Università di Padova - Scuola di Ingegneria

Massimo Guarnieri

Elettrotecnica

Capitolo 5
Reti di bipoli

Analisi di una rete elettrica

Per una rete di ℓ porte (=lati), consiste nella determinazione di:

ℓ tensioni di lato $\{v\}$ + ℓ correnti di lato $\{i\}$ = 2ℓ incognite

sapendo come è fatta la rete = conoscendo topologia e tipologia

Strumenti:

ℓ equazioni tipologiche (una per bipolo o per porta) +

ℓ equazioni topologiche (n–1 LKC e m LKT) =

———————————————

2ℓ vincoli

Quindi il problema sembra ben posto, …

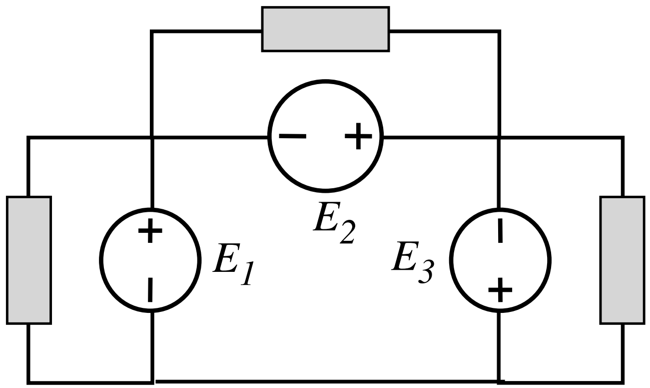
ma in realtà nasconde varie insidie e difficoltà

Esistenza della soluzione

Perché la soluzione esista bisogna che le 2ℓ equazioni siano **indipendenti** e **compatibili.** Questo non avviene nel caso di **strutture singolari** (**patologiche**) **di rete**.

- Primo caso - **equazioni dipendenti**: i vincoli reali sono meno di 2ℓ sicché la soluzione (almeno in qualche tensione o correte) è indeterminata → **la rete è indeterminata**.

Esempio



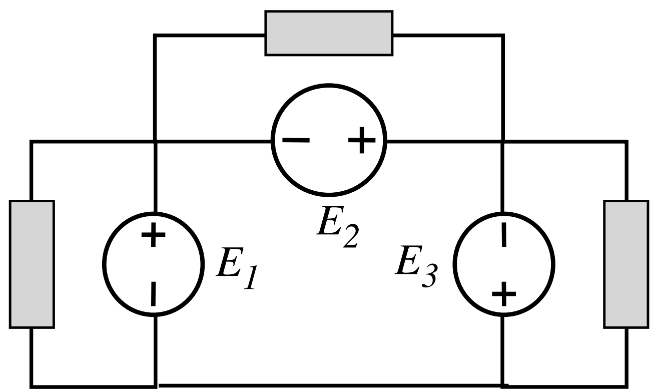
Se E_1=100 V, E_2=50 V, E_3=–150 V, questi valori verificano la equazione LKT all'anello interno: $E_1+E_2+E_3=0$, per cui le 4 equazioni non sono tra loro indipendenti → è indeterminata la corrente dell'anello interno, e quindi quelle dei tre generatori

Esistenza della soluzione

Perché la soluzione esista bisogna che le 2ℓ equazioni siano **compatibili** e **indipendenti.** Questo non avviene nel caso di strutture singolari (patologiche) di rete.

- Secondo caso - **equazioni incompatibili**: i vincoli sono incompatibili e la soluzione non esiste → la **rete è impossibile**

Esempio



Se E_1=200 V, E_2=50 V, E_3=–150 V, questi valori incompatibili con la equazione LKT all'anello interno: $E_1+E_2+E_3=0$, non possono coesistere → la soluzione non esiste, ovvero tale rete non può esistere. Similmente, un generatore di tensione con $E\neq0$ non può essere cortocircuitato, come già visto.

Reti lineari e non-lineari

Se le equazioni sono **compatibili** ed **indipendenti**, la rete ammette soluzione. **A noi interessa analizzare solo queste reti**

Però resta ancora un problema: le equazioni tipologiche di bipolo, $f(v,i)=0$ o $F[v(t),i(t)]=0$, possono essere non lineari.

Se le **equazioni tipologiche sono lineari**

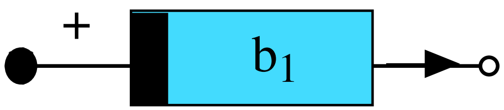
→ Il sistema è lineare produce soluzione unica in tutte le correnti e le tensioni

Se le **equazioni tipologiche sono non-lineari**

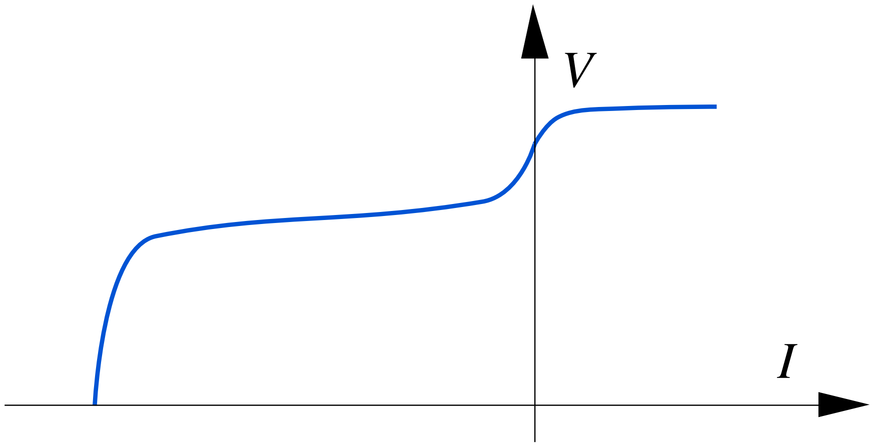
→ Il sistema è non lineare e alcune correnti e/o tensioni possono presentare soluzioni multiple

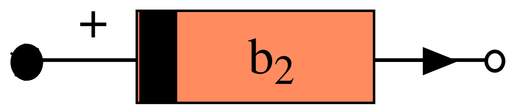
Punto di lavoro di rete di 2 bipoli -1

Caso semplicicissimo di **analisi di rete non lineare**: rete in regime stazionario costituita da due bipoli b_1 e b_2 di caratteristiche statiche note

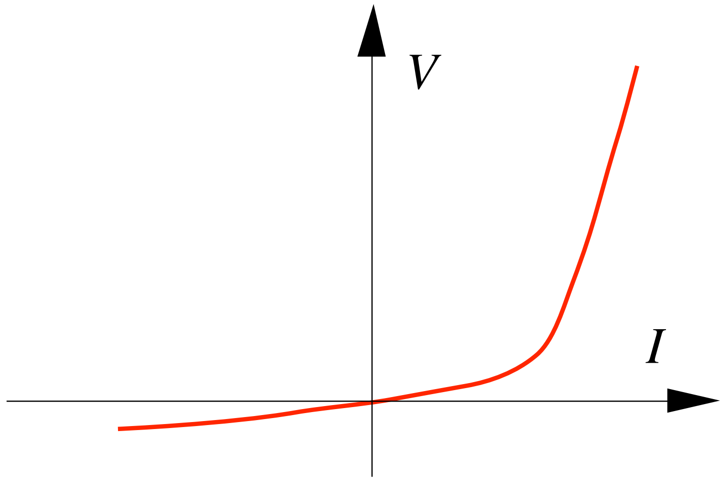


batteria ricaricabile (a piena carica)



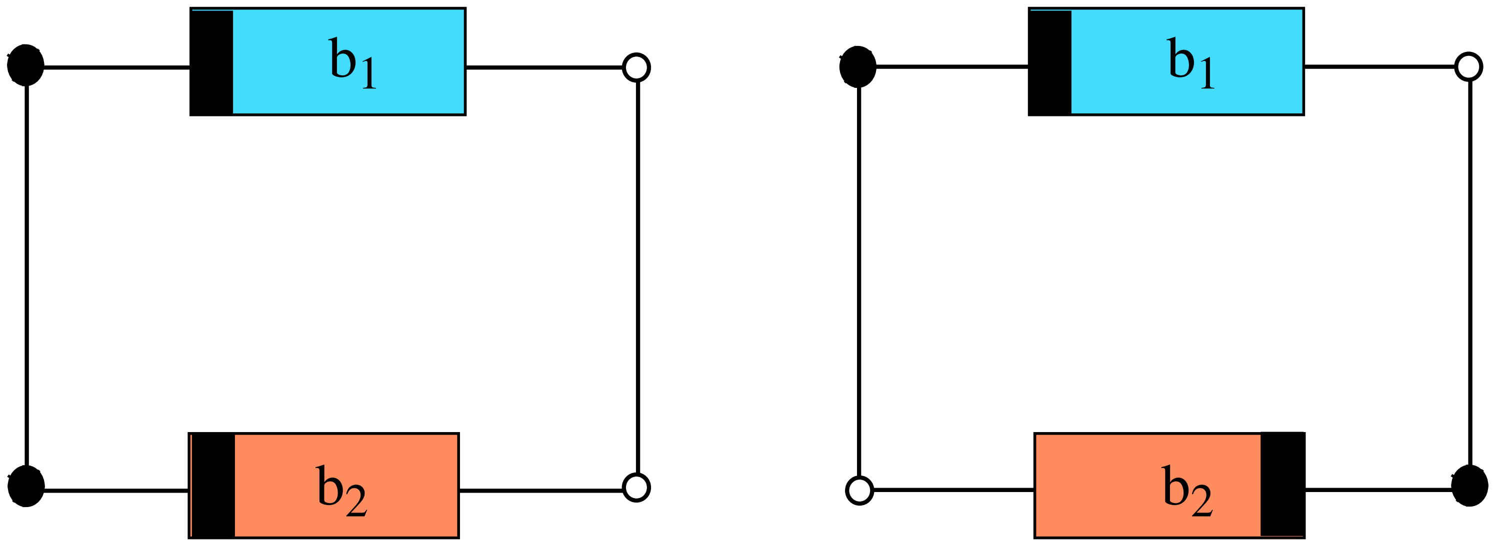


resistore convesso



Punto di lavoro di rete di 2 bipoli -2

Con essi si possono costruire due reti



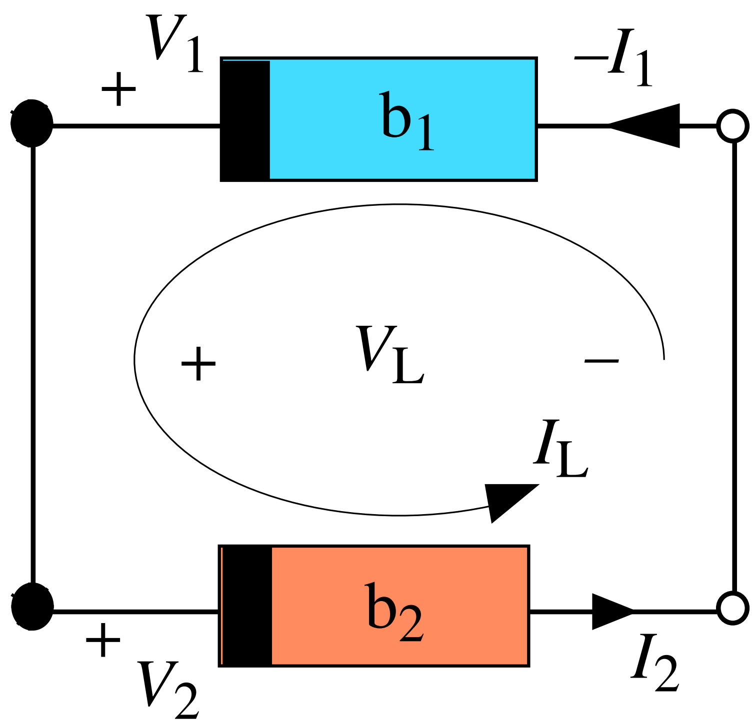
Punto di lavoro di rete di 2 bipoli -3

metodo grafico

con i riferimenti posti, valgono
le equazioni della LKC e LKT
(= vincoli tipologici)

$I_1' = -I_1 = I_2 = I_L$

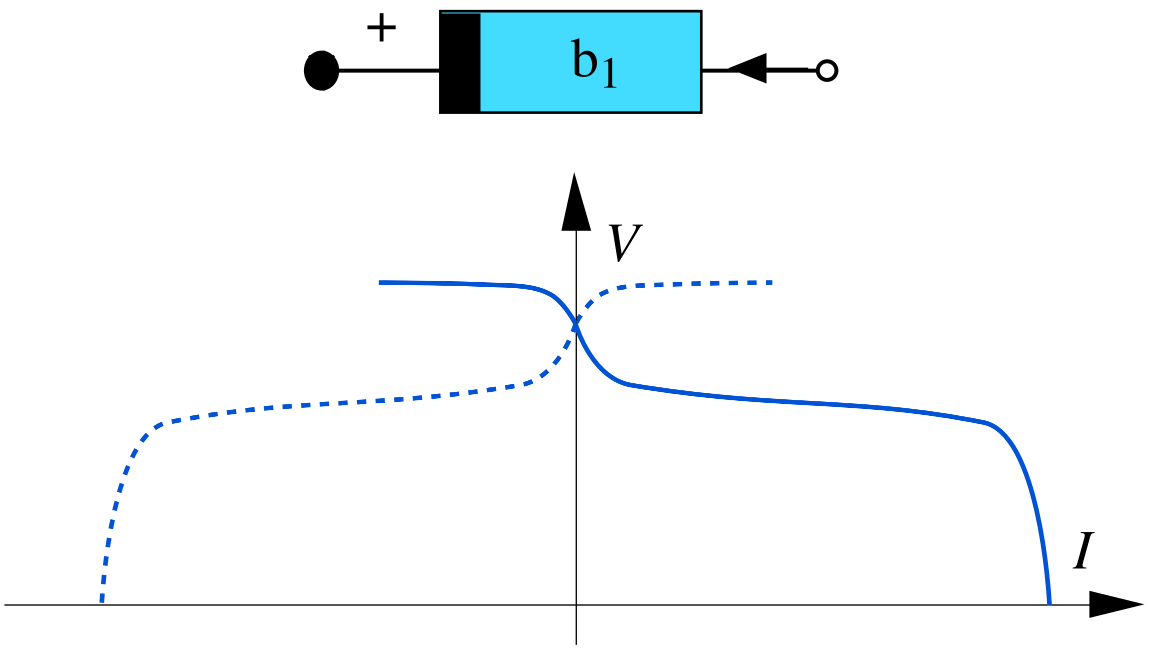
$V_1 = V_2 = V_L$

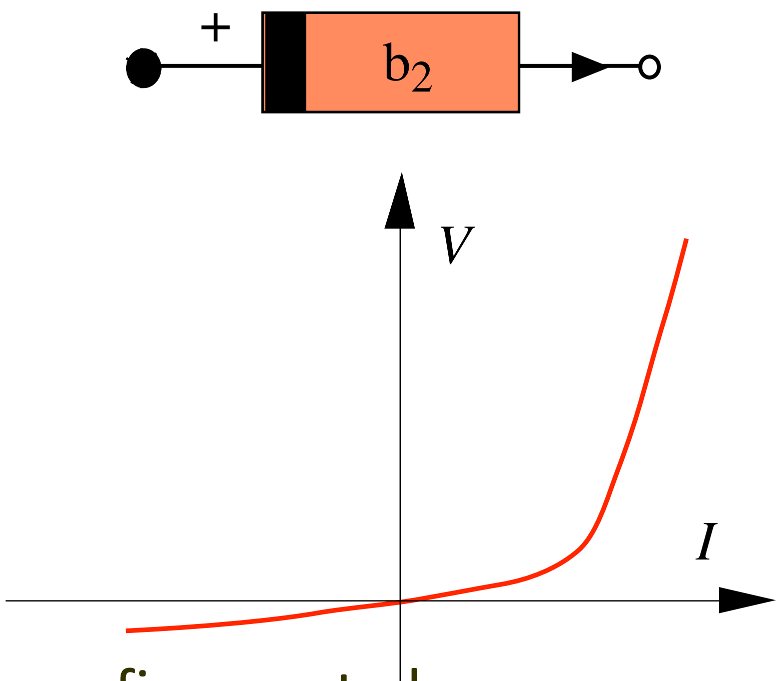


(I_L, V_L) è il punto di lavoro comune ai due bipoli

Punto di lavoro di rete di 2 bipoli -4

Rovesciamento del riferimento di I_1

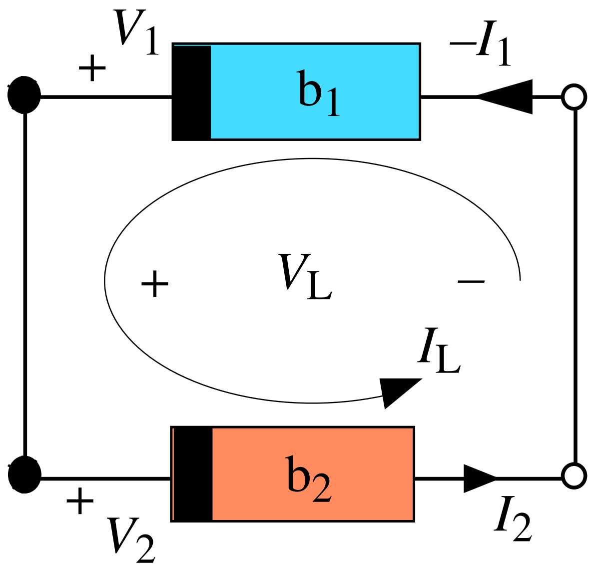




Queste caratteristiche statiche esprimono graficamente le caratteristiche tipologiche dei bipoli, ossia i vincoli tipologici della rete

Punto di lavoro di rete di 2 bipoli -5

I vincoli topologici impongono che i due bipoli abbiano lo stesso punto di lavoro

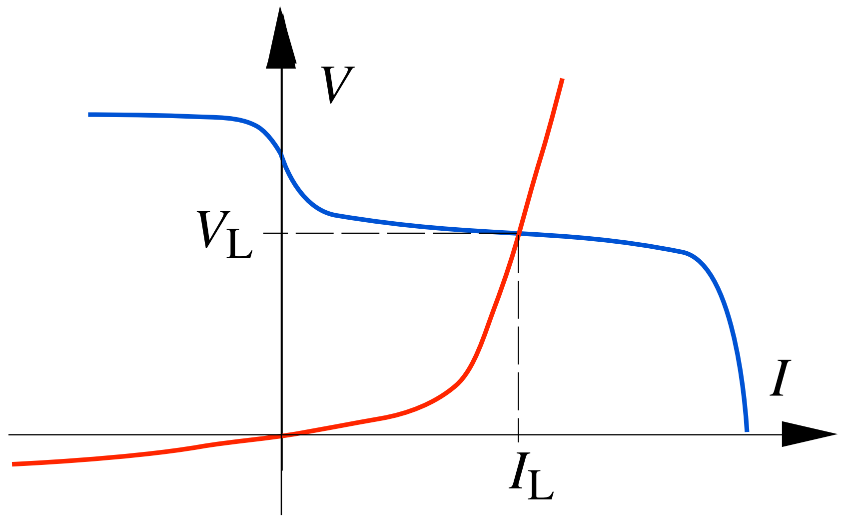


$I_1' = -I_1 = I_2 = I_L$

$V_1 = V_2 = V_L$

Quindi bisogna cercare sulle caratteristiche statiche punti con la stessa corrente e la stessa tensione

→ Si trova immediatamente sovrapponendo le due caratteristiche e cercandone l'intersezione

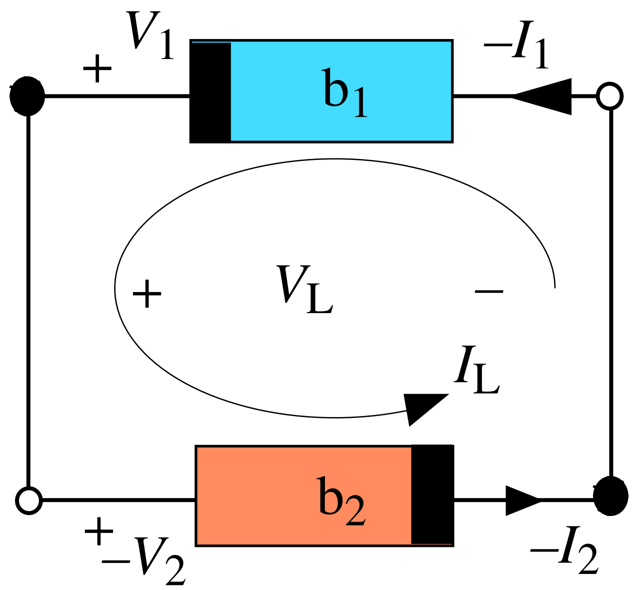


Punto di lavoro di rete di 2 bipoli - 6

Note:

- se le due caratteristiche sono entrambe monotone e la soluzione esiste, questa è unica
- Il metodo grafico è semplice ed intuitivo, ma poco preciso e poco adatto a reti più complesse.

Esercizio: risolvere la seconda rete costruibile con gli stessi bipoli.

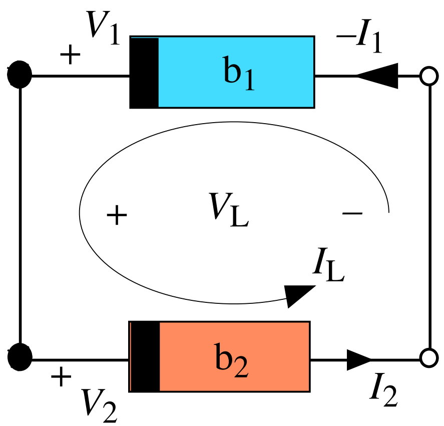


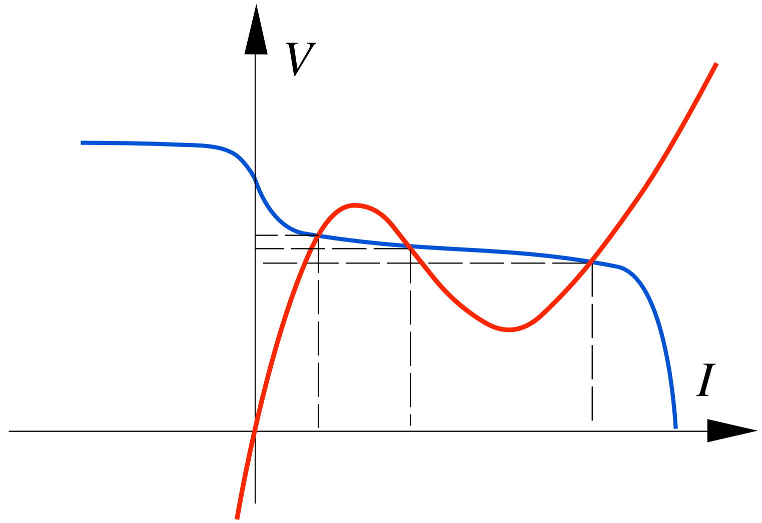
Punto di lavoro di rete di 2 bipoli - 7

Soluzioni multiple

Se una caratteristica non è monotona possono apparire più intersezioni → più punti di lavoro teoricamente possibili (in quanto tutti compatibili con il modello reti usato).

Esempio: il bipolo b_2 è un tubo a scarica → alimentato dalla batteria può presentare tre punti di lavoro (I, V)

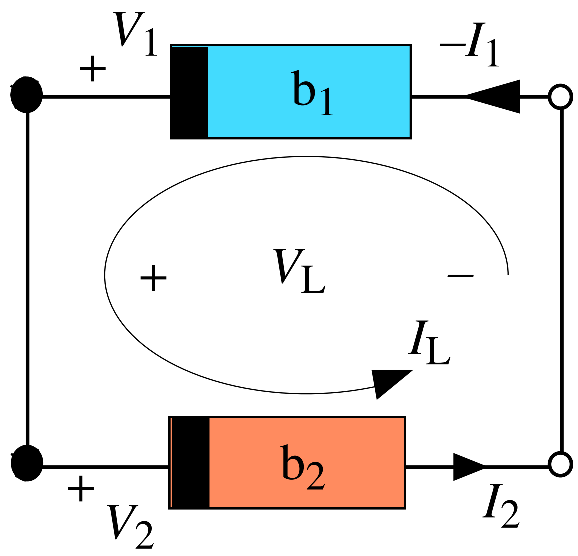




Problema: quale sarà il punto di lavoro di una rete reale, rappresentata da questo modello? → questo modello è inadeguato a dirlo, ne serve uno più ricco di informazioni

Punto di lavoro di rete di 2 bipoli - 8

metodi numerici per reti non lineari



Si usano le equazioni tipologiche in forma analitica: $V_1=f_1(-I_1)$ e $V_2=f_2(I_2)$

che possono essere sostituite nelle equazioni topologiche $-I_1=I_2$ e $V_1=V_2$ ottenendo:

$$f_1(I_2)=f_2(I_2)$$

ossia, ponendo $I_2=x$

$$f_1(x)-f_2(x)=0 \rightarrow f(x)=0$$

essendo f la funzione ottenuta dalla differenza di f_1 e f_2. Il problema è così ridotto alla ricerca dello zero di una funzione, per la quale esistono vari metodi numerici, tipicamente iterativi

Reti di soli bipoli

Consideriamo ora proprietà che valgono per le reti di soli bipoli

Teoremi di non amplificazione delle tensioni e correnti

Se in una rete di bipoli nell'istante *t* un solo bipolo eroga potenza e tutti gli altri ne assorbono, tensione e corrente del bipolo erogante hanno moduli massimi tra tutte le tensioni e correnti dei bipoli della rete.

Ovvero, detti *ab* i nodi cui si appoggia il bipolo erogante e *rs* quelli generici di tutti gli atri bipoli che assorbono:

$$|v_{ab}| \geq |v_{rs}| \qquad \forall\ r,s$$

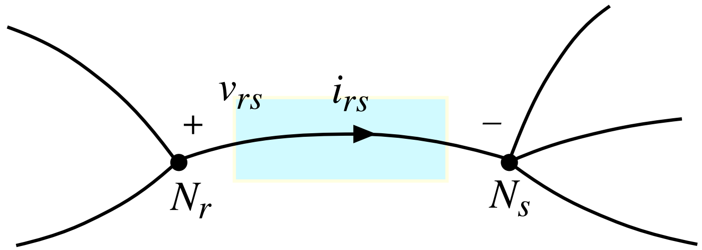
$$|i_{ab}| \geq |i_{rs}| \qquad \forall\ r,s$$

n.b.: il bipolo che eroga può essere un generatore (bipolo attivo) o un bipolo passivo in condizioni di erogare; i bipoli che assorbono possono essere bipoli passivi e/o generatori

Dimostrazione per la tensione -1

Dimostrazione del teorema di non amplificazione delle tensioni

Usiamo la convenzione degli utilizzatori

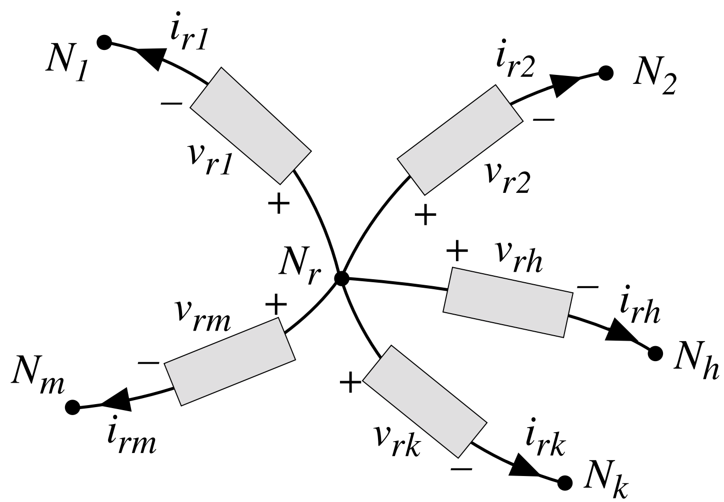


Bipolo erogante: $p_{\text{ab}} = v_{\text{ab}}\, i_{\text{ab}} < 0$

altri bipoli: $p_{\text{rs}} = v_{\text{rs}}\, i_{\text{rs}} > 0 \quad \text{rs} \neq \text{ab}$

LKC nel nodo $\text{r} \neq \text{a,b}$:

$$i_{r1}+i_{r2}+ \ldots\ i_{rh}+ i_{rk} \ldots +i_{rm}= 0$$



→ Esiste almeno una corrente positiva e una negativa:

$$i_{rh} > 0 \qquad \text{e} \qquad i_{rk} < 0$$

Dimostrazione per la tensione -2

La potenze di tali lati è: $p_{rh} = v_{rh}\, i_{rh} > 0$ e $p_{rk} = v_{rk}\, i_{rk} > 0$

→ $v_{rh} > 0$ e $v_{rk} < 0$

LKT: $v_{rh} = u_r - u_h$ e $v_{rk} = u_r - u_k$

→ $u_r > u_h$ e $u_r < u_k$

→un nodo come *r*, toccato solo da bipoli che assorbono potenza, ha potenziale elettrico intermedio tra quello di altri nodi

→i potenziali massimo e minimo stanno nei nodi a e b, toccati anche dall'unico bipolo che eroga, ossia u_A e u_B sono i potenziali massimo e minimo:

$$|\ u_a - u_b| \geq |\ u_r - u_s| \qquad \forall\ \mathrm{r,s}$$

→ $$|v_{ab}| \geq |v_{rs}| \qquad \forall\ \mathrm{r,s}$$

Teorema di sostituzione

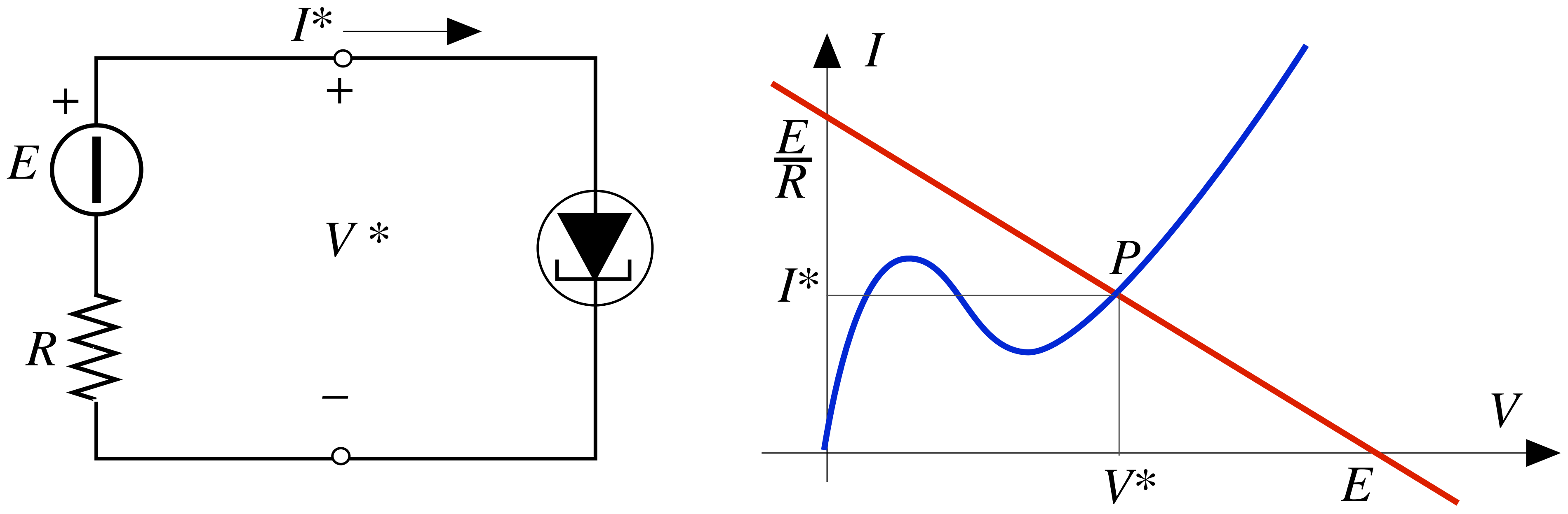
Data una rete a soluzione unica per tutte le tensioni e le correnti

- si consideri il bipolo che costituisce il generico lato a_k, avente corrente i_k e tensione v_k
- si sostituisca tale lato con: un GIT avente tensione impressa $e^* = v_k$; oppure con un GIC avente c.i. $j^* = i_k$
- se la rete così modificata ha pure soluzione unica per tutte le tensioni e tutte le correnti

→ **tensioni e correnti sono uguali a quella della rete originale**

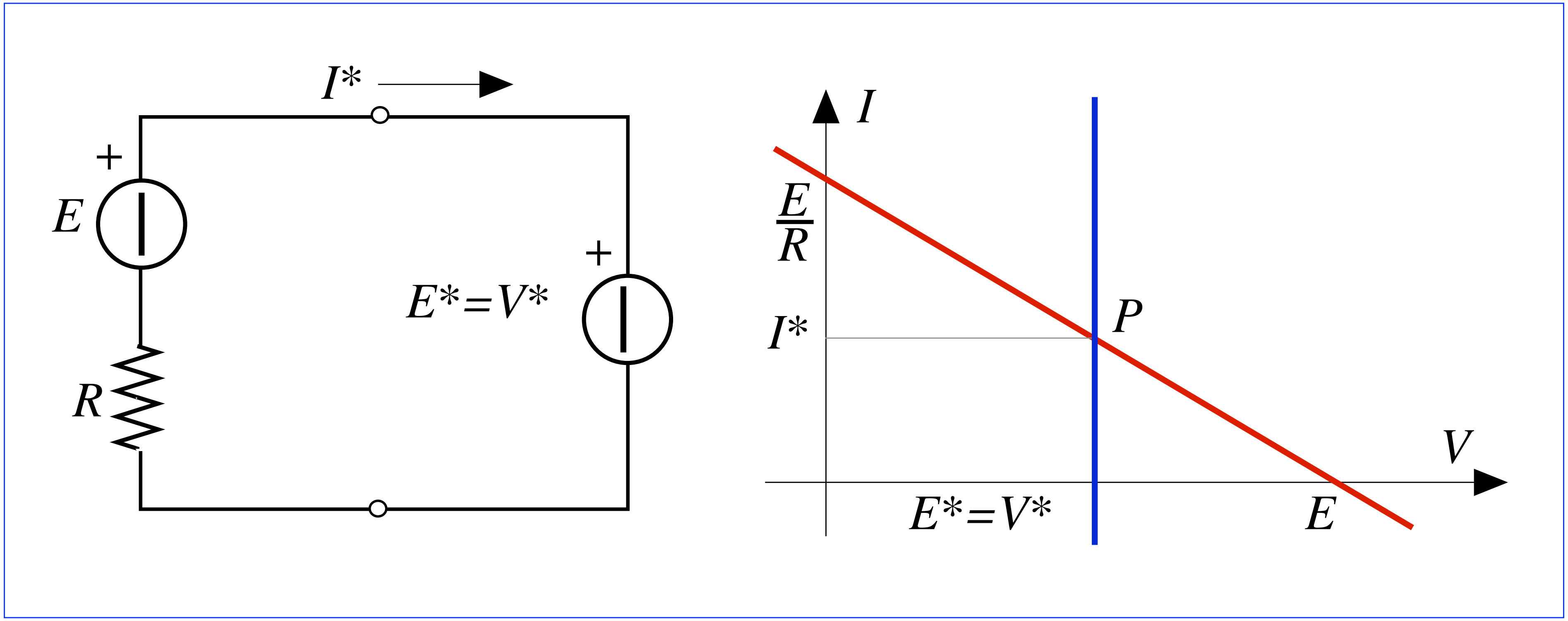
Applicazione -1

Applichiamo il teorema di sostituzione a questa rete GIT e diodo tunnel, che ha soluzione unica, in 4 modi diversi



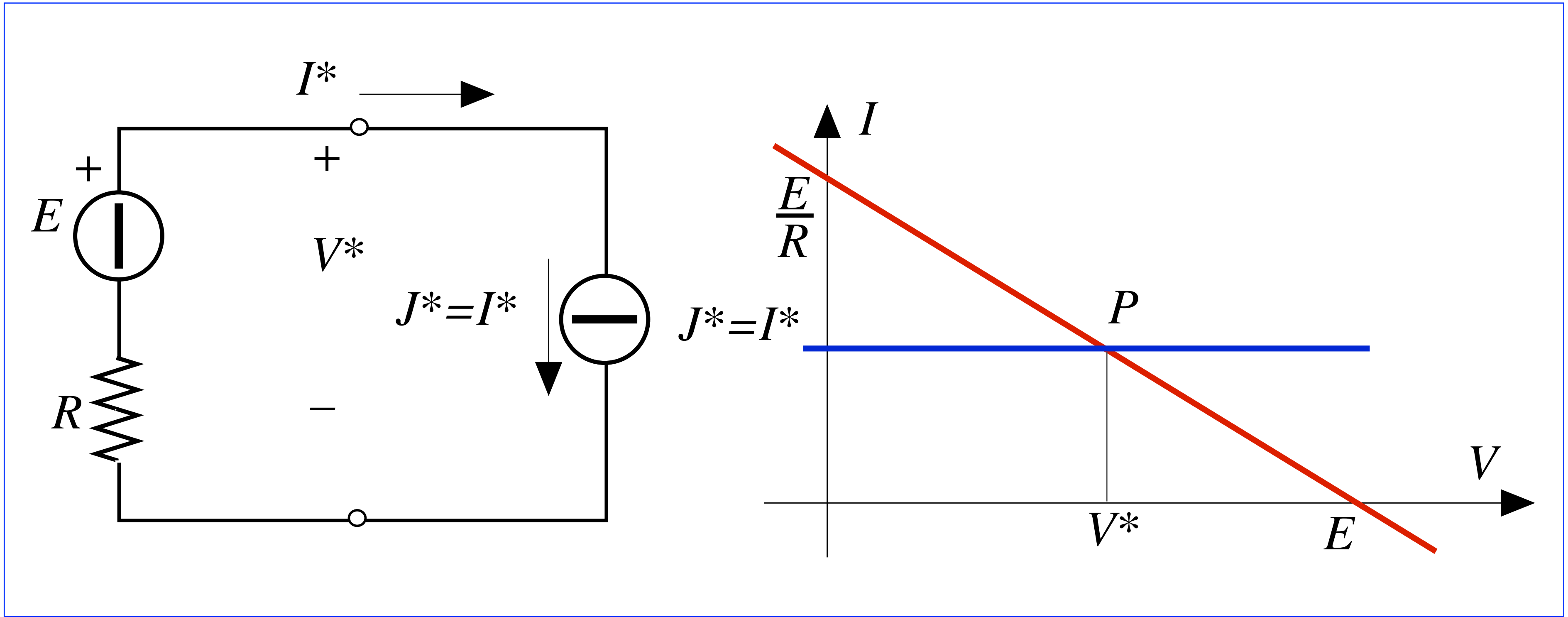
Applicazione -2

Sostituzione del diodo tunnel con *E** → soluzione unica
→ la sostituzione è lecita= si ottiene lo stesso punto di lavoro



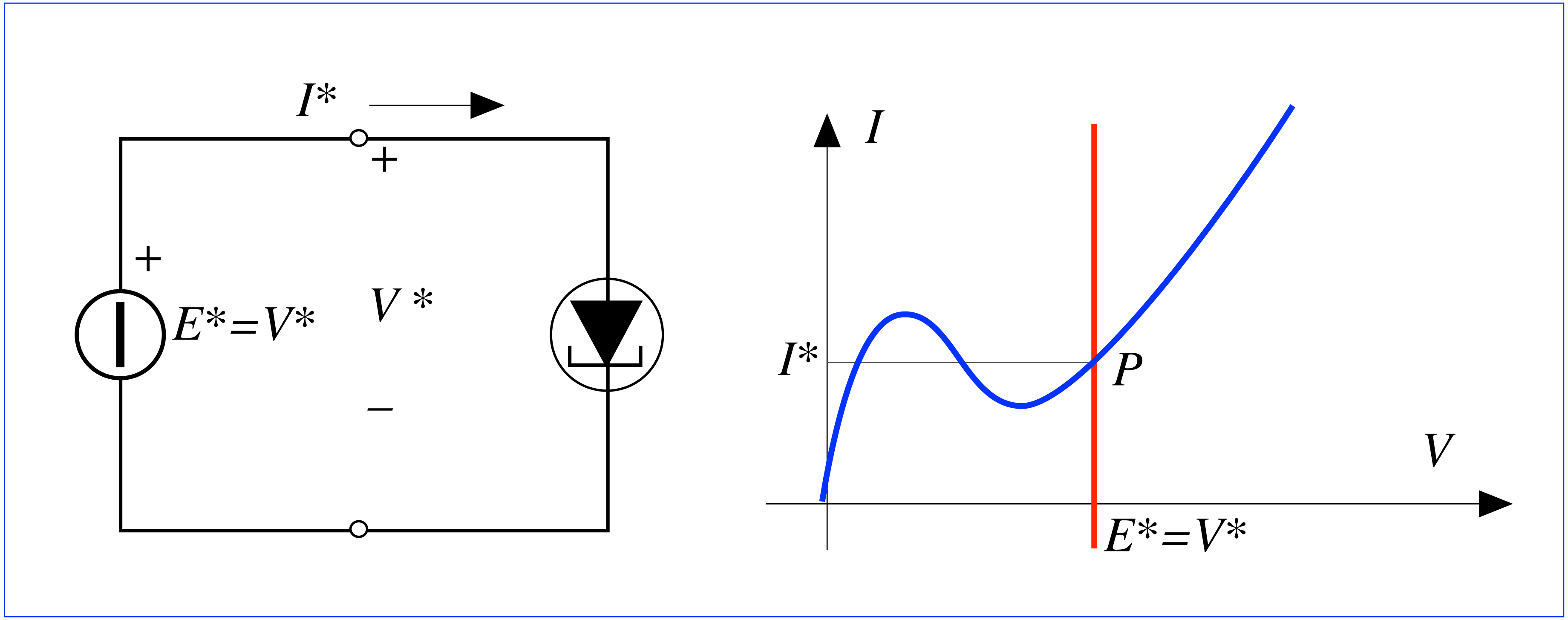
Applicazione -3

Sostituzione del diodo tunnel con *J**→ soluzione unica
→ la sostituzione è lecita= si ottiene lo stesso punto di lavoro



Applicazione -4

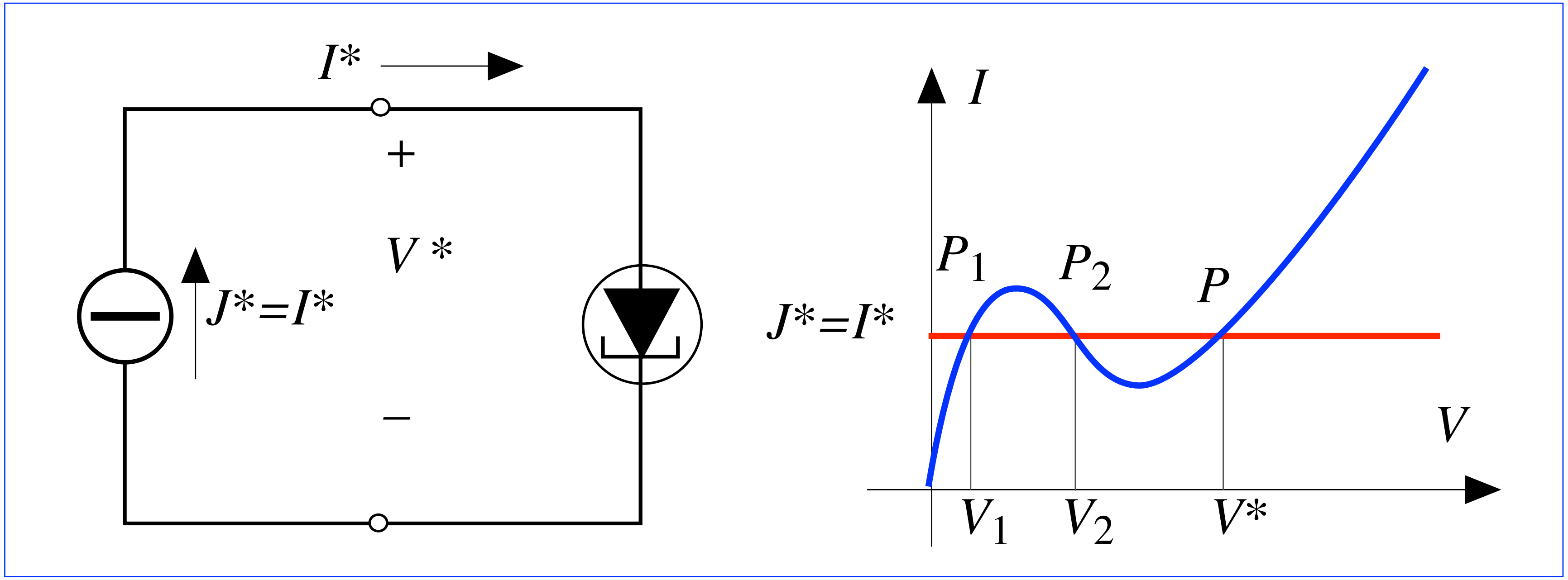
Sostituzione del GIT con *E** → soluzione unica
→ la sostituzione è lecita= si ottiene lo stesso punto di lavoro



Applicazione -5

Sostituzione del GIT con J^* → soluzione multipla

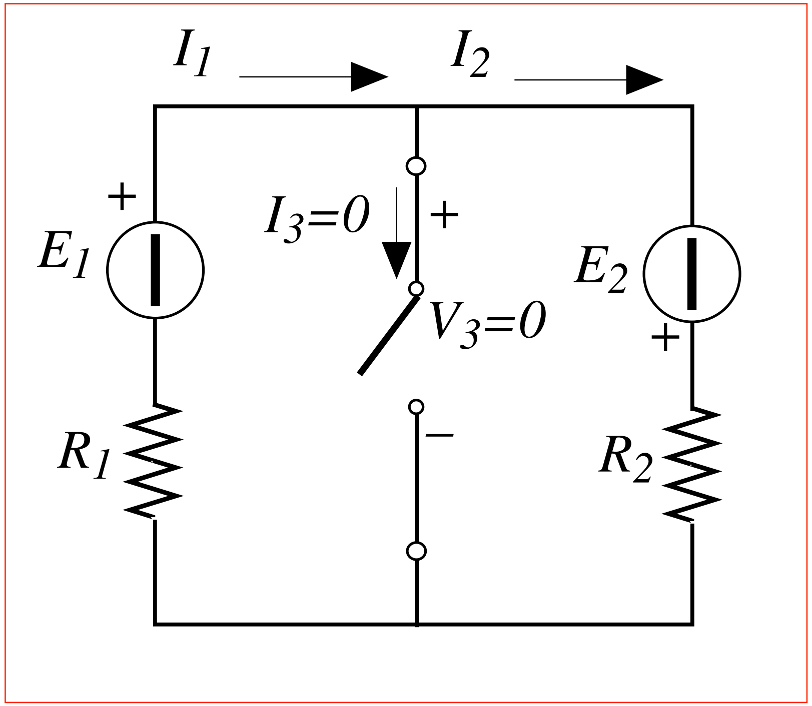
→ la sostituzione è illecita perché i punti di lavoro possono essere diversi



Applicazione -6

Se:

$$\frac{E_1}{R_1} = \frac{E_2}{R_2} \qquad \rightarrow \qquad V_3 = 0$$

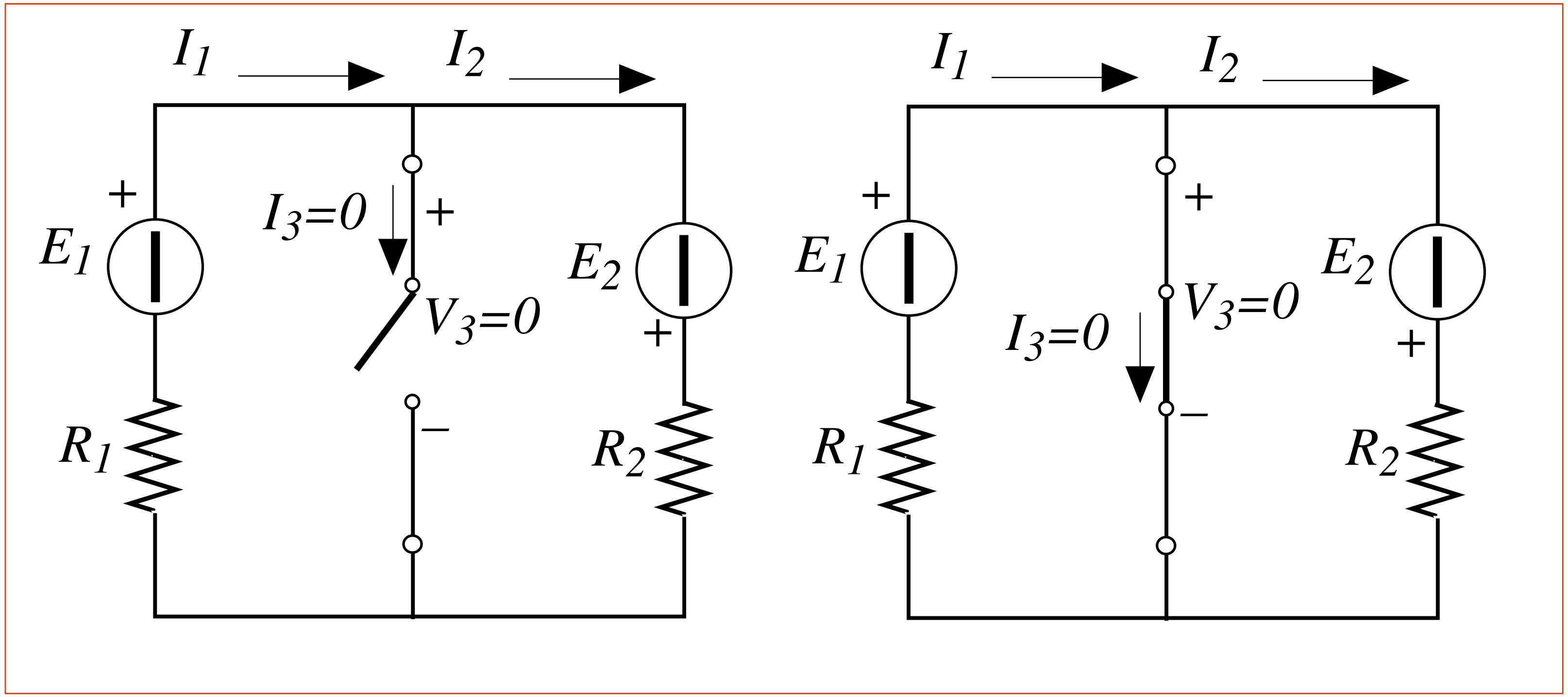


Applicazione della sostituzione
l'interruttore aperto può essere sostituito con un GIT avente tensione impressa

$$E^* = V_3 = 0$$

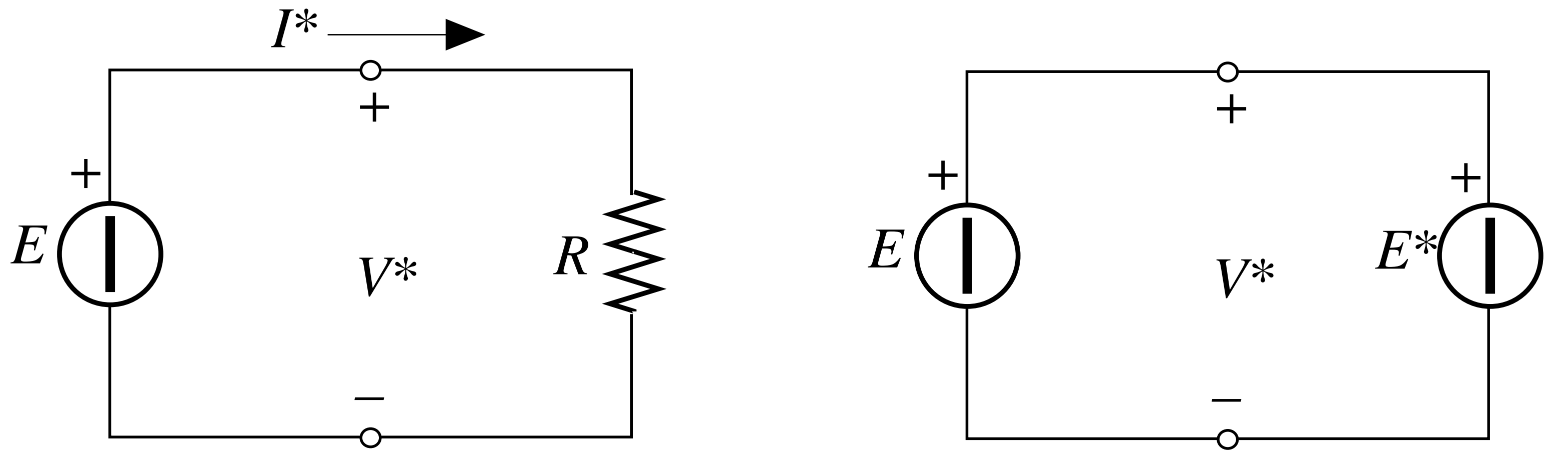
Ma un GIT con E=0 è un cortocircuito (= interruttore chiuso).
La sostituzione non muta le correnti e tensioni della rete:
in particolare rimane I_3=0. →

Applicazione -7



Quindi: in una rete a soluzione unica un interruttore aperto con tensione nulla può essere chiuso, e viceversa, un interruttore chiuso con corrente nulla può essere aperto, senza che nessuna tensione e corrente cambi

Sostituzione illecita in rete lineare



Questa è una sostituzione illecita, perché nella rete originale (a sinistra) *I*=E/R*, mentre la rete con sostituzione (a destra) è indeterminata (ha ha corrente indeterminata).