

Università di Padova - Scuola di Ingegneria

Massimo Guarnieri

Elettrotecnica

Capitolo 7

Generatori affini adinamici (regime stazionario)

Bipolo (generatore) affine

PONIAMOCI IN REGIME STAZIONARIO

È un bipolo con caratteristica statica rettilinea
(qui convenzionato da generatore)

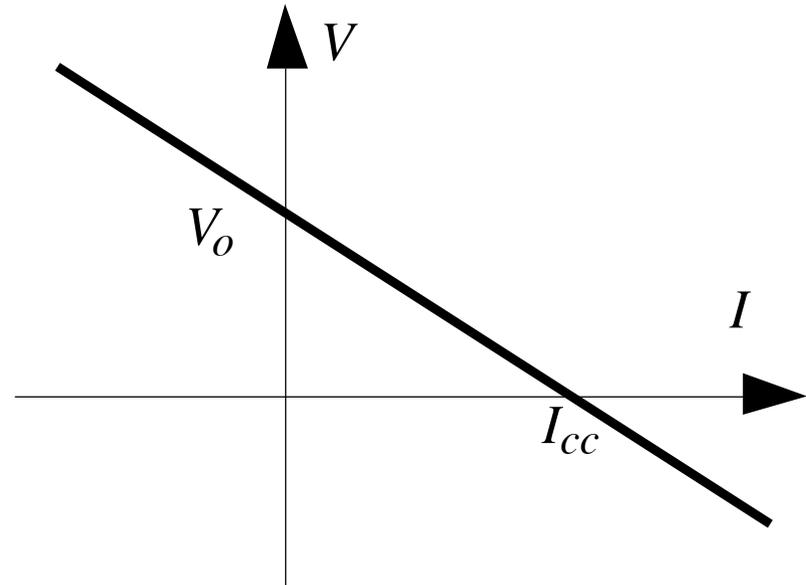
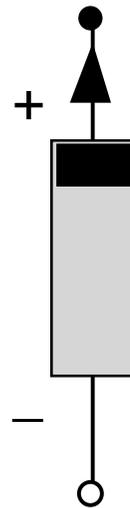
$$mV + nI = X$$

$$\rightarrow V = X/m - n/m I$$

$$\rightarrow V = E - R I$$

$$\rightarrow I = X/n - m/n V$$

$$\rightarrow I = J - G V$$



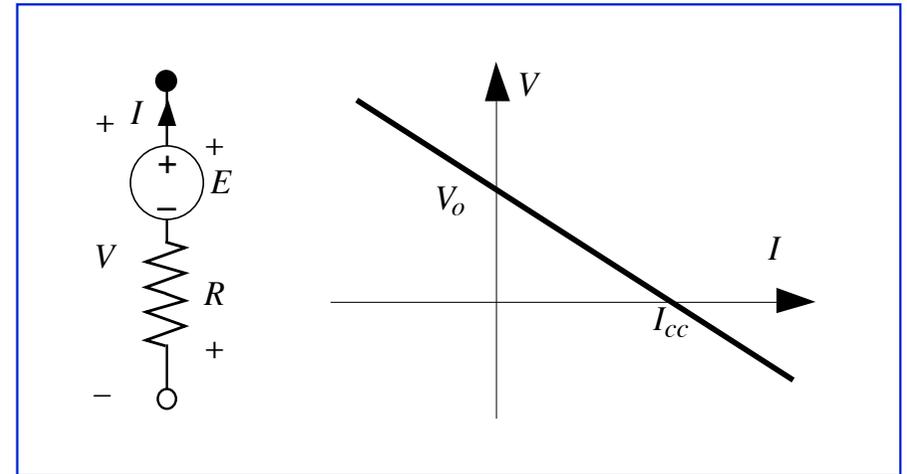
Generatore affine di tensione - GAT

Con la convenzione dei generatori
(una delle due possibili):

$$V = E - R I$$

$$\text{se } I = 0 \quad \rightarrow \quad V_o = E$$

$$\text{se } V = 0 \quad \rightarrow \quad I_{cc} = E / R = V_o / R$$

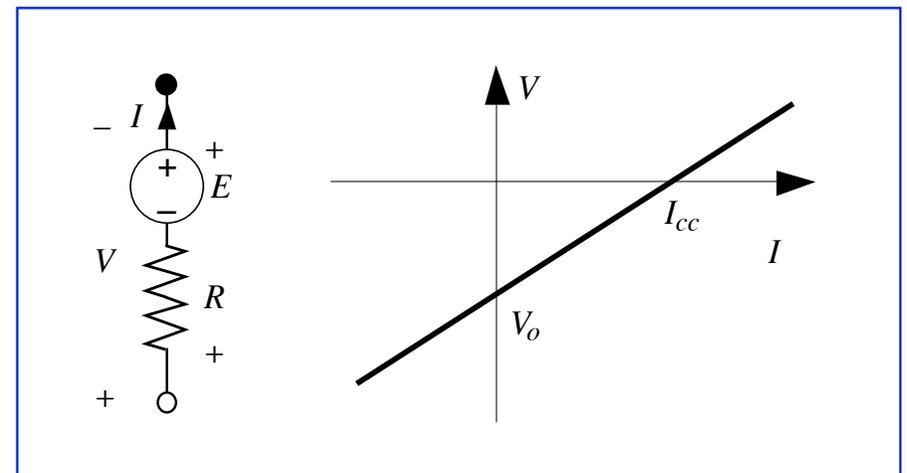


Con la convenzione degli utilizzatori
(una delle due possibili):

$$V = -E + R I$$

$$\text{se } I = 0 \quad \rightarrow \quad V_o = -E$$

$$\text{se } V = 0 \quad \rightarrow \quad I_{cc} = E / R = -V_o / R$$



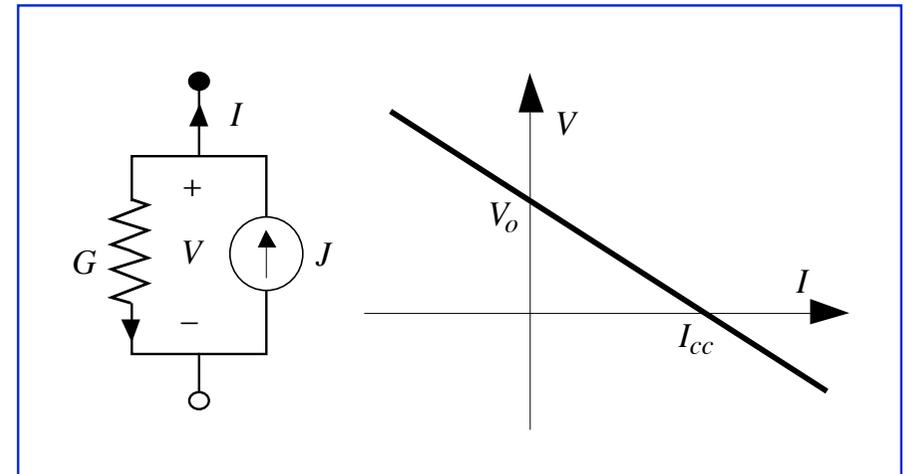
Generatore affine di corrente - GAC

Con la convenzione dei generatori
(una delle due possibili):

$$I = J - G V$$

$$\text{se } V = 0 \quad \rightarrow \quad I_{cc} = J$$

$$\text{se } I = 0 \quad \rightarrow \quad V_o = J / G = I_{cc} / G$$

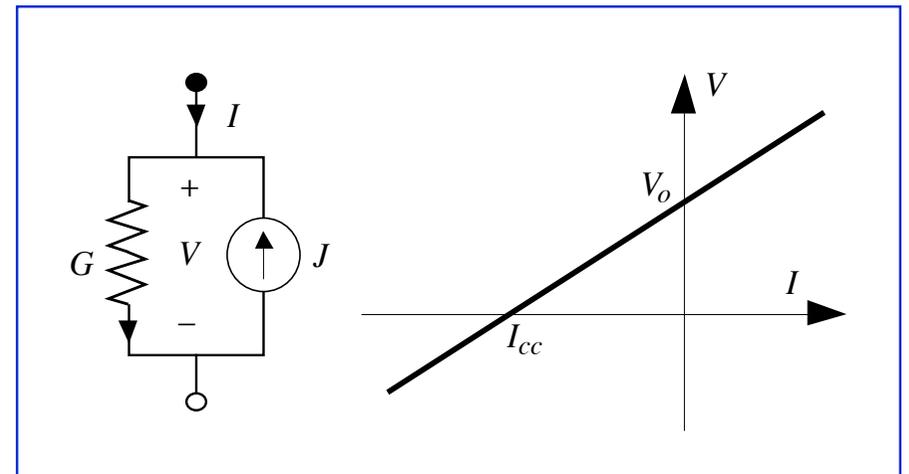


Con la convenzione dei possibili
(una delle due possibili):

$$I = -J + G V$$

$$\text{se } V = 0 \quad \rightarrow \quad I_{cc} = -J$$

$$\text{se } I = 0 \quad \rightarrow \quad V_o = J / G = -I_{cc} / G$$



Equivalenza GAT-GAC

Un GAT e un GAC che presentano la stessa caratteristica statica (= stessi V_o e I_{cc}) sono equivalenti. Uguagliando le due V_o e le due I_{cc} :

- con le precedenti **convenzioni dei generatori**:

$$V_o : E = J / G$$

$$I_{cc} : E / R = J$$

$$\rightarrow \text{da GAT a GAC} \quad J = E / R \quad G = 1 / R$$

$$\rightarrow \text{da GAC a GAT} \quad E = J / G \quad R = 1 / G$$

- con le precedenti **convenzioni degli utilizzatori**:

$$V_o : -E = J / G$$

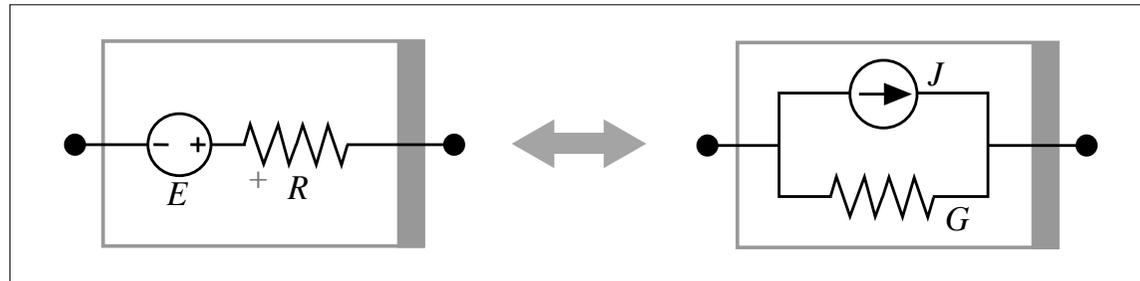
$$I_{cc} : E / R = -J$$

$$\rightarrow \text{da GAT a GAC} \quad J = -E / R \quad G = 1 / R$$

$$\rightarrow \text{da GAC a GAT} \quad E = -J / G \quad R = 1 / G$$

Equivalenza GAT-GAC

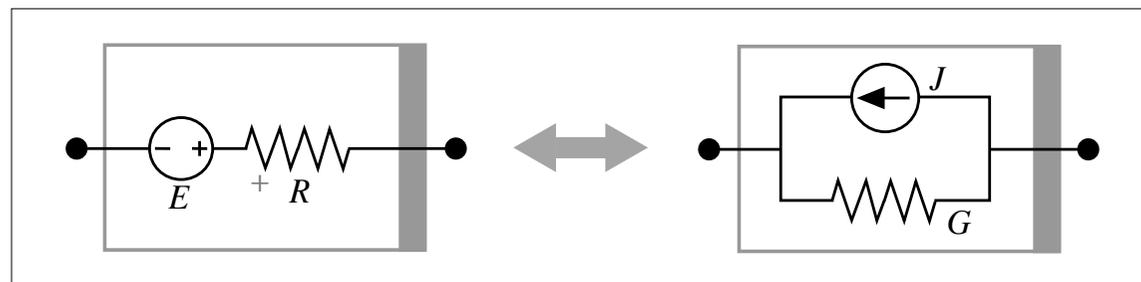
Generalizzazione e sintesi:



con questa disposizione di GIT e GIC le conversioni sono:

$$\text{da GAT a GAC} \quad J = E / R \quad G = 1 / R$$

$$\text{da GAC a GAT} \quad E = J / G \quad R = 1 / G$$



con questa disposizione di GIT e GIC le conversioni sono:

$$\text{da GAT a GAC} \quad J = -E / R \quad G = 1 / R$$

$$\text{da GAC a GAT} \quad E = -J / G \quad R = 1 / G$$

Riassunto del GAT

Convenzione generatori (c.g.)

$$V = E - R I$$

Convenzione utilizzatori (c.u.)

$$V = -E + R I$$

Casi limite

1) Se (c.g.) $R = 0 \rightarrow V = E = \text{GIT}$; non esiste il GAC equivalente

2) Se (c.u.) $E = 0 \rightarrow V = R I = \text{Resistore}$

Riassunto del GAC

Convenzione generatori (c.g.) $I = J - G V$

Convenzione utilizzatori (c.u.) $I = -J + G V$

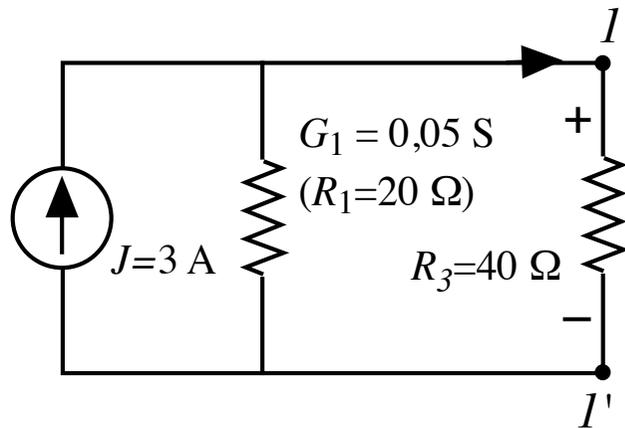
Casi limite

1) Se (c.g.) $G = 0 \rightarrow I = J = \text{GIC}$; non esiste il GAT equivalente

2) Se (c.u.) $J = 0 \rightarrow I = G V = \text{Resistore}$

Applicazione

GAC

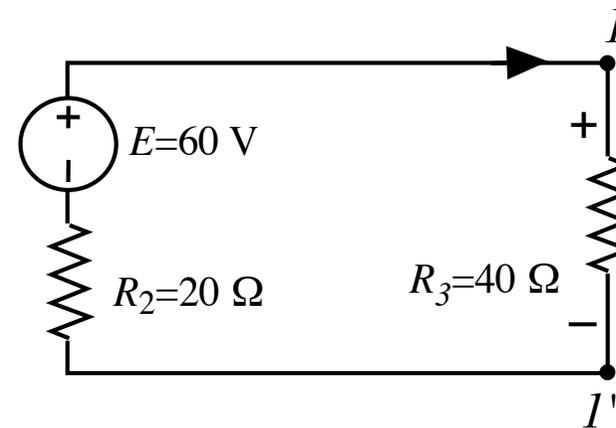


$$\text{GAC} \left\{ \begin{array}{l} V = J R_p = J \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = 3 \frac{20 \cdot 40}{20 + 40} = 40 \text{ V} \\ I = \frac{V}{R_3} = \frac{40}{40} = 1 \text{ A} \\ P = V I = 40 \cdot 1 = 40 \text{ W} \end{array} \right.$$

$$\text{GAC} \quad P_J = V J = 40 \cdot 3 = 120 \text{ W}$$

$$P_G = V^2 G_1 = 40^2 \cdot 0,05 = 80 \text{ W}$$

GAT



$$\text{GAT} \left\{ \begin{array}{l} V = E \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 60 \frac{40}{20 + 40} = 40 \text{ V} \\ I = \frac{E}{R_2 + R_3} = \frac{60}{20 + 40} = 1 \text{ A} \\ P = V I = 40 \cdot 1 = 40 \text{ W} \end{array} \right.$$

$$\text{GAT} \quad P_E = E I = 60 \cdot 1 = 60 \text{ W}$$

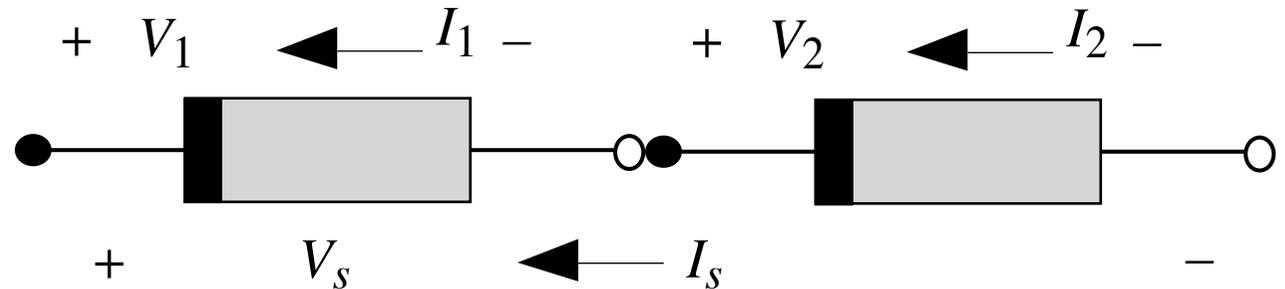
$$P_R = I^2 R_2 = 1^2 \cdot 20 = 20 \text{ W}$$

Serie di generatori affini -1

Due generatori affini:

$$V_s = V_1 + V_2$$

$$I_s = I_1 = I_2$$



Usiamo rappresentazione controllata in corrente = GAT:

$$V_1 = E_1 - R_1 I_1$$

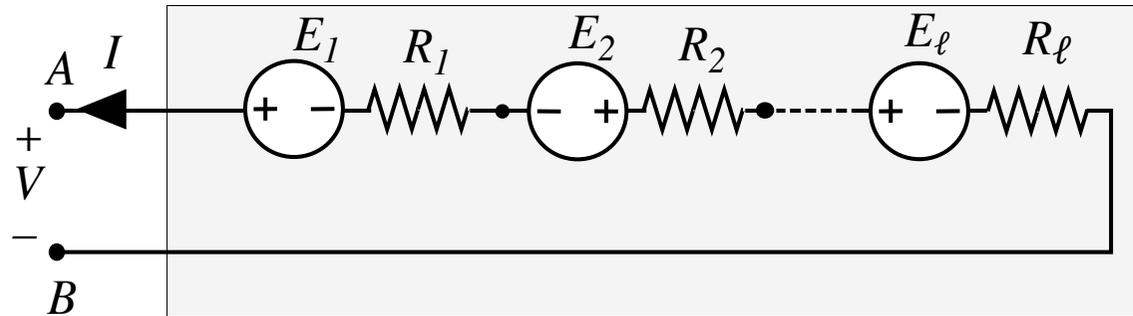
$$V_2 = E_2 - R_2 I_2$$

$$V_s = (E_1 - R_1 I_1) + (E_2 - R_2 I_2) = (E_1 + E_2) - (R_1 + R_2) I_s = E_s - R_s I_s$$

→ Il bipolo equivalente è un GAT con: $E_s = E_1 + E_2$ $R_s = R_1 + R_2$

Serie di generatori affini -2

Serie di ℓ generatori affini



$$V_s = \sum_{\ell} (\pm E_i - R_i I_i) = \sum_{\ell} \pm E_i - (\sum_{\ell} R_i I_i) = \sum_{\ell} E_i - (\sum_{\ell} R_i) I_s = E_s - R_s I_s$$

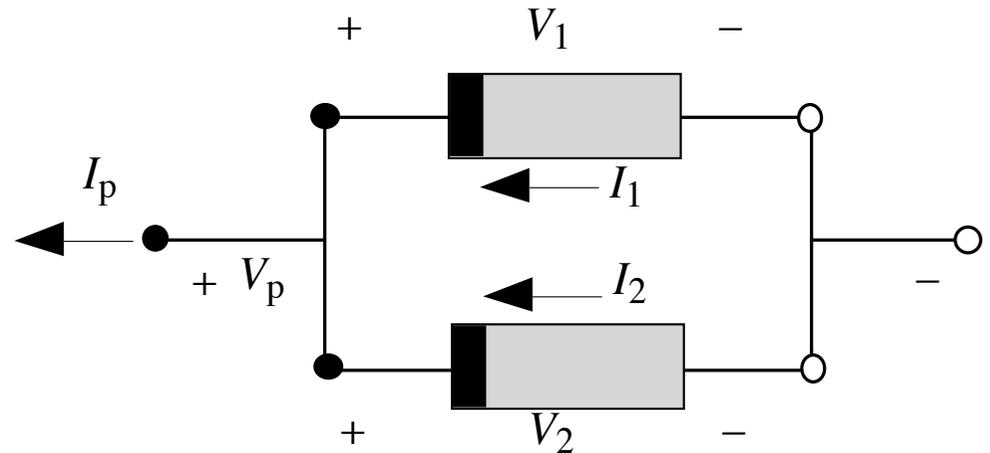
con $E_s = \sum_{\ell} \pm E_i$ $R_s = \sum_{\ell} R_i$

Parallelo di generatori affini -1

Due generatori affini:

$$I_p = I_1 + I_2$$

$$V_p = V_1 = V_2$$



Usiamo rappresentazione controllata in corrente = GAC:

$$I_1 = J_1 - G_1 V_1$$

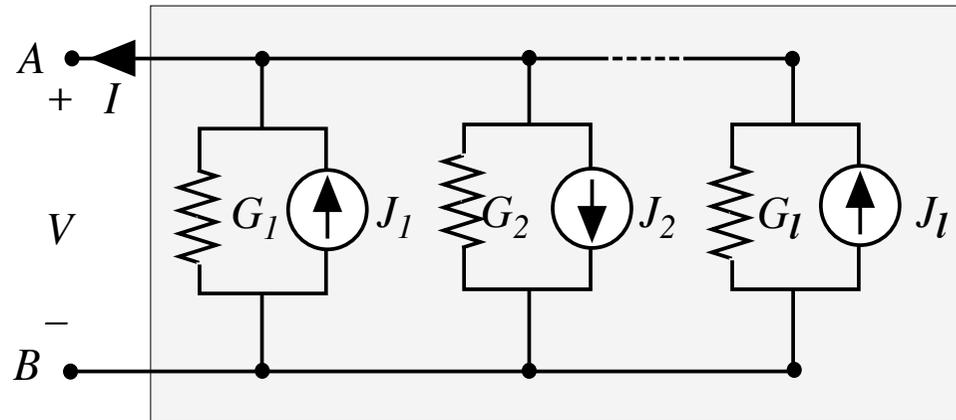
$$I_2 = J_2 - G_2 V_2$$

$$I_p = (J_1 - G_1 V_1) + (J_2 - G_2 V_2) = (J_1 + J_2) - (G_1 + G_2) V_p = J_p - G_p V_p$$

→ Il bipolo equivalente è un GAC con: $J_p = J_1 + J_2$ $G_p = G_1 + G_2$

Parallelo di generatori affini -2

Parallelo di ℓ generatori affini



$$I_p = \sum_{\ell} (\pm J_i - G_i V_i) = \sum_{\ell} \pm J_i - (\sum_{\ell} G_i) V_p = J_p - G_p V_p$$

con $J_p = \sum_{\ell} \pm J_i$ $G_p = \sum_{\ell} G_i$

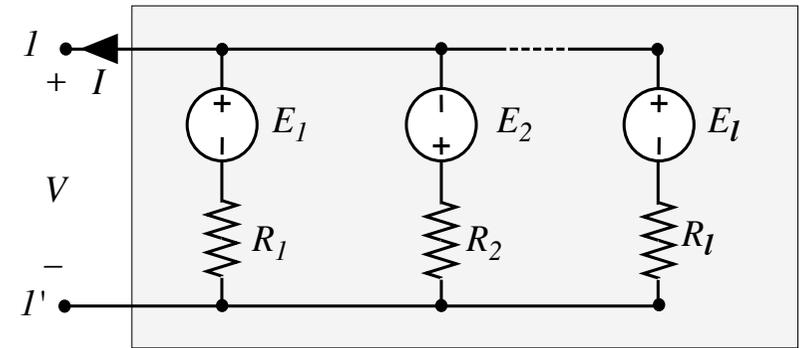
Formule di Millman

Riguardano tutte le possibili configurazioni

La più interessante è il parallelo di GAT:

GAC equivalente:

$$J_{eq} = \sum_{i=1}^{\ell} \pm \frac{E_i}{R_i}, \quad G_{eq} = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{1}{R_i}$$

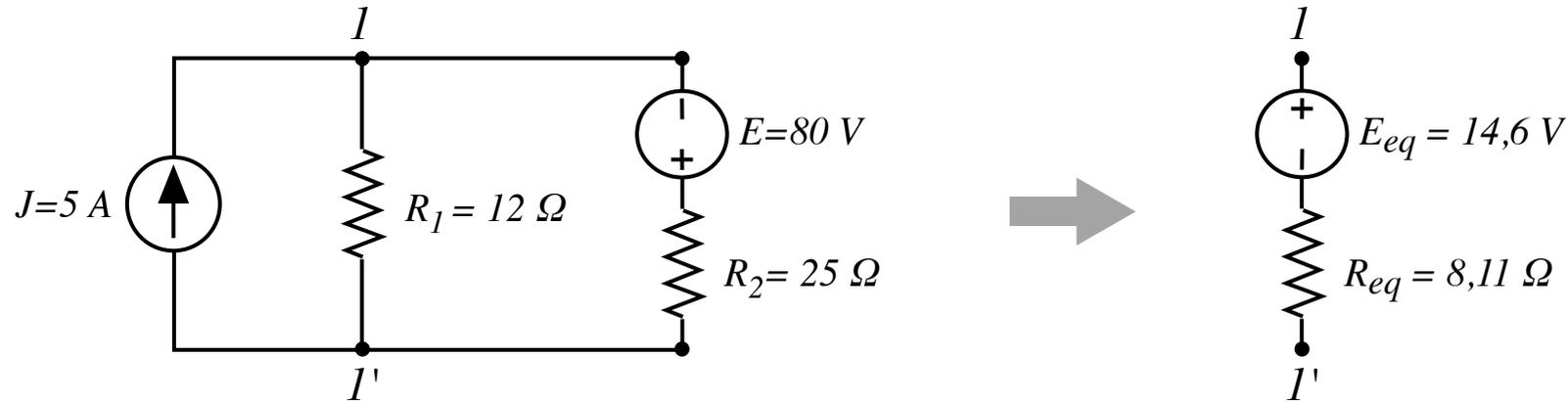


GAT equivalente:

$$E_{eq} = \frac{J_{eq}}{G_{eq}} = \frac{\sum_{i=1}^{\ell} \pm \frac{E_i}{R_i}}{\sum_{i=1}^{\ell} \frac{1}{R_i}}, \quad R_{eq} = \frac{1}{G_{eq}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{\ell} \frac{1}{R_i}}$$

Teorema di Millman: $E_{eq} = V_o \rightarrow$ fornisce la tensione a vuoto di una rete di generatori affini con due soli nodi

Esempio



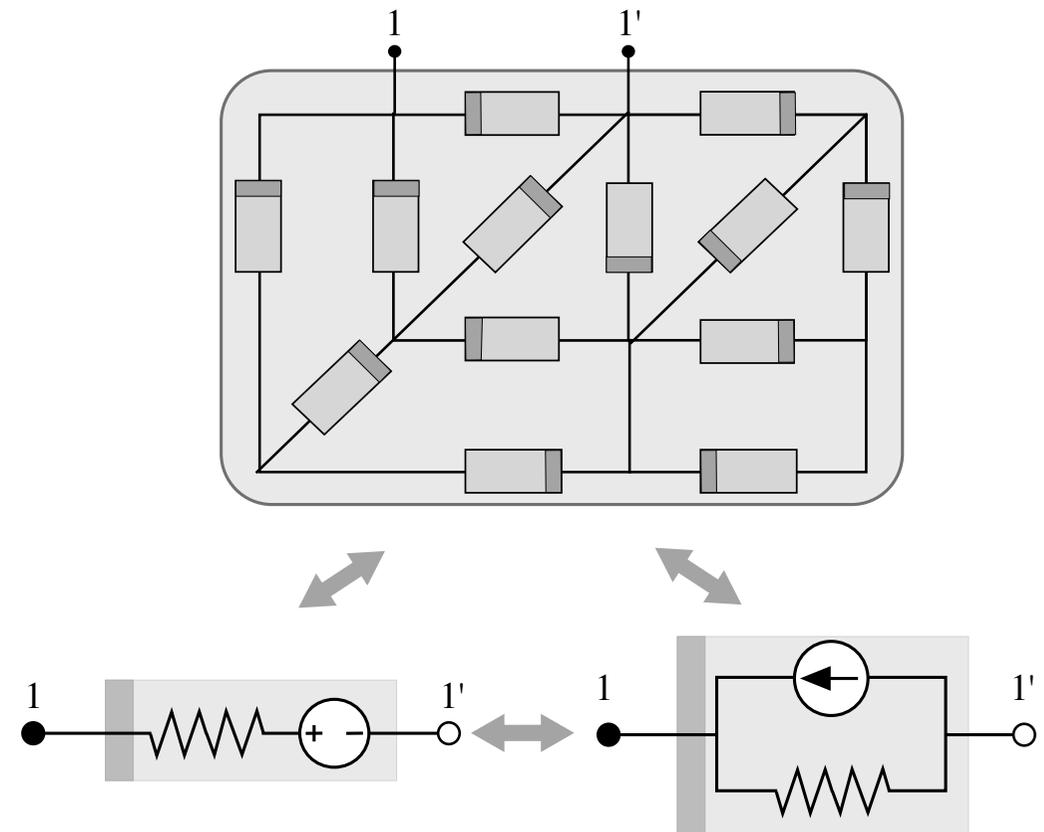
Anche a questo caso sono applicabili le formule di Millman, tenendo conto del GAC e del GAT

La $E_{eq} = 14,6 \text{ V}$ è anche la tensione a vuoto V_o tra i morsetti 1-1' (senza che null'altro vi sia collegato) della rete di destra e quindi, per il principio di equivalenza, della rete di sinistra

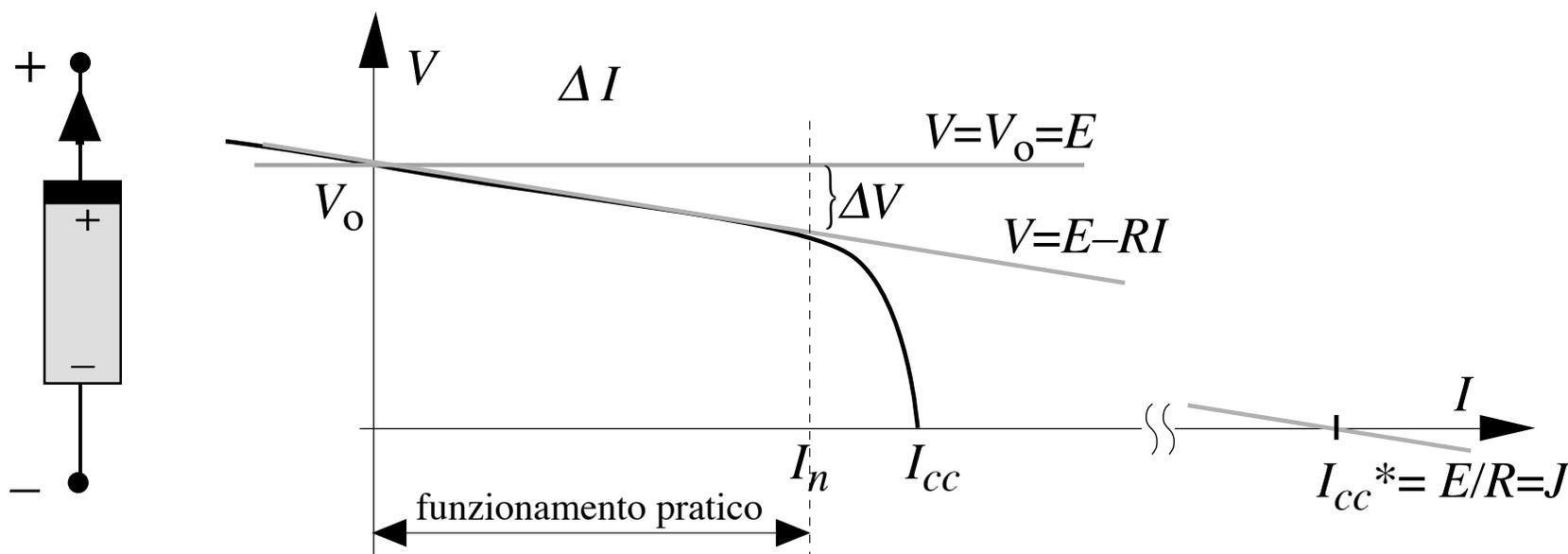
Reti complesse di generatori affini

È possibile estendere la ricerca del generatore affine ad una rete comunque complessa di generatori affini.

L'approccio più generale è fornito dai teoremi dei generatori equivalenti, che vedremo più avanti



Modello di generatore elettrico reale



Un tipico **generatore reale** ha caratteristica esterna del tipo indicato: affine fino al valore I_n (corrente «nominale»):

$$V = E - R_i I \quad \text{con:} \quad E = V_0 \quad , \quad R_i = -\frac{\Delta V}{\Delta I} \quad 0 \leq I \leq I_n$$

Il modello GAT si presta bene, però solo per correnti fino a I_n , che sono quelle di interesse pratico. Il modello a GAC è lecito, ma poco pratico e non si usa

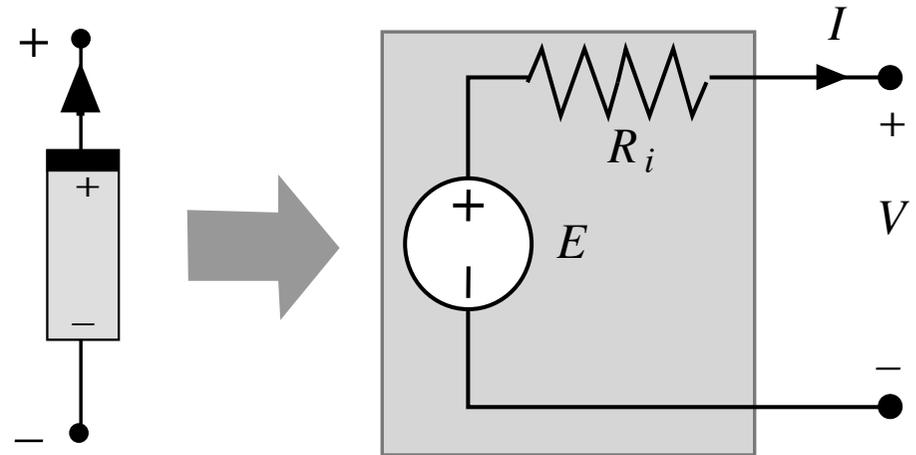
Generatore elettrico reale

Nel generatore reale, come al solito la potenza uscente è data da:

$$P = VI$$

La potenza dissipata internamente nel generatore reale (che non è perfetto!) è espressa bene da:

$$P_d = R_i I^2$$



Per la conservazione delle potenze, la totale potenza generata dentro al generatore è la somma di tali due

$$P_g = P + P_d = VI + R_i I^2 = (V + R_i I) I = EI$$

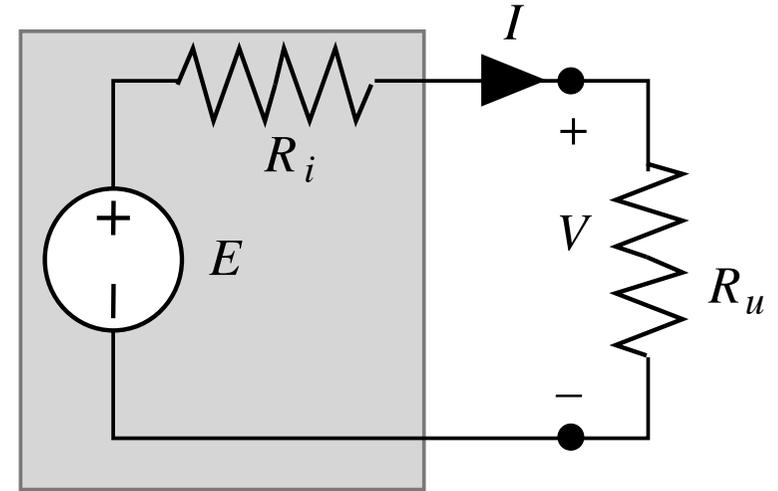
→ Il modello GAT presenta **equivalenza energetica interna** (insolitamente!), oltre che elettrica alla porta → quindi è particolarmente utile!

Funzionamento a carico

Quando il generatore elettrico è connesso ad un carico (R_u) valgono le equazioni:

$$I = \frac{E}{R_i + R_u} \quad , \quad V = E \frac{R_u}{R_i + R_u}$$

$$\rightarrow P = VI = \frac{R_u E^2}{(R_i + R_u)^2}$$



Dato l'equivalenza energetica interna hanno significato fisico le potenze:

$$P_g = EI = \frac{E^2}{R_i + R_u} \quad , \quad P_d = R_i I^2 = \frac{R_i E^2}{(R_i + R_u)^2}$$

Rendimento

Il rendimento di un generatore è il rapporto tra il risultato utile ottenuto e «quanto costa» ottenerlo, ovvero tra P e P_g :

$$\eta \triangleq \frac{P}{P_g} = \frac{P}{P + P_d} = \frac{P_g - P_d}{P_g} = 1 - \frac{P_d}{P_g} \leq 1$$

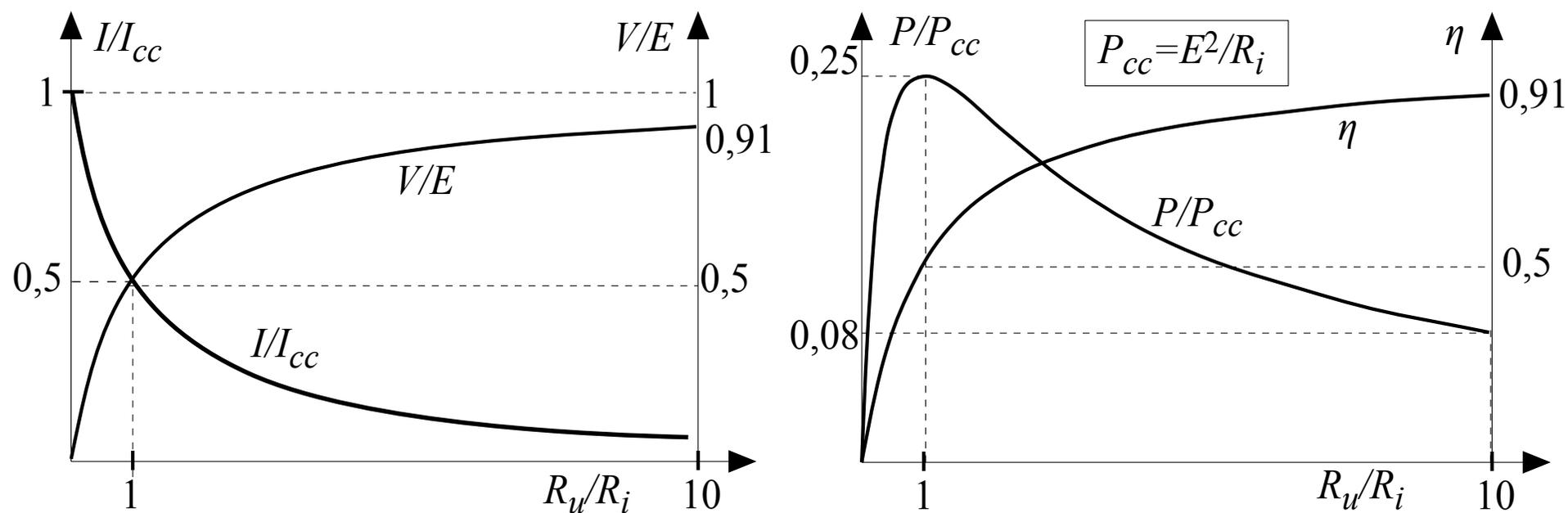
Spesso è espresso in % ($1 \rightarrow 100\%$)

Dato l'equivalenza energetica interna si possono usare le precedenti espressioni, ottenendo:

$$\eta = \frac{V}{E} = \frac{R_u}{R_i + R_u}$$

Curve di funzionamento

Per un generatore di E e R_i fissati, al variare del carico R_u si ottengono i seguenti andamenti delle prestazioni (nell'ipotesi semplificativa che sia $I_n = I_{cc}^*$)



Curve di funzionamento

Ovvero, per E e R_i fissati, al variare della corrente I si ottengono i seguenti andamenti delle prestazioni (nell'ipotesi semplificativa che sia $I_n = I_{cc}^*$)

