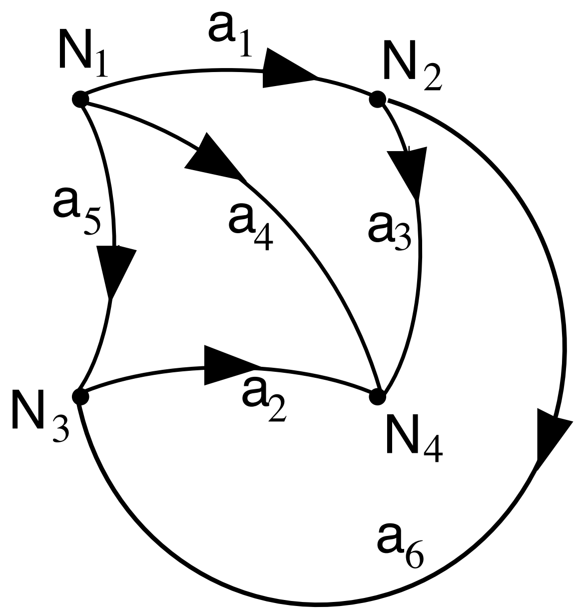
ELETTROTECNICA CIRCUITALE

M. GUARNIERI

FORMULAZIONI TOPOLOGICHE MATRICIALI cap. 4

Matrice di incidenza completa

a)

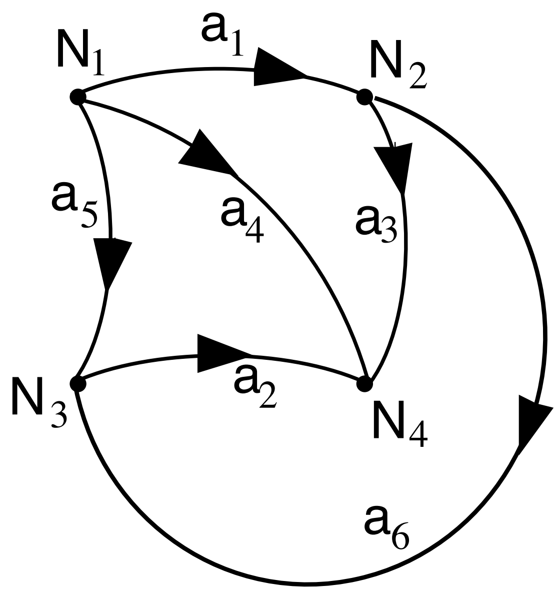


b)

$$
A_a = \begin{array}{c@{}c}
\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array} & \\
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0
\end{array}\right] & \begin{array}{c} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{array}
\end{array}
$$

Matrice di incidenza

a)

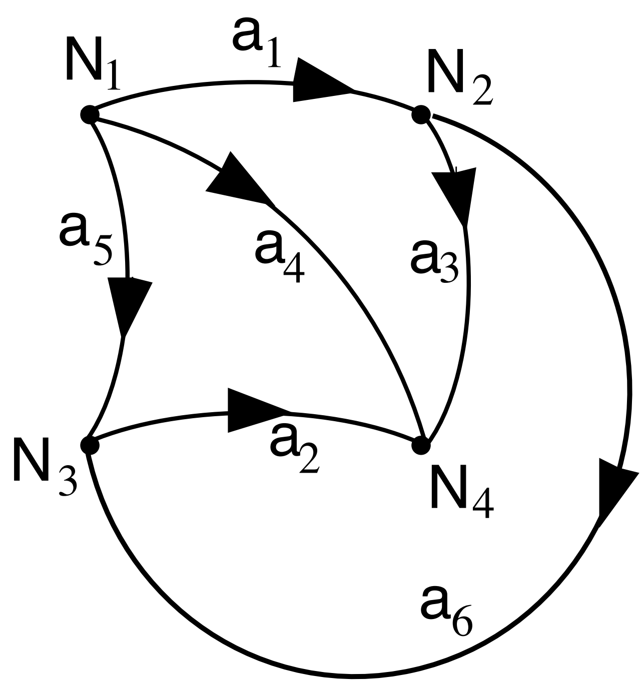


b)

$$
A = \begin{array}{cc}
\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array} & \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{array}
\end{array}
$$

Vettori delle correnti e LKC

$$A = \begin{array}{c c} \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{matrix} \end{array}$$



$$\boldsymbol{i} \triangleq \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix}$$

Prodotto matriciale riga-colonna:

$$\mathbf{A}\,\boldsymbol{i}$$

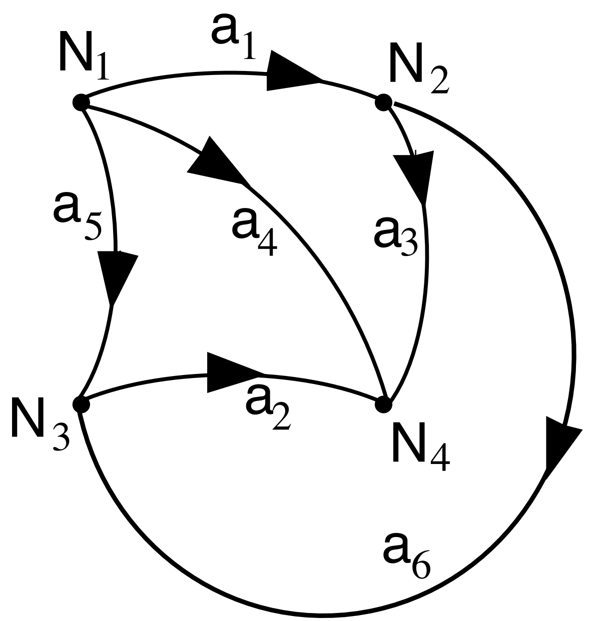
$$\begin{cases} i_1+0+0+i_4+i_5+0=0 \\ -i_1+0+i_3+0+0+i_6=0 \\ 0+i_2+0+0-i_5-i_6=0 \end{cases}$$

LKC matriciale

$$\mathbf{A}\,\boldsymbol{i} = \mathbf{0}$$

Vettori delle tensioni e LKT

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} N_1 & N_2 & N_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} \qquad \boldsymbol{v} \triangleq \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{u} \triangleq \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$



Prodotto matriciale riga-colonna:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u}$$

$$\begin{cases} u_1 - u_2 + 0 = v_1 \\ 0 + 0 + u_3 = v_2 \\ u_1 + 0 + 0 = v_3 \\ 0 + u_2 + 0 = v_4 \\ u_1 + 0 - u_3 = v_5 \\ 0 + u_2 - u_3 = v_6 \end{cases}$$

LKT matriciale

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$$

A e LKC e LKT

$$\mathbf{A}\,\boldsymbol{i} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$$

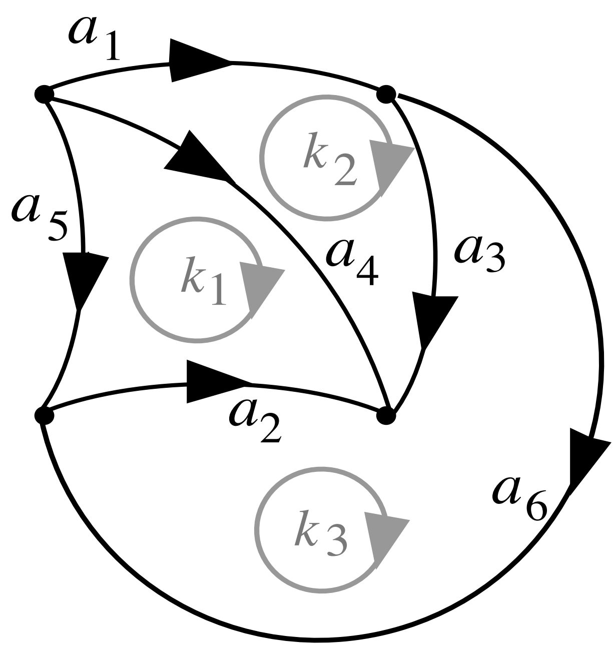
$$\boldsymbol{i} \triangleq \begin{bmatrix} i_1(t) & i_2(t) & \dots & i_h(t) & \dots & i_\ell(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{v} \triangleq \begin{bmatrix} v_1(t) & v_2(t) & \dots & v_h(t) & \dots & v_\ell(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{u} \triangleq \begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \dots & u_h(t) & \dots & u_{n-1}(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Matrice d'anello B e LKC e LKT

Per reti piane:
B (axℓ) mappa i lati che formano ciascun anello



$$\mathbf{B}\,\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{v} \triangleq \begin{bmatrix} v_1(t) & v_2(t) & \dots & v_h(t) & \dots & v_\ell(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{i} \triangleq \begin{bmatrix} i_1(t) & i_2(t) & \dots & i_h(t) & \dots & i_\ell(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{k} = [k_1(\mathrm{t}) \ \dots . \ k_m(\mathrm{t})]^{\mathrm{T}}$$

FORMULAZIONI MATRICIALI DELLE LEGGI TOPOLOGICHE

$$
\begin{array}{lll}
LKC & \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}\, \boldsymbol{i} = \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \\ \mathbf{B}\, \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \end{array} \right. \\
LKT & &
\end{array}
$$

DUALITA' TOPOLOGICHE

grandezza elettrica	**corrente**	**tensione**
legge di Kirchhoff	LKC	LKT
1° sottografo	insieme di taglio	maglia
2° sottografo numero di elementi	nodo n	anello* a_s
3° sottografo e numero di lati	albero $r=n-1$	coalbero $c=\ell-n+1$ $(c=a_s-1=a^*)$
equazioni indipendenti per il 1° sottografo	$t=n-1$, ad un sistema di insiemi di taglio indipendenti	$m=\ell-n+1$, ad un sistema di maglie indipendenti
equazioni indipendenti per il 2° sottografo	t a $n-1$ nodi (si esclude il nodo di massa)	m a $a_s-1=a$ anelli* (si esclude l'anello esterno)
equazioni indipendenti per il 3° sottografo	t a ad un sistema di r insiemi di taglio fondamentali	m ad un sistema di c maglie fondamentali
il sottografo 1° ammette come casi particolari i sottografi 2° e 3° i sottografi 2° e 3° possono non coincidere		
n° di grandezze indipendenti e dipendenti	m correnti indipendenti, $n-1$ correnti dipendenti	$n-1$ tensioni indipendenti, m tensioni dipendenti
grandezze indipendenti ausiliarie	m correnti cicliche	$n-1$ potenziali ai nodi
grandezze dipendenti e vincoli con le variabili ausiliarie	ℓ correnti di rete espresse come somma algebrica di correnti cicliche (come differenze di due correnti d'anello*)	ℓ tensioni di rete espresse come d.d.p.