Università di Padova - Scuola di Ingegneria

Massimo Guarnieri

# Elettrotecnica

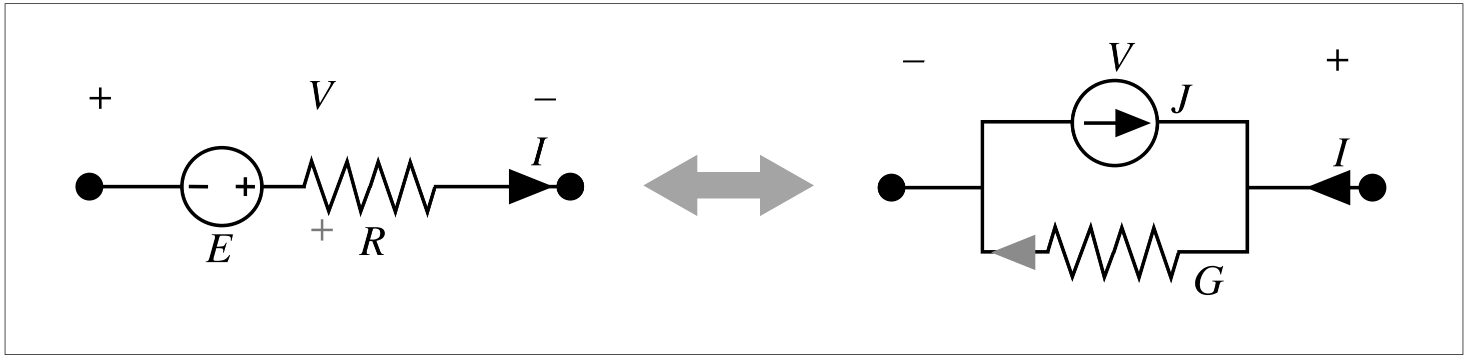
## Capitolo 8

## Analisi delle reti lineari adinamiche

# Lati della rete = bipoli affini

Per ciascuno degli $\ell$ bipoli (lati)

GAT GAC




Nell'analisi sono da determinare

$\ell$ tensioni + $\ell$ correnti =

$2\ell$ incognite

# Sistema di equazioni di rete

Tipologiche:

$$\ell \begin{cases} V - RI = -E & \begin{cases} R = 0 \quad V = -E \quad (\not\Rightarrow GNC) \\ E = 0 \quad V - RI = 0 \end{cases} \\ \\ I - GV = -J & \begin{cases} G = 0 \quad I = -J \quad (\not\Rightarrow GNT) \\ J = 0 \quad I - GV = 0 \end{cases} \end{cases}$$

n.b.: forma generale $mV + nI = X$

\+ Topologiche:

$$\ell \begin{cases} \sum \pm V = 0 \quad a \;\; m \text{ maglie indipendenti} \begin{cases} \text{anelli} \\ \text{maglie fondamentali} \end{cases} \\ \\ \sum \pm I = 0 \quad a \;\; n-1 \text{ tagli indipendenti} \begin{cases} \text{nodi} \\ \text{tagli fondamentali} \end{cases} \end{cases}$$

= $2\ell$ vincoli che formano un **sistema lineare**

# Struttura del sistema

**USCITE**: $V$ e $I$ dei lati (incognite) → indicabili con $Y$

**INGRESSI**: $E$ e $J$ grandezze impresse (termini noti) → $X$

Sistema di equazioni lineari a coefficienti costanti (della rete inerte = a generatori spenti), che dipendono da:

- resistenze e conduttanze $R$, $G$
- coefficienti di connessione 0, 1, –1

# Soluzione di nostro interesse

Consideriamo solo reti “buone”:
aventi equazioni **indipendenti** e **compatibili**

⇨ *la soluzione esiste ed è unica*
*per tutte le tensioni e le correnti dei lati*

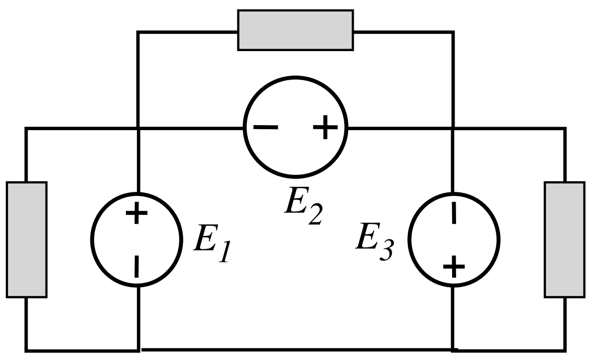
# Situazioni che non consideriamo

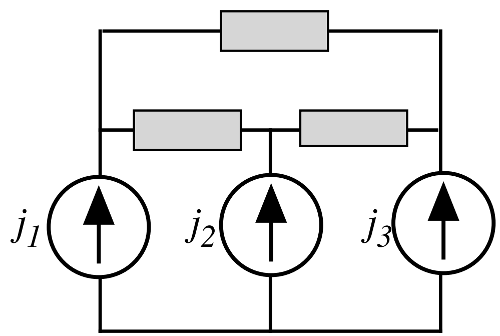
Non ci interessano reti “singolari” (“cattive”):

a) Impossibile (equazioni incompatibili)

b) Indeterminata (equazioni dipendenti)

Esempi già incontrati



# Soluzione

Il sistema $2\ell$ x $2\ell$ può essere "pesante", anche molto pesante

→ si risolve all'elaboratore

→ A tal fine deve essere posto in in forma matriciale:

$$T\,Y = W$$

*T:* matrice di tableau = dei coefficienti di rete inerte: *R*, *G*, +1, –1 e molti zeri

*Y:* vettore delle incognite = tensioni *V*, correnti *I*, potenziali nodali *U*

*W:* vettore dei termini noti *X* (= grandezze impresse *E, J*) e molti zeri

Anche così, servono algoritmi numerici di soluzione dell'equazione matricale molto agili, altrimenti la soluzione è irragiungibile:

Esempio: eliminazione di Gauss= SI (Cramer =NO!)

# Metodi ridotti

Approccio elettrico = **Formulazioni alternative**:

Frazionare il sistema in sottosistemi più semplici che forniscono soluzioni parziali ed intermedie usando incognite di supporto, da cui poi è facile ottenere le incognite finali *V, I*:

Consideriamo tre possibili alternative

*1)* ***Soluzione nelle correnti → correnti di anello (per reti piane)***

*2) Soluzione nelle tensioni → potenziali ai nodi*

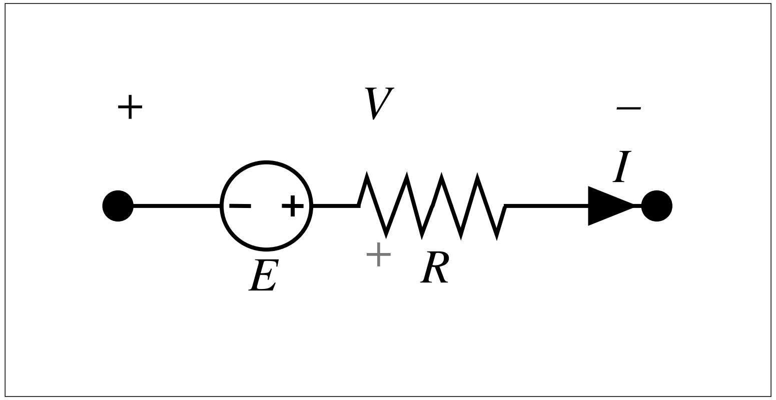
*3) Sovrapposizione degli effetti*

# Soluzione nelle correnti

Tutti i bipoli devono essere controllati in corrente = esprimibili come GAT.

→ sono esclusi solo i GIC, che non sono trasformabili in GAT

$$V = RI - E$$




Per tutti i lati vale

compresi i casi limite

Consideriamo i metodi delle correnti cicliche

# Metodo delle correnti di anello -1

Si applica a reti piane*

$$V = RI - E \quad + \quad \sum \pm V = 0 \qquad \text{a } m = a \text{ anelli}$$

$$\rightarrow \quad \sum \pm \left( RI - E \right) = 0 \qquad \text{a } m = a \text{ anelli}$$

$$\rightarrow \quad \sum \pm RI = \sum \pm E \qquad \text{a } m = a \text{ anelli}$$

Negli stessi *m=a* anelli si considerano *m* correnti cicliche d'anello $K_r$ $r$=1…*m,* con le quali, per ogni lato:

$$I = K_r - K_s$$

$$\rightarrow \quad \sum \pm R\left( K_r - K_s \right) = \sum \pm E \qquad \text{a } m = a \text{ anelli}$$

**Così si arriva ad un sistema *mxm* invece che *2ℓ* x *2ℓ!!***

* Esiste anche in metodo delle correnti di maglia fondamentale, valido anche per reti non piane, ma più farraginoso, che noi non studiamo

# Metodo delle correnti di anello -2

Riordinando si ottiene

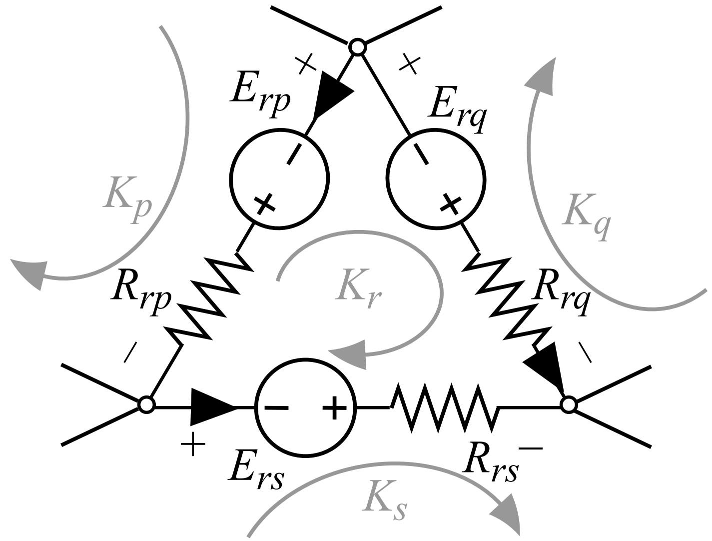
$$\left(\sum_{s\neq r} R_{rs}\right) K_r - \sum_{s\neq r} R_{rs} K_s = \sum_{s\neq r} \pm E_{rs} \qquad r = 1,\ldots a$$

$$R_{Arr} K_r + \sum_{s\neq r} R_{Ars} K_s = E_{Ar} \qquad r = 1,\ldots a$$

$R_{Arr} = \Sigma_s R_{rs}$: resistenza o **autoresistenza** di anello $r$
(somma delle resistenze dei suoi lati)

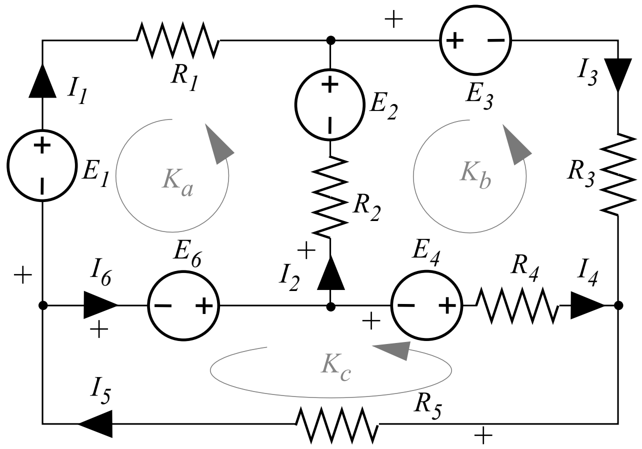
$R_{Ars} = -\Sigma_{rs} R_{rs}$: resistenza comune (o **mutua**) tra gli anelli $r$ e $s$ (se grafo ridotto: resistenza del solo lato condiviso dagli anelli $r$ e $s$; $R_{Ars} = R_{Asr}$ )

$E_{Ar} = \Sigma_s \pm E_{rs}$: tensione impressa di anello $r$
(somma algebrica delle t.i. dei suoi lati)



# Esempio

$E_1 = 240$ V $\quad R_1 = 10\ \Omega$
$E_2 = 80$ V $\quad R_2 = 20\ \Omega$
$E_3 = 480$ V $\quad R_3 = 30\ \Omega$
$E_4 = 70$ V $\quad R_4 = 40\ \Omega$
| $\quad R_5 = 60\ \Omega$
$E_6 = -120$ V




$$\begin{cases} (R_1 + R_2)K_a - R_2 K_b = E_2 - E_1 + E_6 & \text{all'anello } A_a \\ (R_2 + R_3 + R_4)K_b - R_2 K_a - R_4 K_c = E_4 + E_3 - E_2 & \text{all'anello } A_b \\ (R_4 + R_5)K_c - R_4 K_b = -E_4 - E_6 & \text{all'anello } A_c \end{cases}$$

$\rightarrow$ $K_a = -6$ A, $K_b = 5$ A, $K_c = 2{,}5$ A

$$\begin{cases} I_1 = -K_a = 6 \text{ A} \\ I_3 = -K_b = -5 \text{ A} \\ I_5 = -K_c = -2{,}5 \text{ A} \end{cases} \qquad \begin{cases} I_2 = K_a - K_b = -11 \text{ A} \\ I_4 = K_b - K_c = 2{,}5 \text{ A} \\ I_6 = K_a - K_c = -8{,}5 \text{ A} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 = -E_1 + R_1 I_1 = -240 + 10 \cdot 6 = -180 \text{ V} \\ V_2 = -E_2 + R_2 I_2 = -80 + 20 \cdot (-11) = -300 \text{ V} \\ V_3 = E_3 + R_3 I_3 = 480 + 30 \cdot (-5) = 330 \text{ V} \\ V_4 = -E_4 + R_4 I_4 = -70 + 40 \cdot (2{,}5) = 30 \text{ V} \\ V_5 = R_5 I_5 = 60 \cdot (-2{,}5) = -150 \text{ V} \\ V_6 = -E_6 = 120 \text{ V} \end{cases}$$

# Metodo delle correnti di anello modificato

Se c'è uno o più GIC:

si considera il GIC se fosse un GIT, mettendo la sua tensione $V_J$ tra i termini noti $E$ a secondo membro, anche se è un'incognita

Essendoci un'incognita in più, serve un'equazione in più che è l'equazione della corrente sul GIC:

$$\left(\sum_{s \neq r} R_{rs}\right) K_r - \sum_{s \neq r} R_{rs} K_s = \sum_{s \neq r} \pm E_{rs} \pm V_J$$

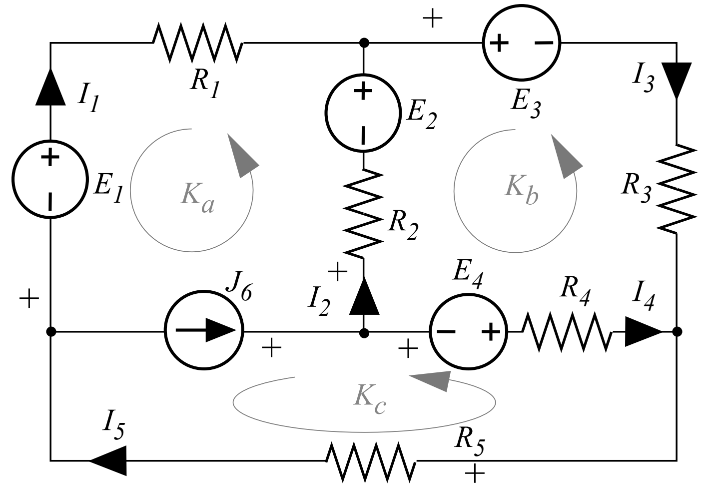
$$K_r - K_s = J$$

# Esempio

$E_1 = 480$ V  
$E_2 = 160$ V  
$E_3 = 960$ V  
$E_4 = 140$ V

$R_1 = 10\ \Omega$  
$R_2 = 20\ \Omega$  
$R_3 = 30\ \Omega$  
$R_4 = 40\ \Omega$  
$R_5 = 60\ \Omega$

$J_6 = -17$ A




$$\begin{cases} (R_1 + R_2)K_a - R_2 K_b = E_2 - E_1 + V_6 & \text{all'anello } A_a \\ (R_2 + R_3 + R_4)K_b - R_2 K_a - R_4 K_c = E_4 + E_3 - E_2 & \text{all'anello } A_b \\ (R_4 + R_5)K_c - R_4 K_b = -E_4 - V_6 & \text{all'anello } A_c \\ K_a - K_c = J_6 & \text{equazione aggiuntiva} \end{cases}$$

➜

$K_a = -12$ A  
$K_b = 10$ A  
$K_c = 5$ A  
$V_6 = -240$ V

# Metodi ridotti

*1)Soluzione nelle correnti → correnti di anello (per reti piane)*

***2) Soluzione nelle tensioni → potenziali ai nodi***

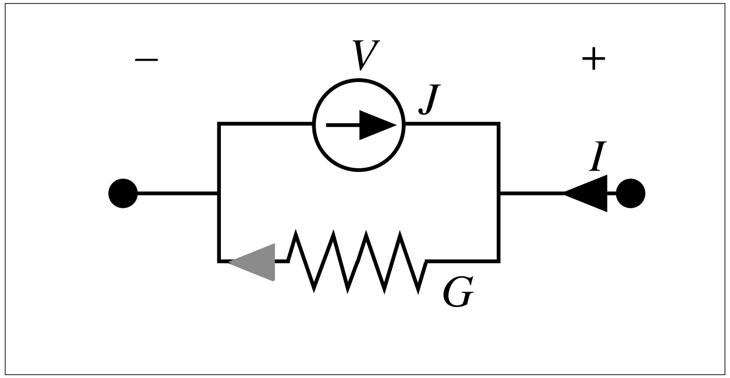
*3) Sovrapposizione degli effetti*

# Soluzione nelle tensioni

Tutti i bipoli devono essere controllati in tensione = esprimibili come GAC.

→ sono esclusi solo i GIT, che non sono trasformabili in GA

$$I = GV - J$$




Per tutti i lati vale
compresi i casi limite

Consideriamo il metodo dei potenziali ai nodi

# Metodo dei potenziali nodali -1

Si applica a tutte le reti, piane o non piane

$$I = GV - J \quad + \quad \sum \pm I = 0 \qquad \text{a } \; t = n-1 \text{ nodi}$$

$$\rightarrow \qquad \sum \pm \left( GV - J \right) = 0 \qquad \text{a } \; t = n-1 \text{ nodi}$$

$$\rightarrow \qquad \sum \pm GV = \sum \pm J \qquad \text{a } \; t = n-1 \text{ nodi}$$

Negli stessi *t=n–1* nodi si considerano *n–1* potenziali nodali $U_r$ *r*=1…*n–1,* con i quali, per ogni lato:

$$V = U_r - U_s$$

$$\rightarrow \qquad \sum \pm G\left( U_r - U_s \right) = \sum \pm J \qquad \text{a } \; t = n-1 \text{ nodi}$$

**Così si arriva ad un sistema *(n–1)x(n–1)* invece che *2ℓ* x *2ℓ!!***

# Metodo dei potenziali nodali -2

Riordinando si ottiene

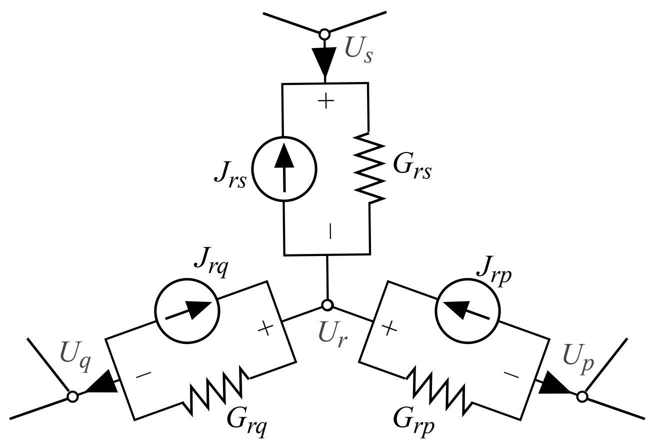
$$\left(\sum_{s\neq r} G_{rs}\right)U_r - \sum_{s\neq r} G_{rs} U_s = \sum_{s\neq r} \pm J_{rs} \qquad r = 1,\ldots n-1$$

$$G_{Nrr} U_r + \sum_{s\neq r} G_{Nrs} U_s = J_{Nr} \qquad r = 1,\ldots n-1$$

$G_{Nrr} = \Sigma_s G_{rs}$: conduttanza (o **autoconduttanza**) di nodo $r$ (somma delle conduttanze dei suoi lati)

$G_{Nrs} = -\Sigma_{rs} G_{rs}$: conduttanza comune (o **mutua**) tra i nodi $r$ e $s$ (se grafo ridotto: conduttanza del solo lato che si appoggia a $r$ e $s$; $G_{Nrs} = G_{Nsr}$ )

$J_{Nr} = \Sigma_s \pm J_{rs}$: tensione impressa di anello $r$ (somma algebrica delle c.i. dei lati che si appoggiano al nodo $r$)



# Esempio

$J_1 = -21 \text{ A}$ $\quad G_1 = 0{,}1 \text{ S}$

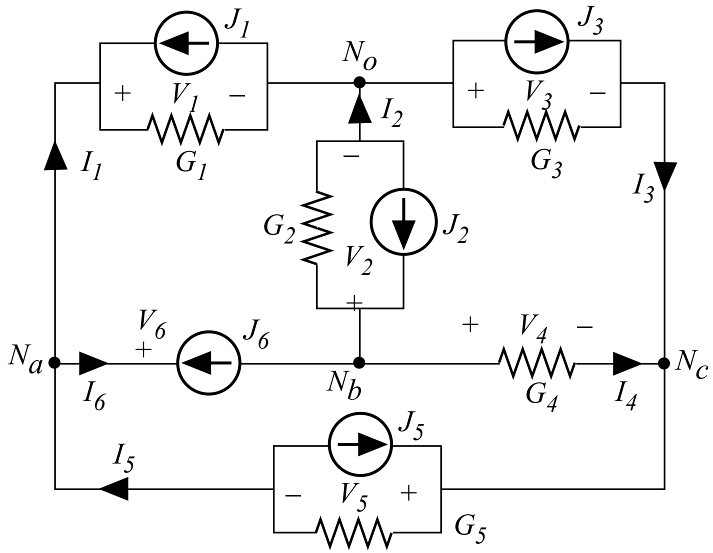
$J_2 = -130 \text{ A}$ $\quad G_2 = 0{,}2 \text{ S}$

$J_3 = 168 \text{ A}$ $\quad G_3 = 0{,}3 \text{ S}$

$G_4 = 0{,}7 \text{ S}$

$J_5 = -7 \text{ A}$ $\quad G_5 = 0{,}5 \text{ S}$

$J_6 = 5 \text{ A}$




Pongo $U_0$=0

→ risolvo nelle incognite

$U_a, U_b, U_c$

$$\begin{cases} (G_1+G_5)U_a - G_5 U_c = J_1 - J_5 + J_6 & \text{al nodo } N_a \\ (G_2+G_4)U_b - G_4 U_c = J_2 - J_6 & \text{al nodo } N_b \\ (G_3+G_4+G_5)U_c - G_4 U_b - G_5 U_a = J_3 + J_5 & \text{al nodo } N_c \end{cases}$$

→

$U_a = 60$ V

$U_b = -80$ V

$U_c = 90$ V

$$\begin{cases} V_1 = U_a = 60 \text{ V} \\ V_2 = U_b = -80 \text{ V} \\ V_3 = -U_c = -90 \text{ V} \end{cases} \qquad \begin{cases} V_4 = U_b - U_c = -170 \text{ V} \\ V_5 = U_c - U_a = 30 \text{ V} \\ V_6 = U_a - U_b = 140 \text{ V} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = -J_1 + G_1 V_1 = 21 + 0{,}1 \cdot 60 = 27 \text{ A} \\ I_2 = -J_2 + G_2 V_2 = 130 + 0{,}2 \cdot (-80) = 114 \text{ A} \\ I_3 = J_3 + G_3 V_3 = 168 + 0{,}3 \cdot (-90) = 141 \text{ A} \\ I_4 = G_4 V_4 = 0{,}7 \cdot (-170) = -119 \text{ A} \\ I_5 = -J_5 + G_5 V_5 = 7 + 0{,}5 \cdot (140) = 22 \text{ A} \\ I_6 = -J_6 = -5 \text{ A} \end{cases}$$

# Metodo dei potenziali nodali modificato

Se c'è uno o più GIT:

si considera il GIT se fosse un GIC, mettendo la sua corrente $I_E$ tra i termini noti *J* a secondo membro, anche se è un'incognita

Essendoci un'incognita in più, serve un'equazione in più che è l'equazione della tensione sul GIT:

$$\left(\sum_{s\neq r} G_{rs}\right)U_r - \sum_{s\neq r} G_{rs} U_s = \sum_{s\neq r} \pm J_{rs} \pm I_E$$

$$U_r - U_s = E$$

# Esempio

$J_1 = -10{,}5$ A $\quad G_1 = 0{,}1$ S

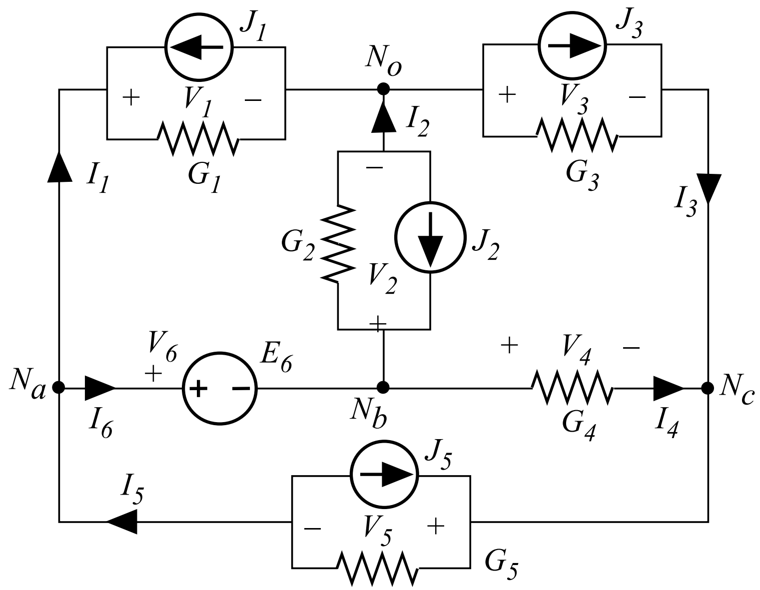
$J_2 = -65$ A $\quad G_2 = 0{,}2$ S

$J_3 = 84$ A $\quad G_3 = 0{,}3$ S

$G_4 = 0{,}7$ S

$J_5 = -3{,}5$ A $\quad G_5 = 0{,}5$ S

$E_6 = 70$ V




Pongo $U_0$=0

→ risolvo nelle incognite $U_a, U_b, U_c$

$$\begin{cases} (G_1+G_5)U_a - G_5 U_c = J_1 - J_5 - I_6 & \text{al nodo } N_a \\ (G_2+G_4)U_b - G_4 U_c = J_2 + I_6 & \text{al nodo } N_b \\ (G_3+G_4+G_5)U_c - G_4 U_b - G_5 U_a = J_3 + J_5 & \text{al nodo } N_c \\ U_a - U_b = E_6 & \text{equazione aggiuntiva} \end{cases}$$

➜

$U_a$= 30 V

$U_b$= –40 V

$U_c$= 45 V

$I_6$= 2,5 A

# Forma matriciale dei potenziali nodali

Per impieghi computazionali il sistema di equazioni

$$G_{Nrr}U_r + \sum_{s \neq r} G_{Nrs}U_s = J_{Nr} \qquad\qquad r = 1,\ldots n-1$$

va posto in forma matriciale: $\boldsymbol{G}_N\boldsymbol{U} = \boldsymbol{J}_N$

Si dimostra che: $\boldsymbol{G}_N = \mathbf{A}\,\boldsymbol{G}\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \qquad \boldsymbol{J}_N = \mathbf{A}\,\boldsymbol{J}$

con: **A** = matrice di incidenza

***U*** = vettore potenziali nodali

***J*** = vettore correnti impresse

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 & 0 \\ 0 & G_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & G_{\ell\ell} \end{bmatrix}$$

n.b.: esiste formulazione duale per correnti d'anello

# Metodo di sovrapposizione degli effetti -1

Il sistema delle equazioni di rete:

$$2\ell \begin{cases} V - R\,I = -E \\ I - G\,V = -J \\ \sum \pm V = 0 \\ \sum \pm I = 0 \end{cases}$$

è lineare → vale la sovrapposizione degli effetti.

# Metodo di sovrapposizione degli effetti -2

Ogni uscita (tensione o corrente $V_h$ o $I_h$ ) è uguale alla somma degli effetti ($V_{hk}$ o $I_{hk}$ ) prodotti nel lato *h* da ciascun ingresso ($E_k$ o $J_k$ ) che agisce da solo (con tutti gli altri ingressi azzerati=spenti):

$$\begin{array}{cccccccc} E_1 & E_2 & E_3 & \dots & E_{\ell'} & J_{(\ell'+1)} & \dots & J_{\ell} \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & & \Downarrow & \Downarrow & & \Downarrow \end{array}$$

$$V_{\mathrm{h}}=V_{\mathrm{h1}}+V_{\mathrm{h2}}+V_{\mathrm{h3}}+\dots+V_{\mathrm{h}\ell'}+V_{\mathrm{h}(\ell'+1)}+\dots+V_{\mathrm{h}\ell}$$

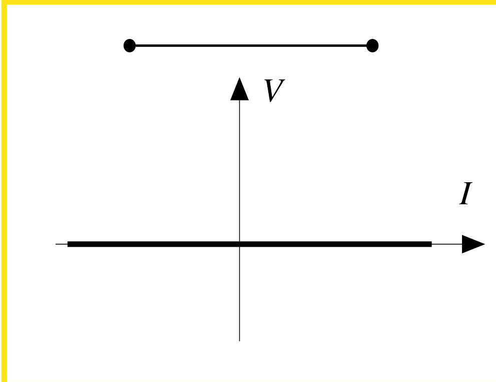
$$I_{\mathrm{h}}=I_{\mathrm{h1}}+I_{\mathrm{h2}}+I_{\mathrm{h3}}+\dots+I_{\mathrm{h}\ell}+I_{\mathrm{h}(\ell'+1)}+\dots+I_{\mathrm{h}\ell}$$

# Metodo di sovrapposizione degli effetti -3

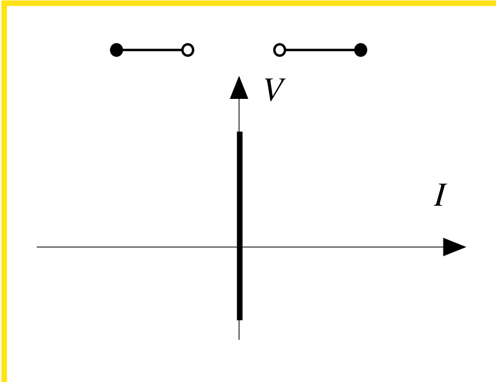
**Precisazioni:**

ingresso spento (=azzerato, annullato) vuol dire con la grandezza impressa posta uguale a zero:

$E=0$ → un GIT diviene un cortocircuito




$J=0$ → un GIC diviene un circuito aperto



# Metodo di sovrapposizione degli effetti -4

**Precisazioni e commenti:**

$\Rightarrow$ Il singolo effetto ($V_{hk}$ o $I_{hk}$) compare in una rete che ha un solo generatore ideale in azione (GIT o GIC) e tutti i resistori della rete originale

$\Rightarrow$ Questa rete è più facile da risolvere che la rete originale, ove agiscono insieme tutti i generatori (GIT e GIC)

$\Rightarrow$ Ma bisogna risolvere tante reti "facili" quanti sono i GIT+GIC

$\Rightarrow$ Conviene se il numero GIT+GIC è non troppo elevato (in pratica 4,5).

# Metodo di sovrapposizione degli effetti -5

**Precisazioni:**

Il singolo effetto (uscita) risulta proporzionale alla causa (ingresso) che lo produce, tramite un coefficiente di proporzionalità = **coefficiente di rete**:

$$V_{hk} = H_{Vhk} E_k \quad , \quad V_{hk} = H_{Rhk} J_k$$

$$I_{hk} = H_{Ghk} E_k \quad , \quad I_{hk} = H_{Ihk} J_k$$

# Metodo di sovrapposizione degli effetti -6

Pertanto:

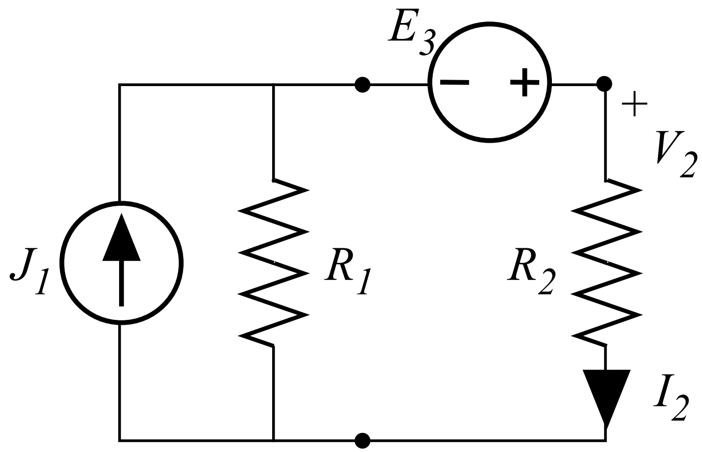
$$V_h = \sum H_{Vhk} E_k + \sum H_{Rhk} J_k$$
$$I_h = \sum H_{Ghk} E_k + \sum H_{Ihk} J_k$$

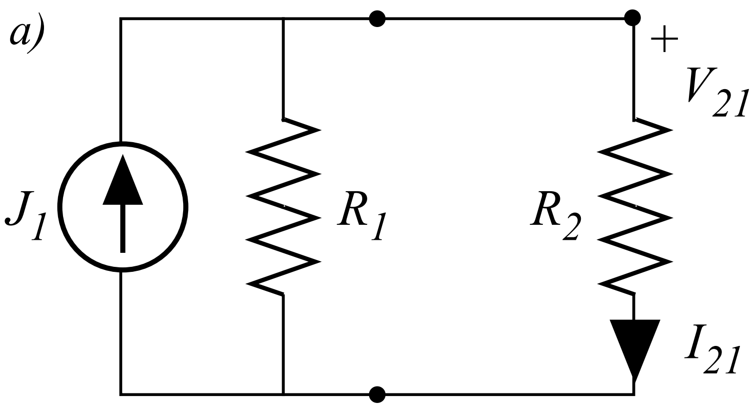
Attenzione: vale solo per tensioni e correnti,

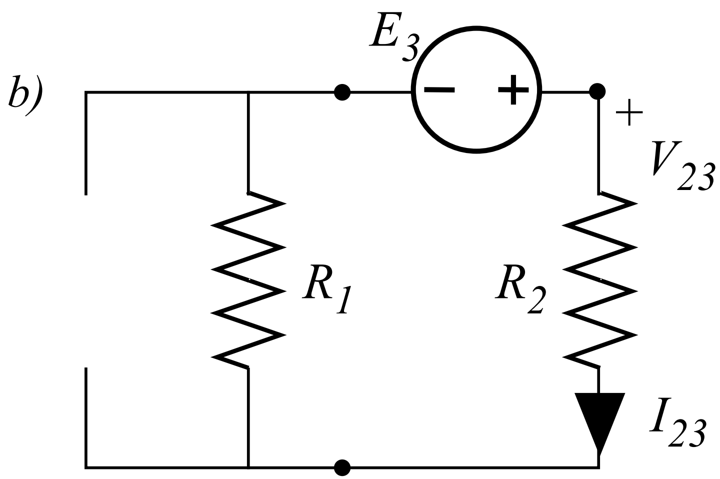
**non vale** per le potenze:

$$P_h = V_h I_h = \left(\sum V_{hk}\right)\left(\sum I_{hk}\right) \neq \sum V_{hk} I_{hk}$$

# Esempio -1



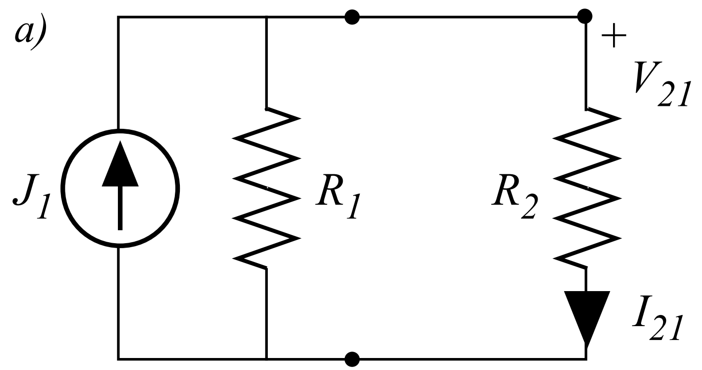



# Esempio -2

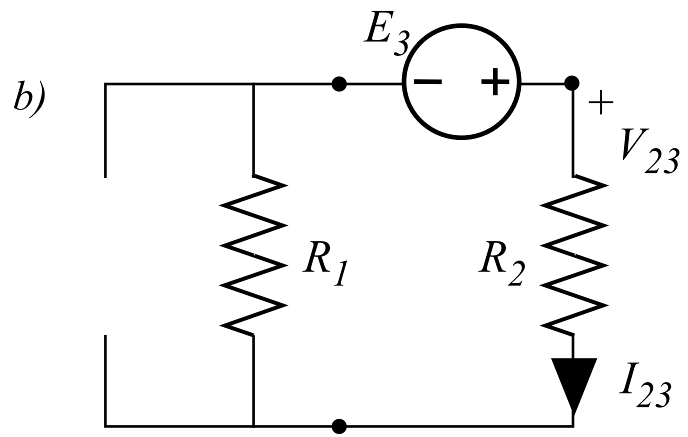
Azione di $J_1$ ($E_3$=0)

$$I_{21} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} J_1 \quad , \qquad V_{21} = \frac{R_1\, R_2}{R_1 + R_2} J_1$$




Azione di $E_3$ ($J_1$=0)

$$I_{23} = \frac{1}{R_1 + R_2} E_3 \quad , \qquad V_{23} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_3$$




Soluzione completa

$$I_2 = I_{21} + I_{23} = \frac{R_1\, J_1 + E_3}{R_1 + R_2} \quad , \quad V_2 = V_{21} + V_{23} = \frac{R_2\left(R_1\, J_1 + E_3\right)}{R_1 + R_2}$$

# Esempio -5

Potenza:

$$P_2 = V_2 I_2 = R_2 I_2^2 = \frac{R_2\left(R_1\, J_1 + E_3\right)^2}{\left(R_1 + R_2\right)^2}$$

Non è uguale alla somma $V_{21} I_{21} + V_{23} I_{23}$:

$$V_{21} I_{21} = R_2 I_{21}^2 = \frac{R_2\left(R_1\, J_1\right)^2}{\left(R_1 + R_2\right)^2} \quad , \quad V_{23} I_{23} = R_2 I_{23}^2 = \frac{R_2\left(E_3\right)^2}{\left(R_1 + R_2\right)^2}$$

# Coefficienti di rete -1

Coefficienti di proporzionalità:

$$H_{G_{23}} = \frac{I_{23}}{E_3} = \frac{1}{R_1 + R_2} \quad [\mathrm{S}] \qquad H_{I_{21}} = \frac{I_{21}}{J_1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad [\varnothing]$$

$$H_{V_{23}} = \frac{V_{23}}{E_3} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad [\varnothing] \qquad H_{R_{21}} = \frac{V_{21}}{J_1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad [\Omega]$$

1) Dipendono dalla **rete inerte** (*R, G* e loro connessioni, con GIT e GIC spenti)
2) Sono **SEMPRE** rapporti tra **effetti** (=uscite) e **cause** (=ingressi); **MAI** l’inverso

# Coefficienti di rete -2

Legano un effetto che si manifesta in qualche parte della rete alla sua unica causa, presente da un'altra parte; sono:

**FUNZIONI DI TRASFERIMENTO**

Concetto fondamentale nell'ingegneria, specialmente in quella dei segnali e dell'informazione

(questi coefficienti di rete ne sono esempi semplici, costituiti da numeri reali; vedremo che in generale le funzioni di trasferimento sono funzioni complesse)

# Che metodo usare

Che metodo di analisi ridotta conviene usare?

- In generale quello che permette di ridurre i calcoli
- tra correnti cicliche (in particolare d'anello) e potenziali ai nodi, bisogna confrontare $m$ con $n-1$
- Tenendo conto che le correnti d'anello valgono solo per reti piane
- La sovrapposizione degli effetti è conveniente se non ci sono troppe tensioni impresse e correnti impresse (fino a circa 4-5)
- È sempre raccomandato applicare preventivamente le semplificazioni serie/parallelo così da lavorare con grafi ridotti, che, per la rete data, presentano il minimo numero di lati e nodi