Università di Padova - Scuola di Ingegneria

Massimo Guarnieri

Elettrotecnica

Capitolo 9

Teoremi delle reti lineari adinamiche

Teorema di sostituzione

La rete originale, di bipoli affini, è lineare → anche la rete modificata dalla sostituzione, in cui si è inserito un GIC o un GIT, lo è:

→ assunto che esse siano "buone" (ovvero non singolari), hanno entrambe soluzione unica e quindi coincidente per il teorema

→ Ovvero il teorema di sostituzione è certamente applicabile:

si può sostituire il generico lato a_k, avente corrente I_k e tensione V_k con un:

- generatore ideale di corrente (GIC) con c.i. $J^* = I_\mathrm{k}$

oppure

- generatore ideale di tensione (GIT) con tensione impressa $E^* = V_\mathrm{k}$

Teorema di sovrapposizione degli effetti

È il **metodo di sovrapposizione degli effetti** già incontrato, per il quale:

$$V_h = \sum H_{Vhk} E_k + \sum H_{Rhk} J_k$$

$$I_h = \sum H_{Ghk} E_k + \sum H_{Ihk} J_k$$

I coefficienti *H* sono i **coefficienti rete**, con dimensioni diverse tra loro, funzioni della rete inerte (*R*, *G*, +1, –1, 0)

$$H_{Vhk} = \frac{V_{hk}}{E_k} \quad [\varnothing] \qquad H_{Rhk} = \frac{V_{hk}}{J_k} \quad [\Omega]$$

$$H_{Ghk} = \frac{I_{hk}}{E_k} \quad [\mathrm{S}] \qquad H_{Ihk} = \frac{I_{hk}}{J_k} \quad [\varnothing]$$

Teorema di reciprocità

Riguarda i **coefficienti di rete,** considerati nella sovrapposizione degli effetti, di **reti di bipoli affini (= reti lineari di bipoli).** Afferma che i tali coefficienti verificano le seguenti uguaglianze:

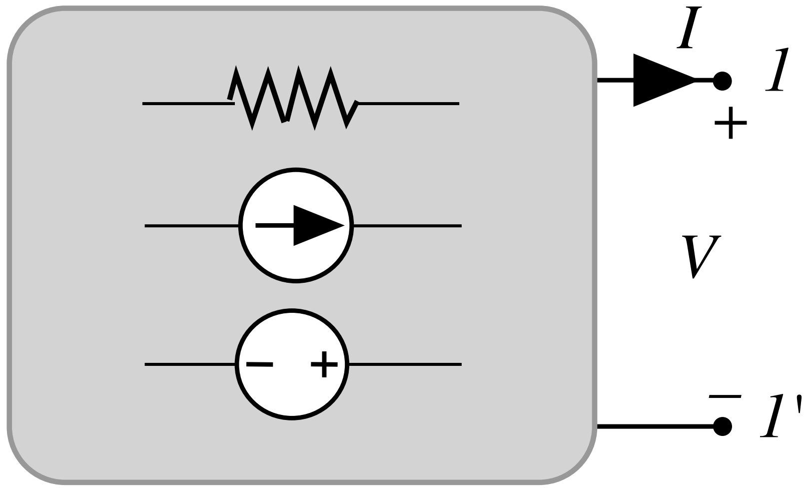
$$\begin{cases} H_{R_{hk}} = H_{R_{kh}} \\ H_{G_{hk}} = H_{G_{kh}} \\ H_{V_{hk}} = -H_{I_{kh}} \end{cases}$$

n.b.: non vale in generale per le reti di *n*-poli affini.

Si può dimostrare rigorosamente (ma non lo facciamo)

Teoremi dei generatori equivalenti

Una rete della quale sono accessibili solo due nodi 1 e 1’ costituisce un bipolo avente per porta i poli 1–1’



Se la rete è di bipoli affini, tale bipolo equivalente alla porta 1-1’ è un bipolo affine, ossia:

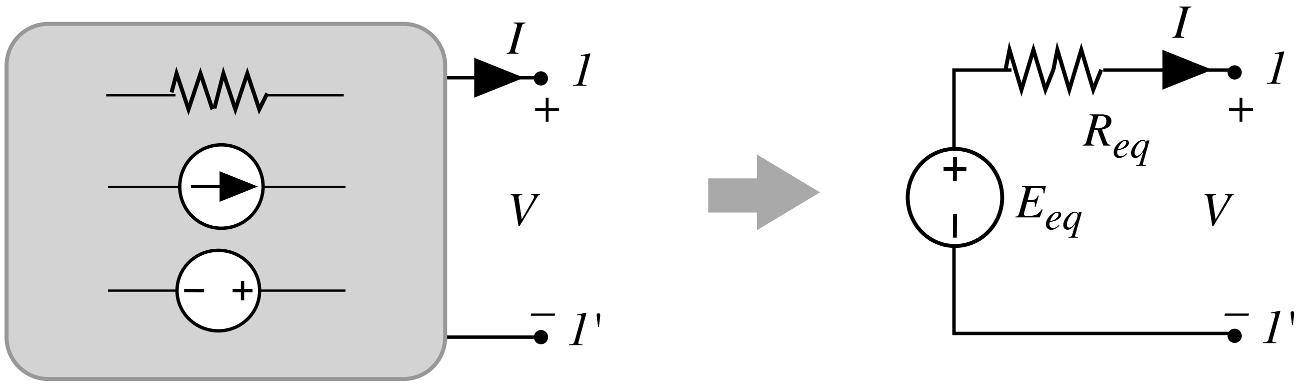
un GAT → teorema di Thévenin

o

un GAC → teorema di Norton

Teorema di Thévenin

Se la rete può funzionare a vuoto tra 1 e 1’, allora equivale a un GAT (generatore equivalente di Thévenin)



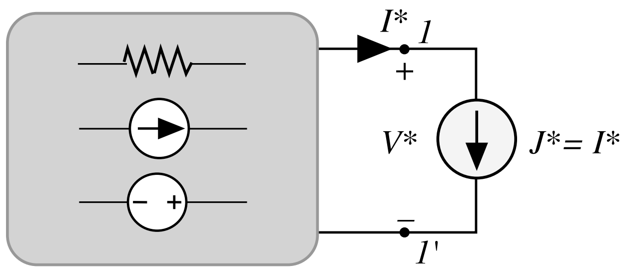
di equazione: $$V = E_{eq} - R_{eq}\, I$$

ove: $$E_{eq} \triangleq V_o \quad , \qquad R_{eq} \triangleq R_i = \frac{V_o}{I_{cc}}$$

n.b.: 1) R_i = “resistenza interna” = della rete resa inerte (con GIT=0 e GIC=0)
2) l’ultima richiede che la rete possa funzionare anche in **cortocircuito** a 1-1’

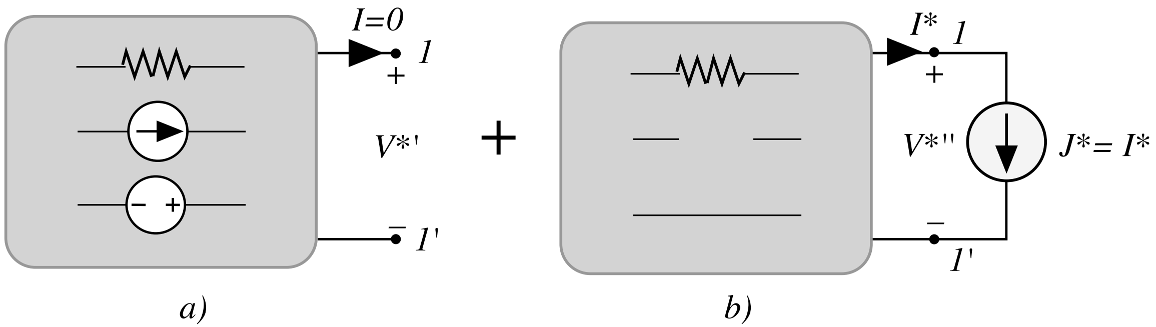
Dimostrazione - 1

Dimostrazione
Consideriamo un punto di lavoro generico (V^*, I^*) stabilito dal GIC J^* esterno alla rete



Applichiamo la sovrapposizione degli effetti:

a) solo GIT e GIC interni
b) solo GIC J^*



Dimostrazione - 2

Sovrapposizione effetti: $V^* = V^{*'} + V^{*''}$

a) azione GIT e GIC interni: $V^{*'} = V_o$

b) azione GIC esterno: $V^{*''} = -R_i I^*$ con $I^* = J^*$

R_i = "resistenza interna" con GIT=0 e GIC=0 (V^* e I^* la convenzionano da generatore)

→ $V^* = V_o - R_i I^*$

Vale per ogni altro punto di lavoro (V^{**}, I^{**}) con gli stessi V_o e R_i

→ è l'**equazione di una retta = equazione del GAT** con:

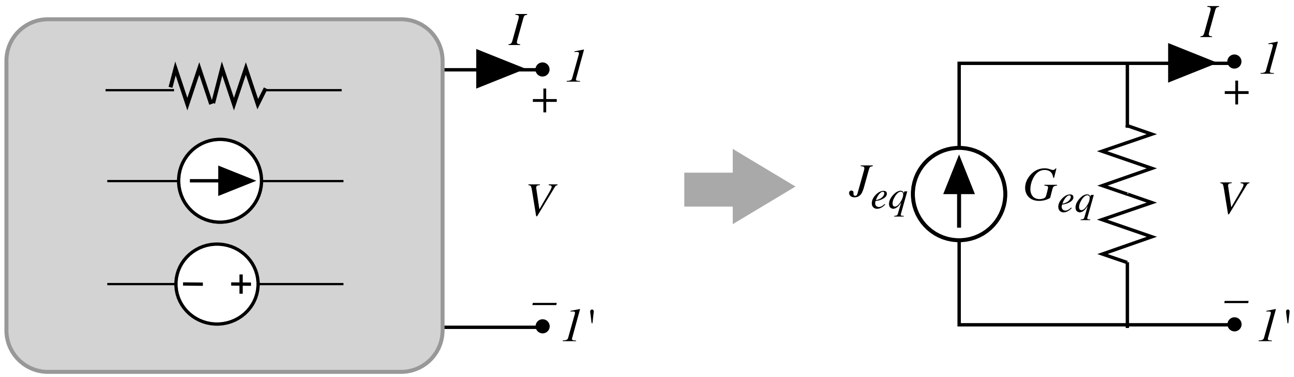
$E_{eq} = V_o$ e $R_{eq} = R_i$

In cortocircuito diviene: $0 = V_o - R_i I_{cc}$

→ $R_i = V_o / I_{cc}$

Teorema di Norton

Se la rete può funzionare in cortocircuito tra 1 e 1’, allora equivale a un GAC (generatore equivalente di Norton)



di equazione:

$$I = J_{eq} - G_{eq} V$$

ove:

$$J_{eq} \triangleq I_{cc} \quad , \qquad G_{eq} \triangleq G_i = \frac{I_{cc}}{V_o}$$

n.b.: 1) G_i = “conduttanza interna” = della rete resa inerte (con GIT=0 e GIC=0)

2) l’ultima richiede che la rete possa funzionare anche a **vuoto** alla porta 1-1’

Dimostrazione

Dimostrazione

1) In modo duale alla dimostrazione di Thévenin

2) Trasformando il generatore di Thévenin nel generatore di Norton:

$$J_{eq} = \frac{E_{eq}}{R_{eq}} = \frac{V_o}{R_i} = I_{cc} \quad , \qquad G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_i} = G_i$$

Esempio -1

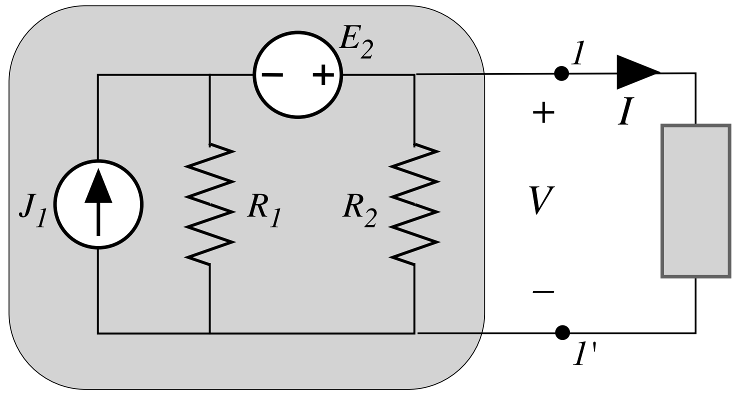
Determiniamo i generatori equivalenti della rete a sinistra di 1-1’:

$J_1 = 15\ A$

$E_2 = 160\ V$

$R_1 = 40\ \Omega$

$R_2 = 60\ \Omega$



Thévenin: cerchiamo E_{eq} e R_{eq}

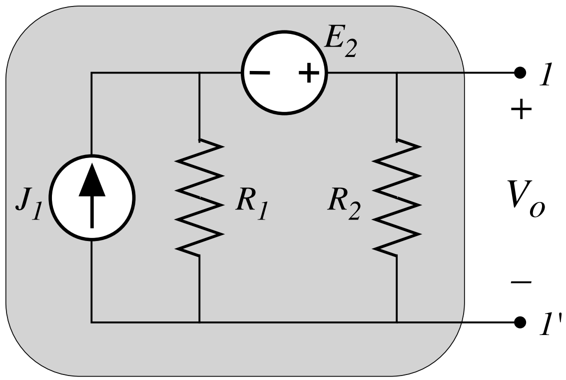
a) con la porta 1-1’ aperta:

$$E_{eq} = V_o = V_2 = \frac{R_2(E_2 + R_1 J_1)}{R_1 + R_2} = 456\ \mathrm{V}$$

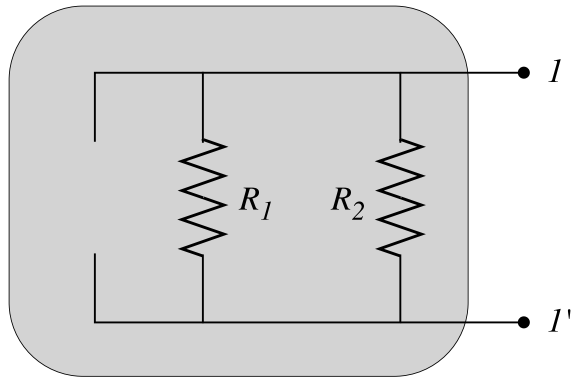
b) con GIT e GIC spenti:

$$R_{eq} = R_i = \frac{R_1\ R_2}{R_1 + R_2} = 24\ \mathrm{V}$$

a)



b)



Esempio -2

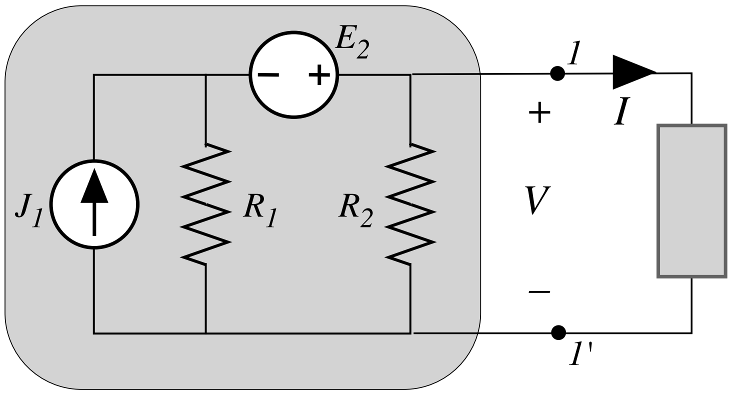
Determiniamo i generatori equivalenti della rete a sinistra di 1-1’:

$J_1 = 15\ A$

$E_2 = 160\ V$

$R_1 = 40\ \Omega$

$R_2 = 60\ \Omega$



Norton: cerchiamo J_{eq} e G_{eq}

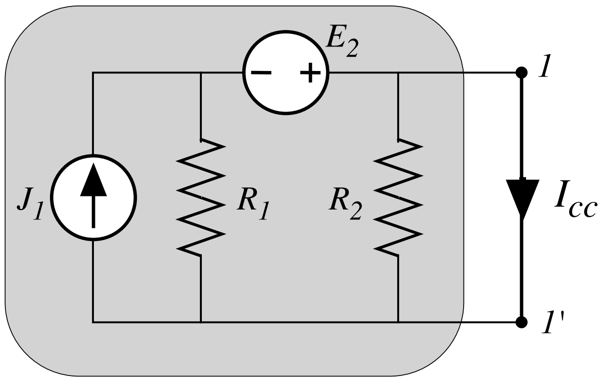
a) con la porta 1-1’ cortocircuitata:

$$J_{eq} = I_{cc} = \frac{E_2}{R_1} + J_1 = 19\ \text{A}$$

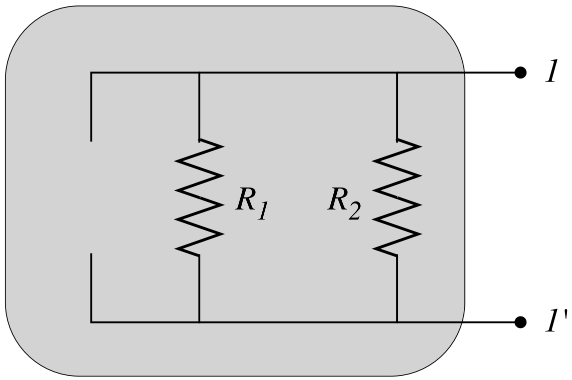
b) con GIT e GIC spenti:

$$G_{eq} = G_i = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0{,}417\ \text{S}$$

a)



b)



n.b: si verifica facilmente che $J_{eq} = \dfrac{E_{eq}}{R_{eq}}$, $G_{eq} = \dfrac{1}{R_{eq}}$

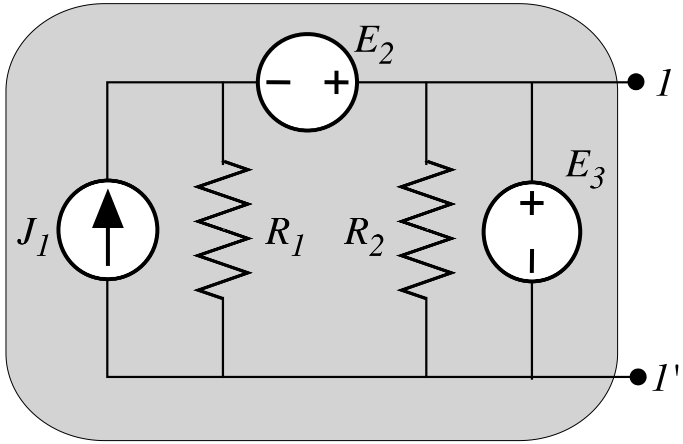
Casi particolari

Determiniamo i generatori equivalenti della rete a sinistra di 1-1’:

a) La porta 1-1’ non può essere cortocircuitata

→ esiste Thévenin: $E_{eq}=E_3$, $R_{eq}=0$

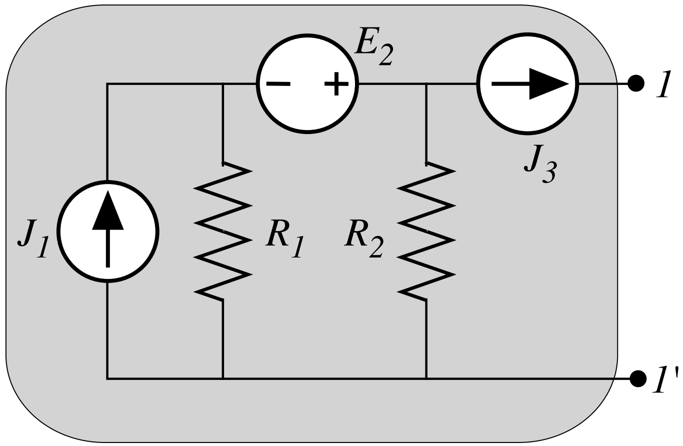
→ non esiste Norton



b) La porta 1-1’ non può stare aperta

→ esiste Norton: $J_{eq}=J_3$, $G_{eq}=0$

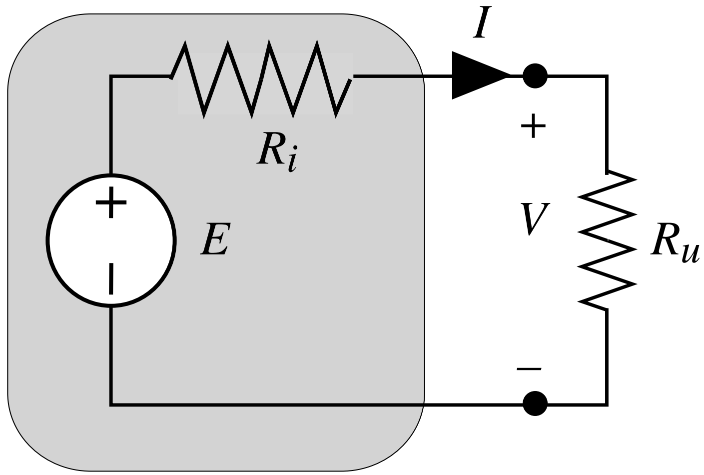
→ non esiste Thévenin



Teorema di Jacobi

anche detto **teorema del massimo trasferimento di potenza**

La potenza massima erogata da un GAT è:



$$P_{max} = \frac{E^2}{4R_i}$$

e si ottiene quando il GAT il carico (utilizzatore) ha resistenza

$$R_u = R_i$$

Dimostrazione. dal capitolo 7: $P = V\,I = \dfrac{R_u E^2}{(R_i + R_u)^2}$

Per un dato generatore (E e R_i), P è funzione solo di R_u. Derivata: $\dfrac{dP}{dR_u} = \dfrac{R_i - R_u}{(R_i + R_u)^3} E^2$

che è >0 per $R_u < R_i$, =0 per $R_u = R_i$, <0 per $R_u > R_i$

→ il massimo si presenta per $R_u = R_i$ - sostituendo in P si ottiene la potenza massima

Teorema di Jacobi

anche detto **teorema del massimo trasferimento di potenza**

per $R_u = R_i \rightarrow \; P_{max} = \dfrac{E^2}{4R_i}$

lo sapevamo già dal cap. 7