Quadratura in Matlab

Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata

25 giugno 2019

Regola dei trapezi e Cavalieri-Simpson

Due tipiche regole per calcolare integrali definiti, sono quelle dei trapezi e di Cavalieri-Simpson.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < +\infty$ una funzione continua.

La formula dei trapezi, che è esatta per polinomi di grado al più 1, corrisponde ad approssimare

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

con

$$S_T(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

mentre quella di Cavalieri-Simpson, che è esatta per polinomi di grado al più 3, con

$$S_{CS}(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

Vediamone un esempio in Matlab.

Esempio

Vogliamo approssimare mediante la regola dei trapezi e Cavalieri-Simpson

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx \approx 0.6931471805599453.$$

Nota.

Posto $t = 1 + x$*, abbiamo* $dt = dx$*, e quindi, per sostituzione e il teorema fondamentale del calcolo integrale:*

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \int_1^2 \frac{1}{t}dt \\ &= \log_e(2) - \log_e(1) = \log_e(2) \\ &\approx 0.6931471805599453. \end{aligned} \tag{1}$$

Definiamo `demo_quadratura1 come segue.`

```
function demo_quadratura1

% demo per paragonare la regola dei trapezi e di Cavalieri Simpson.

% integranda
f=@(x) 1./(1+x);
% intervallo di integrazione
a=0; b=1;
% risultato esatto
sol=log(2);
% regola dei trapezi
S_T=((b-a)/2)*(f(a)+f(b));
% regola di Cavalieri-Simpson
c=(a+b)/2; % punto medio
S_CS=((b-a)/6)*(f(a)+4*f(c)+f(b));

% display risultati ed errori assoluti
fprintf('\n \t Integrale esatto: %1.15e',sol);
fprintf('\n \t Regola dei Trap.: %1.15e',S_T);
fprintf('\n \t Regola di Ca.Si.: %1.15e',S_CS);
fprintf('\n ')
fprintf('\n \t Err.Ass.Trap. : %1.15e',abs(sol-S_T));
fprintf('\n \t Err.Ass.Ca.Si.: %1.15e',abs(sol-S_CS));
fprintf('\n \n')
```

Regola dei trapezi e Cavalieri-Simpson

Lanciando tale codice da command-window

```
>> demo_quadratura1

   Integrale esatto: 6.931471805599453e-01
   Regola dei Trap.: 7.500000000000000e-01
   Regola di Ca.Si.: 6.944444444444443e-01

   Err.Ass.Trap. : 5.685281944005471e-02
   Err.Ass.Ca.Si.: 1.297263884499023e-03

>>
```

Tutto sommato, nonostante le poche valutazioni della funzione, 2 nel caso della formula dei trapezi e 3 in quella di Cavalieri-Simpson, abbiamo ottenuto una prima approssimazione dell'integrale.

Formula dei trapezi composta

Nelle ipotesi della sezione precedente, la quantità

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

è approssimabile mediante la formula dei trapezi composta

$$S_N^{(T)}(f) = \frac{h}{2} f(x_1) + hf(x_2) + \ldots + hf(x_N) + \frac{h}{2} f(x_{N+1}) \qquad (2)$$

ove

- $x_k = a + k \cdot h,\ k = 1, \ldots, N+1,$
- $h = \frac{b-a}{N}$.

Si vede facilmente che tale formula è del tipo $\sum_{i=0}^{N+1} w_i f(x_i)$ con

- $w_1 = w_{N+1} = \frac{h}{2}$,
- $w_2 = \ldots = w_N = h$.

ove

- le ascisse x_k, con $k = 1, \ldots, N+1$ sono dette nodi,
- i valori w_k, con $k = 1, \ldots, N+1$ sono detti pesi.

Formula dei trapezi composta

Tale formula si ottiene suddividendo $[a, b]$ in N subintervalli aventi la stessa ampiezza, applicando in ognuno di loro la regola dei trapezi.

La funzione `trapezi_composta` appena esposta calcola i nodi e i pesi della omonima formula composta.

```
function [x,w]=trapezi_composta(N,a,b)

% Formula dei trapezi composta.

% input:
% N: numero di subintervalli
% a,b: estremi di integrazione
%
% output:
% x: nodi di integrazione (vettore colonna)
% w: pesi di integrazione (vettore colonna)

h=(b-a)/N;                  % passo di integrazione
x=a:h:b; x=x';              % nodi di integrazione
w=ones(N+1,1);              % pesi di integrazione
w(1)=0.5; w(N+1)=0.5;
w=w*h;
```

Formula di Cavalieri-Simpson composta

Nelle ipotesi della sezione precedente, la quantità

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

è approssimabile mediante la formula di Cavalieri-Simpson composta

$$\begin{aligned} S_N^{(CS)}(f) &= \frac{h}{3} f(x_1) + \frac{h}{3} f(x_{2N+1}) + \\ &+ \frac{4h}{3} \sum_{s=1}^{N} f(x_{2s}) + \frac{2h}{3} \sum_{s=1}^{N-1} f(x_{2s+1}) \end{aligned}$$

ove $x_k = a + (k-1)h$, con $k = 1, \ldots, 2N+1$, ove $h = \frac{b-a}{2N}$.

Si vede facilmente che tale formula è del tipo

$$\sum_{i=0}^{2N+1} w_i f(x_i)$$

- $w_1 = w_{2N+1} = \frac{h}{3}$,
- $w_2 = w_4 = \ldots = w_{2N} = \frac{4h}{3}$,
- $w_3 = w_5 = \ldots = w_{2N-1} = \frac{2h}{3}$,

con $h = \frac{b-a}{2N}$.

Formula di Cavalieri-Simpson composta

La funzione `cavalieri_simpson_composta` sotto esposta calcola i nodi e i pesi della omonima formula.

```
function [x,w]=cavalieri_simpson_composta(N,a,b)

% Formula dei trapezi composta.

% input:
% N: numero di subintervalli
% a,b: estremi di integrazione
%
% output:
% x: nodi di integrazione (vettore colonna)
% w: pesi di integrazione (vettore colonna)

% ---- calcolo dei nodi ----
h=(b-a)/(2*N);      % passo "h" della formula
x=a:h:b; x=x';      % nodi
% ---- calcolo dei pesi ----
w=zeros(2*N+1); % inizializzazione
w(1)=h/3;       % primo peso
w(2*N+1)=h/3;  % ultimo peso
% pesi con indici pari intermedi
ind_pari=2:2:2*N;
w(ind_pari)=4*h/3;
% pesi con indici dispari intermedi
ind_disp=3:2:2*N-1;
w(ind_disp)=2*h/3;
```

Formula di Cavalieri-Simpson composta

Osserviamo che fissato il numero di subintervalli N

- la formula dei trapezi composta ha $N + 1$ punti;
- la formula di Cavalieri-Simpson composta ha $2N + 1$ punti;

Modifichiamo `demo_quadratura1` in `demo_quadratura2`, così da testare tali formule.

Affinchè il numero di valutazioni sia uguale,

- utilizziamo $N = 10$ intervalli per la formula dei trapezi composta,
- utilizziamo $N = 5$ intervalli per Cavalieri-Simpson composta,

così che entrambe eseguano 11 valutazioni dell'integranda.

Formula di Cavalieri-Simpson composta

```
function demo_quadratura2

% demo per paragonare la regola dei trapezi e di Cavalieri Simpson.

% integranda
f=@(x) 1./(1+x);
% intervallo di integrazione
a=0; b=1;
% risultato esatto
sol=log(2);
% formula dei trapezi composta
N=10; % scegliere numero pari
[x,w]=trapezi_composta(N,a,b);
S_T=sum(w.*f(x));
% formula di Cavalieri-Simpson composta
N=N/2;
[x,w]=cavalieri_simpson_composta(N,a,b);
S_CS=sum(w.*f(x));
% display risultati ed errori assoluti
fprintf('\n \t Integrale esatto: %1.15e',sol);
fprintf('\n \t Regola dei Trap.: %1.15e',S_T);
fprintf('\n \t Regola di Ca.Si.: %1.15e \n',S_CS);
fprintf('\n \t Err.Ass.Trap. : %1.15e',abs(sol-S_T));
fprintf('\n \t Err.Ass.Ca.Si.: %1.15e \n \n',abs(sol-S_CS));
```

Formula di Cavalieri-Simpson composta

Digitando `demo_quadratura2` nella command-window

```
>> demo_quadratura2

   Integrale esatto: 6.931471805599453e-01
   Regola dei Trap.: 6.937714031754280e-01
   Regola di Ca.Si.: 6.931502306889304e-01

   Err.Ass.Trap. : 6.242226154826724e-04
   Err.Ass.Ca.Si.: 3.050128985160327e-06

>>
```

Commento.

A parità di nodi, la formula composta di Cavalieri-Simpson ha fornito un risultato migliore di quella dei trapezi composta.