Energia Laboratorio. ¹

A. Sommariva²

Abstract

Interpolazione spline, esempi.

Ultima revisione: 25 giugno 2019

1. Formula dei trapezi e Cavalieri-Simpson

Due tipiche regole per calcolare integrali definiti, sono quelle dei trapezi e di Cavalieri-Simpson.

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < +\infty$ una funzione continua.

La formula dei trapezi, che è esatta per polinomi di grado al più 1, corrisponde ad approssimare

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

con

$$S_T(f) = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$$

mentre quella di Cavalieri-Simpson, che è esatta per polinomi di grado al più 3, con

$$S_{CS}(f) = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

Vediamone un esempio in Matlab.

Vogliamo approssimare mediante tali regole

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \approx 0.6931471805599453.$$

Nota. 1.1. Posto $t = 1 + x$, abbiamo $dt = dx$, e quindi, per sostituzione e il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \int_1^2 \frac{1}{t} dt \\ &= \log_e(2) - \log_e(1) = \log_e(2) \\ &\approx 0.6931471805599453. \end{aligned} \quad (1)$$

Definiamo

```
demo_quadatural
```

come segue.

```
function demo_quadatural
% demo per paragonare la regola dei trapezi e di ...
% Cavalieri Simpson.
% integranda
f=@(x) 1./(1+x);
% intervallo di integrazione
a=0; b=1;
% risultato esatto
sol=log(2);
% regola dei trapezi
S_T=(b-a)/2*(f(a)+f(b));
% regola di Cavalieri-Simpson
c=(a+b)/2; % punto medio
S_CS=(b-a)/6*(f(a)+4*f(c)+f(b));
% display risultati ed errori assoluti
fprintf('\n \t Integrale esatto: %1.15e',sol);
fprintf('\n \t Regola dei Trap.: %1.15e',S_T);
fprintf('\n \t Regola di Ca.Si.: %1.15e',S_CS);
fprintf('\n ')
fprintf('\n \t Err.Ass.Trap. : %1.15e',abs(sol-S_T));
fprintf('\n \t Err.Ass.Ca.Si.: %1.15e',abs(sol-S_CS));
fprintf('\n \n')
```

Lanciando tale codice da command-window

```
>> demo_quadatural

Integrale esatto: 6.931471805599453e-01
Regola dei Trap.: 7.500000000000000e-01
Regola di Ca.Si.: 6.944444444444443e-01

Err.Ass.Trap. : 5.685281944005471e-02
Err.Ass.Ca.Si.: 1.297263884499023e-03

>>
```

Tutto sommato, nonostante le poche valutazioni della funzione, 2 nel caso della formula dei trapezi e 3 in quella di Cavalieri-Simpson, abbiamo ottenuto una prima approssimazione dell'integrale.

2. Formula dei trapezi composta

Nelle ipotesi della sezione precedente, la quantità

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

è approssimabile mediante la formula dei trapezi composta

$$S_N^{(T)}(f) = \frac{h}{2}f(x_1) + hf(x_2) + \dots + hf(x_N) + \frac{h}{2}f(x_{N+1}) \quad (2)$$

ove

- $x_k = a + k \cdot h, k = 1, \dots, N + 1,$
- $h = \frac{b-a}{N}.$

Si vede facilmente che tale formula è del tipo

$$\sum_{i=0}^{N+1} w_i f(x_i)$$

con

- $w_1 = w_{N+1} = \frac{h}{2},$
- $w_2 = \dots = w_N = h.$

ove

- le ascisse $x_k,$ con $k = 1, \dots, N + 1$ sono dette *nod*i,
- i valori $w_k,$ con $k = 1, \dots, N + 1$ sono detti *pes*i.

Tale formula si ottiene suddividendo $[a, b]$ in N subintervalli aventi la stessa ampiezza, applicando in ognuno di loro la regola dei trapezi.

La funzione `trapezi_composta` appena esposta calcola i nodi e i pesi della omonima formula composta.

```
function [x,w]=trapezi_composta(N,a,b)
% Formula dei trapezi composta.
% input:
% N: numero di subintervalli
% a,b: estremi di integrazione
%
% output:
% x: nodi di integrazione (vettore colonna)
% w: pesi di integrazione (vettore colonna)
%
h=(b-a)/N;           % passo di integrazione
x=a:h:b; x=x';       % nodi di integrazione
w=ones(N+1,1);       % pesi di integrazione
w(1)=0.5; w(N+1)=0.5;
w=w*h;
```

Questo file è relativamente semplice da comprendere.

3. Formula di Cavalieri-Simpson composta

Nelle ipotesi della sezione precedente, la quantità

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

è approssimabile mediante la formula di Cavalieri-Simpson composta

$$S_N^{(CS)}(f) = \frac{h}{3}f(x_1) + \frac{h}{3}f(x_{2N+1}) + \frac{4h}{3} \sum_{s=1}^N f(x_{2s}) + \frac{2h}{3} \sum_{s=1}^{N-1} f(x_{2s+1})$$

ove $x_k = a + (k - 1)h,$ con $k = 1, \dots, 2N + 1,$ ove $h = \frac{b-a}{2N}.$

Si vede facilmente che tale formula è del tipo

$$\sum_{i=0}^{2N+1} w_i f(x_i)$$

- $w_1 = w_{2N+1} = \frac{h}{3},$
- $w_2 = w_4 = \dots = w_{2N} = \frac{4h}{3},$
- $w_3 = w_5 = \dots = w_{2N-1} = \frac{2h}{3},$

con $h = \frac{b-a}{2N}.$

Tale formula si ottiene suddividendo $[a, b]$ in N subintervalli aventi la stessa ampiezza, applicando in ognuno di loro la regola di Cavalieri-Simpson.

La funzione `cavalieri_simpson_composta` sotto esposta calcola i nodi e i pesi della omonima formula.

```
function [x,w]=cavalieri_simpson_composta(N,a,b)
% Formula dei trapezi composta.
% input:
% N: numero di subintervalli
% a,b: estremi di integrazione
%
% output:
% x: nodi di integrazione (vettore colonna)
% w: pesi di integrazione (vettore colonna)
%
% ---- calcolo dei nodi ----
h=(b-a)/(2*N);      % passo "h" della formula
x=a:h:b; x=x';      % nodi
% ---- calcolo dei pesi ----
w=zeros(2*N+1);    % inizializzazione
w(1)=h/3;          % primo peso
w(2*N+1)=h/3;      % ultimo peso
% pesi con indici pari intermedi
ind_pari=2:2:2*N;
w(ind_pari)=4*h/3;
% pesi con indici dispari intermedi
ind_disp=3:2:2*N-1;
w(ind_disp)=2*h/3;
```

Osserviamo che fissato il numero di subintervalli N

- la formula dei trapezi composta ha $N + 1$ punti;
- la formula di Cavalieri-Simpson composta ha $2N + 1$ punti;

Modifichiamo `demo_quadratura1` in `demo_quadratura2`, così da testare tali formule.

Affinchè il numero di valutazioni sia uguale, utilizziamo $N = 10$ intervalli per la formula dei trapezi composta e $N = 5$ intervalli per Cavalieri-Simpson composta, così che entrambe utilizzino 11 valutazioni.

```
function demo_quadratura2
% demo per paragonare la regola dei trapezi e di ...
% Cavalieri Simpson.
% integranda
f=@(x) 1./(1+x);
% intervallo di integrazione
a=0; b=1;
% risultato esatto
sol=log(2);
% formula dei trapezi composta
N=10; % scegliere numero pari
[x,w]=trapezi_composta(N,a,b);
S_T=sum(w.*f(x));
% formula di Cavalieri-Simpson composta
N=N/2;
[x,w]=cavalieri_simpson_composta(N,a,b);
S_CS=sum(w.*f(x));
% display risultati ed errori assoluti
fprintf('\n \t Integrale esatto: %1.15e',sol);
fprintf('\n \t Regola dei Trap.: %1.15e',S_T);
fprintf('\n \t Regola di Ca.Si.: %1.15e',S_CS);
fprintf('\n ')
fprintf('\n \t Err.Ass.Trap. : %1.15e',abs(sol-S_T));
fprintf('\n \t Err.Ass.Ca.Si.: %1.15e',abs(sol-S_CS));
fprintf('\n \n')
```

Digitando `demo_quadratura2` nella command-window

```
>> demo_quadratura2
Integrale esatto: 6.931471805599453e-01
Regola dei Trap.: 6.937714031754280e-01
Regola di Ca.Si.: 6.931502306889304e-01
Err.Ass.Trap. : 6.242226154826724e-04
Err.Ass.Ca.Si.: 3.050128985160327e-06
>>
```

A parità di nodi, la formula composta di Cavalieri-Simpson ha fornito un risultato migliore di quella dei trapezi composta.