Università di Padova - Scuola di Ingegneria

Massimo Guarnieri

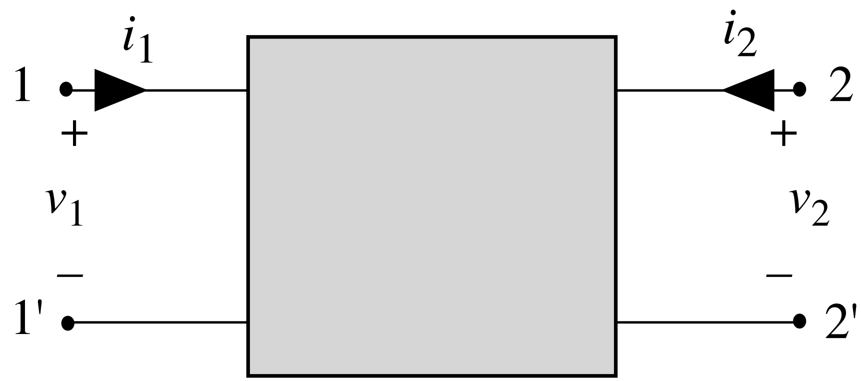
Elettrotecnica

Capitolo 10
Doppi bipoli adinamici

Doppi-bipoli adinamici

Governati da due equazioni che coinvolgono tutte le variabili di porta*

$$\begin{cases} f_1(v_1, v_2, i_1, i_2) = 0 \\ f_2(v_1, v_2, i_1, i_2) = 0 \end{cases}$$



prive di derivate ed integrali

* tipicamente un *m*-bipolo presenta *m* equazioni, una per porta

* consideriamo le porte **convenzionate da utilizzatori**

Sono equazioni implicite …

Equazioni esplicite

Date le due equazioni implicite …

Queste possono essere trasformate:

- trasformazione in altre due equazioni equivalenti esplicite,
- esplicitate in 2 delle 4 i e v (grandezze dipendenti), in funzione delle altre due (grandezze indipendenti)

Quante possibili rappresentazioni esistono?

→ sono le combinazioni di 4 elementi presi 2 a 2: → 6

Equazioni esplicite

Esempio

esplicitate nelle tensioni = rappresentazione controllata in corrente:

$$\begin{cases} v_1 = f_{1c}(i_1, i_2) \\ v_2 = f_{2c}(i_1, i_2) \end{cases}$$

esplicitate nelle correnti = rappresentazione controllata in tensione:

$$\begin{cases} i_1 = f_{1t}(v_1, v_2) \\ i_2 = f_{2t}(v_1, v_2) \end{cases}$$

e così via per ogni altra coppia di variabili dipendenti

Doppi-bipoli adinamici ideali inerti

BDA **ideali**: retti da equazioni algebriche a coefficienti costanti, ossia due equazioni lineari

BDA **inerti**: le equazioni implicite sono verificate da correnti e tensioni nulle

Ne vediamo ora le 6 possibili rappresentazioni e le proprietà che possono presentare

Rappresentazione controllata in corrente

Consideriamo le porte **convenzionate da utilizzatori**

v_1 e v_2 variabili dipendenti

$$\begin{cases} v_1 = R_{11}\, i_1 + R_{12}\, i_2 \\ v_2 = R_{21}\, i_1 + R_{22}\, i_2 \end{cases}$$

Forma matriciale:

$$\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{R}\, \boldsymbol{i}$$

$\boldsymbol{R}$: **matrice di resistenza** o **matrice a vuoto**

Parametri della matrice a vuoto

Parametri di resistenza:

$$\begin{cases} R_{11} = \left.\dfrac{v_1}{i_1}\right|_{i_2=0} \quad [\Omega] & R_{12} = \left.\dfrac{v_1}{i_2}\right|_{i_1=0} \quad [\Omega] \\ R_{21} = \left.\dfrac{v_2}{i_1}\right|_{i_2=0} \quad [\Omega] & R_{22} = \left.\dfrac{v_2}{i_2}\right|_{i_1=0} \quad [\Omega] \end{cases}$$

$R_{11}=R_{1\mathrm{v}}$ resistenza a vuoto alla porta 1, autoresistenza

$R_{22}=R_{2\mathrm{v}}$ resistenza a vuoto alla porta 2, autoresistenza

$R_{12}=$ resistenza di trasferimento tra porta 1 e 2, mutua resistenza

$R_{21}=$ resistenza di trasferimento tra porta 2 e 1, mutua resistenza

n.b.: sono **funzioni di trasferimento**

Rappresentazione controllata in tensione

Consideriamo le porte **convenzionate da utilizzatori**

i_1 e i_2 variabili dipendenti

$$\begin{cases} i_1 = G_{11}\, v_1 + G_{12}\, v_2 \\ i_2 = G_{21}\, v_1 + G_{22}\, v_2 \end{cases}$$

Forma matriciale:

$$\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \boldsymbol{i} = \boldsymbol{G}\, \boldsymbol{v}$$

$\boldsymbol{G}$: **matrice di conduttanza** o **matrice in cortocircuito**

Parametri della matrice in cc

Parametri di conduttanza:

$$\begin{cases} G_{11} = \left.\dfrac{i_1}{v_1}\right|_{v_2=0} \text{[S]} & G_{12} = \left.\dfrac{i_1}{v_2}\right|_{v_1=0} \text{[S]} \\ G_{21} = \left.\dfrac{i_2}{v_1}\right|_{v_2=0} \text{[S]} & G_{22} = \left.\dfrac{i_2}{v_2}\right|_{v_1=0} \text{[S]} \end{cases}$$

$G_{11}=G_{1c}$ conduttanza in c.c. alla porta 1, autoconduttanza

$G_{22}=G_{2c}$ conduttanza in c.c. alla porta 2, autoconduttanza

G_{12}= condutt. di trasferimento tra porta 1 e 2, mutua conduttanza

G_{21}= condutt. di trasferimento tra porta 2 e 1, mutua conduttanza

n.b.: sono **funzioni di trasferimento**

Rappresentazione ibrida 1

Consideriamo le porte **convenzionate da utilizzatori**

v_1 e i_2 variabili dipendenti

$$\begin{cases} v_1 = h_{11}\ i_1 + h_{12}\ v_2 \\ i_2 = h_{21}\ i_1 + h_{22}\ v_2 \end{cases}$$

Forma matriciale:

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}\,\boldsymbol{x}$$

$\boldsymbol{h}$: **matrice ibrida 1 (*h*ybrid, in inglese)**

Parametri della matrice ibrida 1

Parametri ibridi *h*:

$$\begin{cases} h_{11} = \left.\dfrac{v_1}{i_1}\right|_{v_2=0} \quad [\Omega] & h_{12} = \left.\dfrac{v_1}{v_2}\right|_{i_1=0} \quad [0] \\ h_{21} = \left.\dfrac{i_2}{i_1}\right|_{v_2=0} \quad [0] & h_{22} = \left.\dfrac{i_2}{v_2}\right|_{i_1=0} \quad [\mathrm{S}] \end{cases}$$

h_{11}=R_{1c} resistenza in c.c. alla porta 1, autoresistenza in cc

h_{22}=G_{2v} conduttanza a vuoto alla porta 2, autoconduttanza a vuoto

h_{12}= rapporto di trasferimento di tensione, guadagno in tensione per $i_1 = 0$

h_{21}= rapporto di trasferimento di corrente, guadagno in corrente per $v_2 = 0$

n.b.: sono **funzioni di trasferimento**

Rappresentazione ibrida 2

Consideriamo le porte **convenzionate da utilizzatori**

i_1 e v_2 variabili dipendenti

$$\begin{cases} i_1 = g_{11}\, v_1 + g_{12}\, i_2 \\ v_2 = g_{21}\, v_1 + g_{22}\, i_2 \end{cases}$$

Forma matriciale:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}\ \boldsymbol{y}$$

$\boldsymbol{g}$: **matrice ibrida 2**

Parametri della matrice ibrida 2

Parametri ibridi *g*:

$$\begin{cases} g_{11} = \left.\dfrac{i_1}{v_1}\right|_{i_2=0} \quad [\mathrm{S}] & g_{12} = \left.\dfrac{i_1}{i_2}\right|_{v_1=0} \quad [0] \\ g_{21} = \left.\dfrac{v_2}{v_1}\right|_{i_2=0} \quad [0] & g_{22} = \left.\dfrac{v_2}{i_2}\right|_{v_1=0} \quad [\Omega] \end{cases}$$

$g_{11}=G_{1\mathrm{v}}$ conduttanza a vuoto alla porta 1, autoconduttanza a vuoto

$g_{22}=R_{2\mathrm{c}}$ resistenza in c.c. alla porta 2, autoresistenza in cc

g_{12}= rapporto di trasferimento di corrente, guadagno in corrente per $v_1= 0$

g_{21}= rapporto di trasferimento di tensione, guadagno in tensione per $i_2= 0$

n.b.: sono **funzioni di trasferimento**

Funzioni di trasferimento

I parametri delle precedenti matrici sono rapporti tra un effetto e la sua unica causa (una tensione o una corrente applicata alla porta).

In quanto tali sono:

FUNZIONI DI TRASFERIMENTO

Lo sono in particolare i coefficienti mutui:

$R_{12}, R_{21} \qquad G_{12}, G_{21} \qquad h_{12}, h_{21} \qquad g_{12}, g_{21}$

Rappresentazione di trasmissione 1

Consideriamo le porte **convenzionate da utilizzatori**

v_1 e i_1 variabili dipendenti

$$\begin{cases} v_1 = A\, v_2 - B\, i_2 \\ i_1 = C\, v_2 - D\, i_2 \end{cases}$$

Forma matriciale:

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{x}_2$$

$\boldsymbol{T}$: **matrice di trasmissione 1**

Parametri della matrice di trasmissione 1

Parametri di trasmissione T:

$$
\begin{cases}
A = \left.\dfrac{v_1}{v_2}\right|_{i_2=0} \quad [0] & B = -\left.\dfrac{v_1}{i_2}\right|_{v_2=0} \quad [\Omega] \\[2ex]
C = \left.\dfrac{i_1}{v_2}\right|_{i_2=0} \quad [\mathrm{S}] & D = -\left.\dfrac{i_1}{i_2}\right|_{v_2=0} \quad [0]
\end{cases}
$$

Rappresentazione di trasmissione 2

Consideriamo le porte **convenzionate da utilizzatori**

v_2 e i_2 variabili dipendenti

$$\begin{cases} v_2 = A' v_1 + B' i_1 \\ -i_2 = C' v_1 + D' i_1 \end{cases}$$

Forma matriciale:

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{T}' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{T}' \boldsymbol{x}_1$$

$\boldsymbol{T}'$: **matrice di trasmissione 2**

Parametri della matrice di trasmissione 2

Parametri di trasmissione *T ’*:

$$
\begin{cases}
A' = \left.\dfrac{v_2}{v_1}\right|_{i_1=0} \quad [0] & B' = \left.\dfrac{v_2}{i_1}\right|_{v_1=0} \quad [\Omega] \\[2ex]
C' = -\left.\dfrac{i_2}{v_1}\right|_{i_1=0} \quad [\mathrm{S}] & D' = -\left.\dfrac{i_2}{i_1}\right|_{v_1=0} \quad [0]
\end{cases}
$$

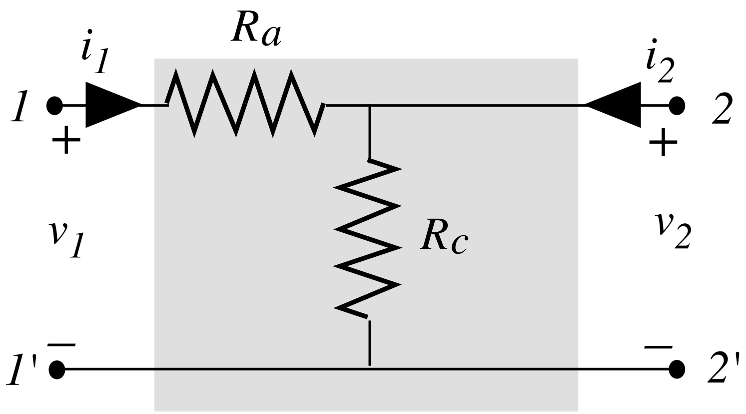
Parametri di trasmissione

Nel caso delle matrici ***T*** e ***T'*** i denominatori nelle espressioni dei parametri non possono essere interpretati come cause, perché corrispondono a porte a vuoto o in cortocircuito, quindi del tutto inerti

→ I parametri delle matrici di trasmissione ***T*** e ***T'*** non sono rapporti tra un effetto e la sua causa

→ non sono funzioni di trasferimento

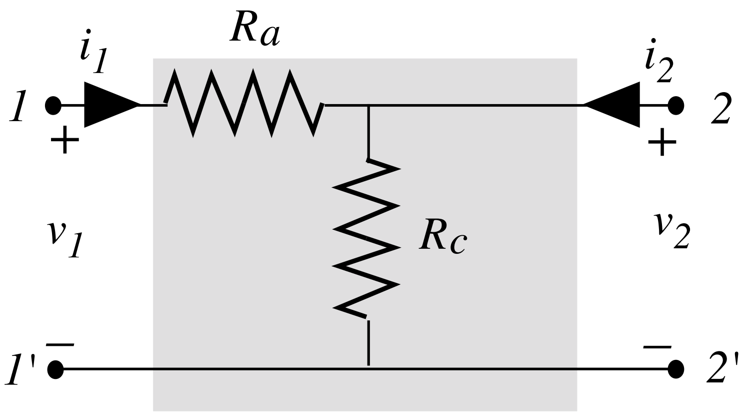
Esempio -1



Valgono le seguenti relazioni:

$$
\begin{cases}
i_2 = 0: & v_1 = (R_a + R_c) i_1 & v_2 = R_c i_1 & i_1 = \dfrac{1}{R_a + R_c} v_1 & v_2 = \dfrac{R_c}{R_a + R_c} v_1 \\
i_1 = 0: & v_2 = R_c i_2 & v_1 = R_c i_2 & v_1 = v_2 & i_2 = \dfrac{1}{R_c} v_2 \\
v_2 = 0: & v_1 = R_a i_1 & i_2 = -i_1 & i_1 = \dfrac{1}{R_a} v_1 & i_2 = -\dfrac{1}{R_a} v_1 \\
v_1 = 0: & v_2 = \dfrac{R_a R_c}{R_a + R_c} i_2 & i_1 = -\dfrac{R_c}{R_a + R_c} i_2 & i_1 = -\dfrac{1}{R_a} v_2 & i_2 = \dfrac{R_a + R_c}{R_a R_c} v_2
\end{cases}
$$

Esempio -2

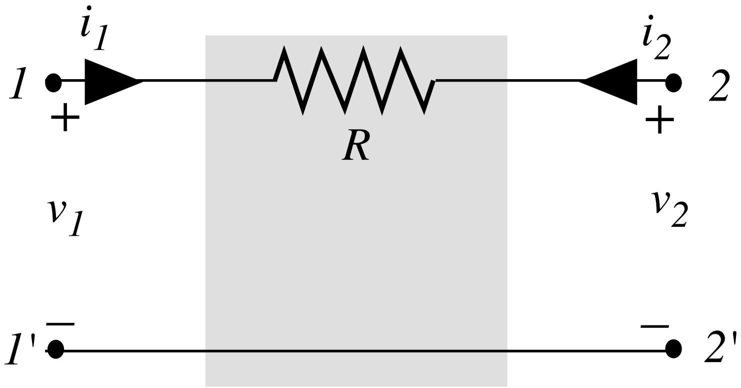


Dalle quali si ricava:

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} R_a + R_c & R_c \\ R_c & R_c \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{h} = \begin{bmatrix} R_a & 1 \\ -1 & \dfrac{1}{R_c} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \dfrac{R_a + R_c}{R_c} & R_a \\ \dfrac{1}{R_c} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_a} & \dfrac{-1}{R_a} \\ \dfrac{-1}{R_a} & \dfrac{R_a + R_c}{R_a R_c} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_a + R_c} & \dfrac{-R_c}{R_a + R_c} \\ \dfrac{R_c}{R_a + R_c} & \dfrac{R_a R_c}{R_a + R_c} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{T}' = \begin{bmatrix} 1 & -R_a \\ -\dfrac{1}{R_c} & \dfrac{R_a + R_c}{R_c} \end{bmatrix}$$

Esempio -3



n.b.: la matrice ***R*** non esiste, perché avrebbe tutti i parametri infiniti

$$\boldsymbol{h} = \begin{bmatrix} R & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R} & -\dfrac{1}{R} \\ -\dfrac{1}{R} & \dfrac{1}{R} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & R \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{T}' = \begin{bmatrix} 1 & -R \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Relazioni tra parametri -1

È evidente che due a due sono inverse

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{R}^{-1} \qquad \boldsymbol{g} = \boldsymbol{h}^{-1} \qquad \boldsymbol{T'} = \boldsymbol{T}^{-1}$$

Ad esempio, nel caso della prima uguaglianza:

$$G_{11} = \frac{R_{22}}{\Delta R} \qquad G_{22} = \frac{R_{11}}{\Delta R} \qquad G_{12} = \frac{-R_{12}}{\Delta R} \qquad G_{21} = \frac{-R_{21}}{\Delta R}$$

$$R_{11} = \frac{G_{22}}{\Delta G} \qquad R_{22} = \frac{G_{11}}{\Delta G} \qquad R_{12} = \frac{-G_{12}}{\Delta G} \qquad R_{21} = \frac{-G_{21}}{\Delta G}$$

ove i determinanti sono:

$$\Delta R = R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21} \qquad \Delta G = G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}$$

Relazioni tra parametri - 2

In generale:
tutti i parametri di una matrice sono deducibili da quelli di un'altra, perché entrambe sono dedotte dalle stesse equazioni implicite e quindi, di fatto sono tutte tra loro equivalenti.

Esempi deducibili con un po' di algebra dalle equazioni rappresentative:

$$\begin{cases} R_{11} = \dfrac{1}{g_{11}} = \dfrac{A}{C} & R_{12} = \dfrac{h_{12}}{h_{22}} = -\dfrac{1}{C'} \\ R_{21} = \dfrac{g_{21}}{g_{11}} = \dfrac{1}{C} & R_{22} = \dfrac{1}{h_{22}} = -\dfrac{A'}{C'} \end{cases} \qquad \begin{cases} h_{11} = \dfrac{\Delta R}{R_{22}} & h_{12} = \dfrac{R_{12}}{R_{22}} \\ h_{21} = \dfrac{R_{21}}{R_{22}} & h_{22} = \dfrac{1}{R_{22}} \end{cases}$$

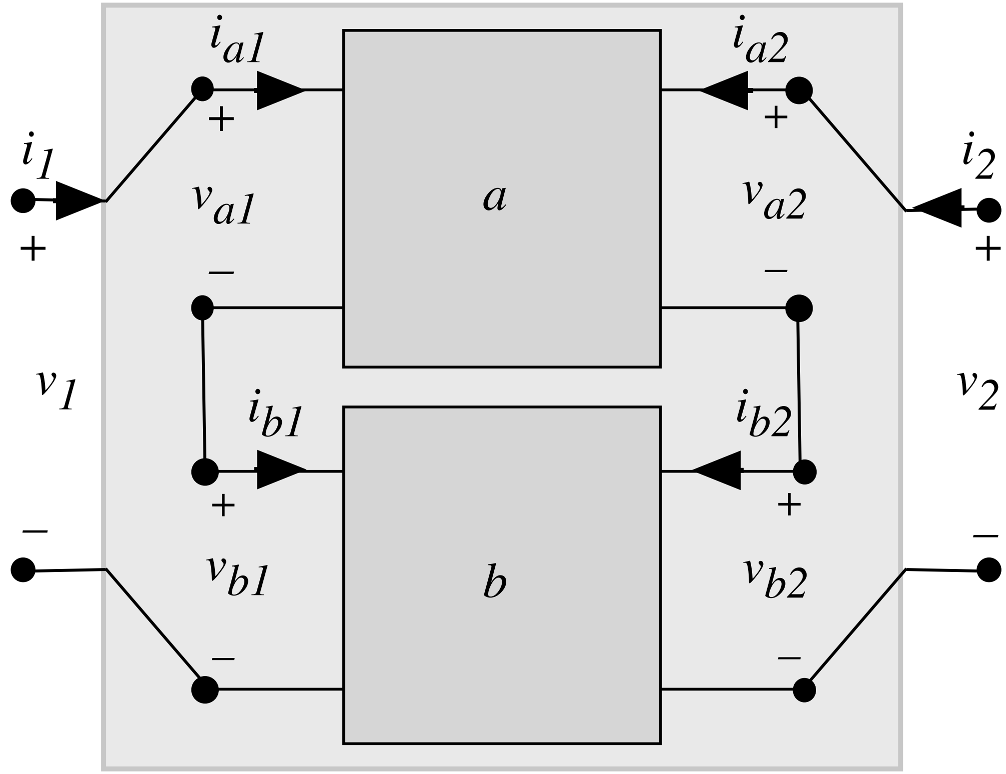
Applicazione: 2 BDA con porte in serie

Eq. tipologiche $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{R}_a\,\boldsymbol{i}_a$

$\boldsymbol{v}_b = \boldsymbol{R}_b\,\boldsymbol{i}_b$

Eq. topologiche $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_a + \boldsymbol{v}_b$

$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}_a = \boldsymbol{i}_b$



→ $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_a + \boldsymbol{v}_b =$

$$= \boldsymbol{R}_a\,\boldsymbol{i}_a + \boldsymbol{R}_b\,\boldsymbol{i}_b =$$

$$= \left(\boldsymbol{R}_a + \boldsymbol{R}_b\right)\boldsymbol{i} \;= \boldsymbol{R}_s\,\boldsymbol{i}$$

$$\rightarrow \quad \boldsymbol{R}_s = \boldsymbol{R}_a + \boldsymbol{R}_b$$

→ Il doppio bipolo equivalente alla serie si ottiene sommando le matrici di resistenza

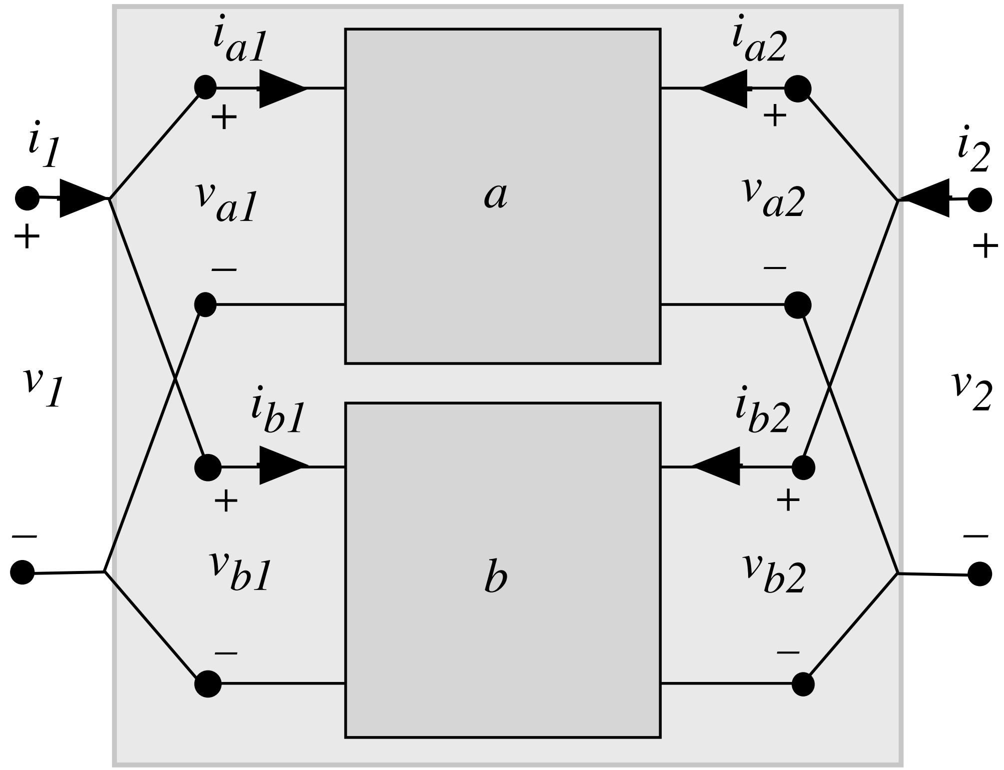
Applicazione: 2 BDA con porte in parallelo

Eq. tipologiche $\boldsymbol{i}_a = \boldsymbol{G}_a \boldsymbol{v}_a$

$\boldsymbol{i}_b = \boldsymbol{G}_b \boldsymbol{v}_b$

Eq. topologiche $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}_a + \boldsymbol{i}_b$

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_b$



→ $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}_a + \boldsymbol{i}_b =$

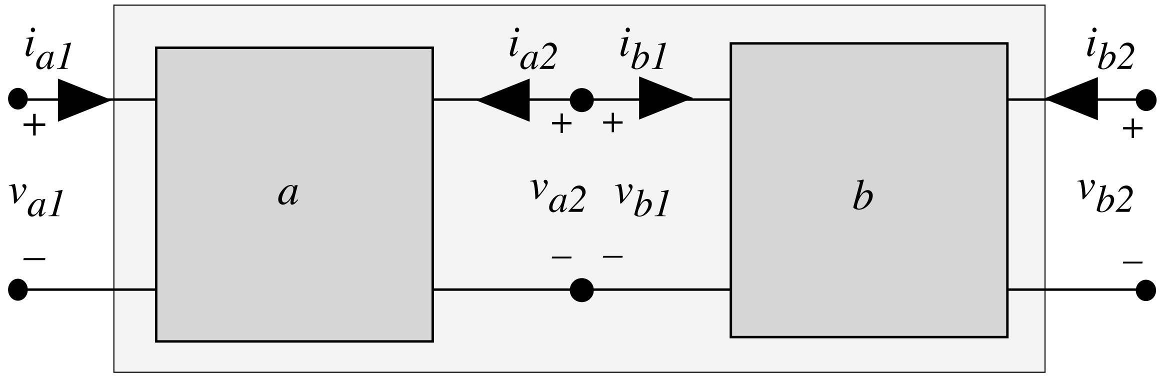
$= \boldsymbol{G}_a \boldsymbol{v}_a + \boldsymbol{G}_b \boldsymbol{v}_b =$

$= (\boldsymbol{G}_a + \boldsymbol{G}_b)\boldsymbol{v} \;= \boldsymbol{G}_p \boldsymbol{v}$

$\rightarrow \quad \boldsymbol{G}_p = \boldsymbol{G}_a + \boldsymbol{G}_b$

→ Il doppio bipolo equivalente al parallelo si ottiene sommando le matrici di conduttanza

Applicazione : 2 BDA con porte in cascata



Eq. tipologiche

$$\boldsymbol{x}_{a1} = \boldsymbol{T}_a \boldsymbol{x}_{a2}$$

$$\boldsymbol{x}_{b1} = \boldsymbol{T}_b \boldsymbol{x}_{b2}$$

Eq. topologiche

$$\boldsymbol{x}_{a2} = \begin{bmatrix} v_{a2} \\ -i_{a2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{b1} \\ i_{b1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}_{b1}$$

→ $$\boldsymbol{x}_{a1} = \boldsymbol{T}_a \boldsymbol{x}_{a2} = \boldsymbol{T}_a \boldsymbol{x}_{b1} =$$

$$= \boldsymbol{T}_a \left(\boldsymbol{T}_b \boldsymbol{x}_{b2} \right) = \left(\boldsymbol{T}_a \boldsymbol{T}_b \right) \boldsymbol{x}_{b2} = \boldsymbol{T}_c \boldsymbol{x}_{b2} \qquad \rightarrow \boldsymbol{T}_c = \boldsymbol{T}_a \boldsymbol{T}_b$$

→ Il doppio bipolo equivalente si ottiene moltiplicando le matrici di trasmissione

Reciprocità

Significa che i rapporti causa-effetto alle porte sono scambiabili.

(È una proprietà analoga a quella prevista dal teorema di reciprocità, ma diversa, perché il teorema si applica a reti di soli bipoli).

Non tutti i doppi bipoli sono reciproci. Formulazione più immediata:

$$\left.\frac{v_1}{i_2}\right|_{i_1=0} = \left.\frac{v_2}{i_1}\right|_{i_2=0} \qquad \left.\frac{i_1}{v_2}\right|_{v_1=0} = \left.\frac{i_2}{v_1}\right|_{v_2=0}$$

Equivalgono a:

$$R_{12} = R_{21} \qquad G_{12} = G_{21}$$

$$h_{12} = -h_{21} \qquad g_{12} = -g_{21}$$

$$A\,D - B\,C = 1 \qquad A'\,D' - B'\,C' = 1$$

solo se queste condizioni sono vere il doppio bipolo è reciproco

Simmetria

Significa che tensioni e correnti non cambiano scambiando tra loro la porta 1 con la porta 2. Non tutti i doppi bipoli sono simmetrici.

Si verifica se vale la reciprocità con in più le seguenti uguaglianze:

$$R_{11} = R_{22} \qquad G_{11} = G_{22}$$

$$h_{11}\, h_{22} + h_{12}{}^{2} = 1 \qquad g_{11}\, g_{22} + g_{12}{}^{2} = 1$$

$$A = D \qquad A' = D'$$

solo se queste condizioni e quelle di reciprocità sono vere il doppio bipolo è simmetrico

Passività

Essendo il doppio bipolo adinamico e essendo le porte convenzionate da utilizzatori, esso è passivo se

$$p(t) = v_1(t)\, i_1(t) + v_2(t)\, i_2(t) \geq 0$$

conseguenze sulla matrice $\boldsymbol{R}$ → $p = R_{11}\, i_1^{\,2} + (R_{12} + R_{21}) i_1 i_2 + R_{22}\, i_2^{\,2} \geq 0$

Pertanto:

i_2=0 → $R_{11} \geq 0$; i_1=0 → $R_{22} \geq 0$

$i_2 \neq 0$ dividiamo per i_2^2 e poniamo $x = i_1/i_2$

→ $p/i_2^2 = y(x) = R_{11}\, x^2 + (R_{12} + R_{21})\, x + R_{22} \geq 0$

È una parabola concava verso l’alto il cui vertice (il minimo) deve avere ordinata ≥0

→ $$R_{11} R_{22} \geq \left(\frac{R_{12} + R_{21}}{2} \right)^2$$

Passività

Quindi un doppio bipolo passivo verifica le seguenti condizioni:

$$R_{11} \geq 0 \qquad R_{22} \geq 0 \qquad R_{11} R_{22} \geq \left(\frac{R_{12} + R_{21}}{2} \right)^2$$

n.b.: nessun vincolo è posto sui segni di R_{12} e R_{21}.

Matrice ***G*** - analogamente si trova →

$$G_{11} \geq 0 \qquad G_{22} \geq 0 \qquad G_{11} G_{22} \geq \left(\frac{G_{12} + G_{21}}{2} \right)^2$$

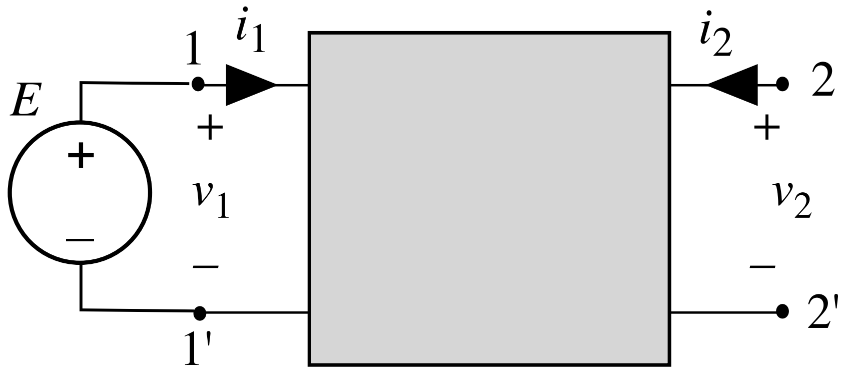
Specifiche relazioni di passività valgono per le altre matrici

Non amplificazione

Un doppio bipolo non amplifica se, alimentato ad una porta (così da assorbirvi potenza) ha tensione e corrente all'altra porta minori in modulo di quelle della porta alimentata.

In particolare:

$$\begin{cases} |v_1| = |R_{11}\, i_1| \\ |v_2| = |R_{21}\, i_1| \end{cases}$$



Imponendo la non amplificazione delle tensioni:

$$|v_1| \geq |v_2| \quad \rightarrow \quad |R_{11}| \geq |R_{21}|$$

Interessa in particolare se il doppio bipolo è passivo → $R_{11} \geq |R_{21}|$

Non amplificazione

Considerando anche il funzionamento a porte invertite, le condizioni di non amplificazione sulla matrice $\boldsymbol{R}$ sono dunque

$$R_{11} \geq |R_{21}| \qquad R_{22} \geq |R_{12}|$$

Per la matrice $\boldsymbol{G}$: imponendo la non amplificazione delle correnti →

$$G_{11} \geq |G_{21}| \qquad G_{22} \geq |G_{12}|$$

Per le matrici $\boldsymbol{h}$ e $\boldsymbol{g}$: direttamente dalle definizioni dei 4 guadagni

$$|h_{12}| \leq 1 \quad |h_{21}| \leq 1 \quad |g_{12}| \leq 1 \quad |g_{21}| \leq 1$$

Se queste condizioni sono violate **il doppio bipolo passivo può amplificare**

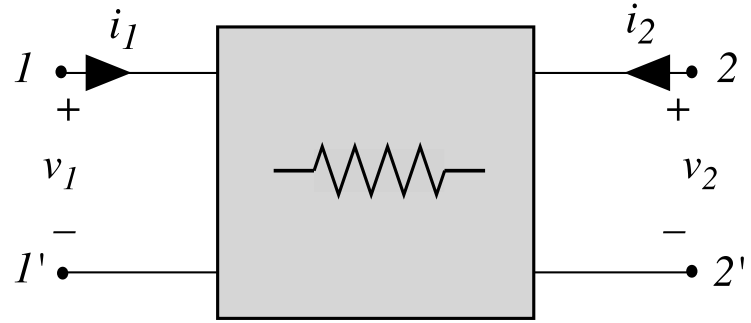
Tipologie di doppi bipoli adinamici ideali inerti

Esaminiamo nel seguito alcune tipologie di doppi bipoli adinamici ideali inerti particolarmente importanti:

- Doppio bipolo resistivo
- Generatori pilotati
- Trasformatore ideale

n.b.: esistono anche il giratore ideale, di interesse nei sistemi di comunicazione, e l'amplificatore operazionale ideale, di grande interesse per l'elettronica di segnale, che che però noi non sviluppiamo

Doppio bipolo resistivo



Doppio resistivo è realizzabile con una rete di resistori della quale sono accessibili due porte

Essendo costituito da una rete di resistori, deve essere:

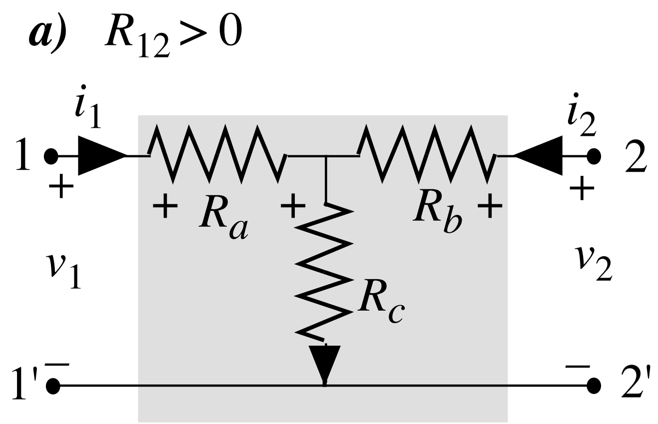
passivo: $$R_{11} \geq 0 \quad , \quad R_{22} \geq 0 \quad , \quad R_{11} R_{22} \geq \left(\frac{R_{12} + R_{21}}{2} \right)^2$$

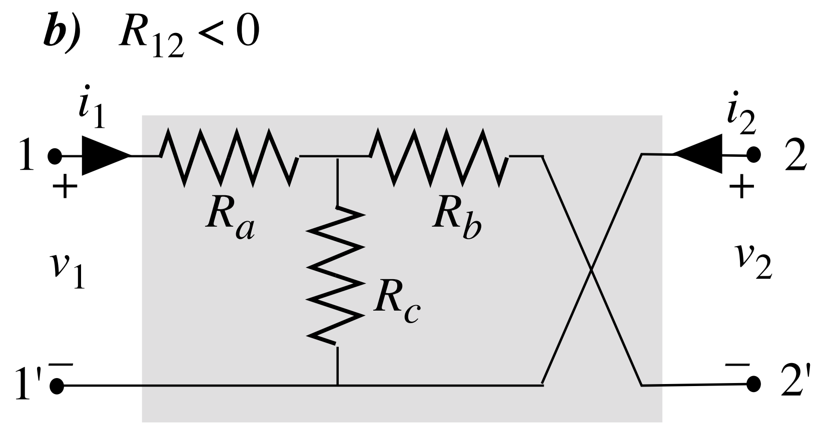
reciproco: $R_{12} = R_{21}$

non amplificante: $R_{11} \geq |R_{21}| \qquad R_{22} \geq |R_{12}|$

Può essere sintetizzato con una rete di 3 resistori a T o Pi-greco (Π), dato che tre sono i parametri indipendenti

Sintesi a T





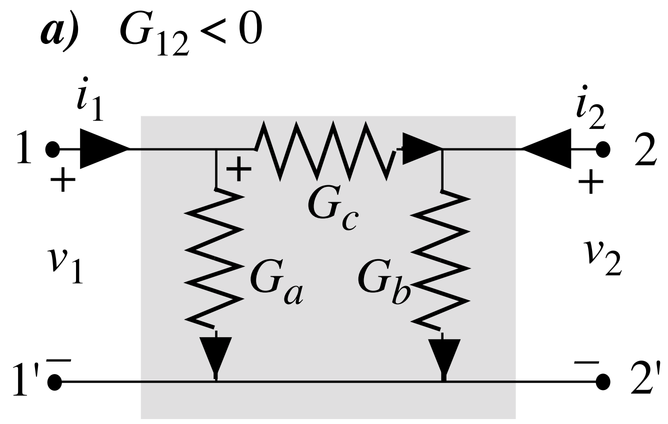
Caso a): R_{12}>0

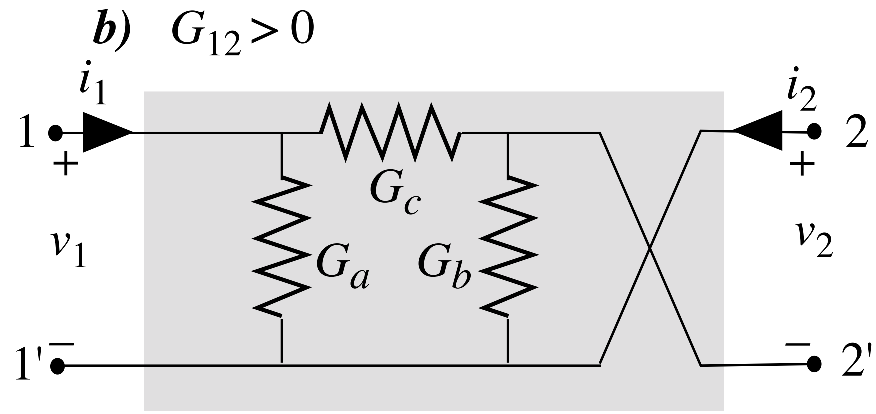
$$\begin{cases} v_1 = R_a i_1 + R_c i_c = (R_a + R_c) i_1 + R_c i_2 \\ v_2 = R_b i_2 + R_c i_c = (R_b + R_c) i_2 + R_c i_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_a = R_{11} - R_{12} \\ R_b = R_{22} - R_{21} \\ R_c = R_{12} = R_{21} \end{cases}$$

Caso b): se R_{21}<0 la relazione di sintesi non è applicabile perché darebbe R_c<0 → si rovesciano i riferimenti ad una porta e così nelle relazioni di sintesi cambia il segno davanti a R_{12} e R_{21} e si ottiene R_c>0

Sintesi a Π





Procedendo in modo duale (***R*** e ***G*** oltre che inverse sono anche duali!)

Caso a): $G_{12}<0$

$$\begin{cases} G_a = G_{11} + G_{12} \\ G_b = G_{22} + G_{21} \\ G_c = -G_{12} = -G_{21} \end{cases}$$

Caso b) $G_{12}>0$

$$\begin{cases} G_a = G_{11} - G_{12} \\ G_b = G_{22} - G_{21} \\ G_c = G_{12} = G_{21} \end{cases}$$

Generatori pilotati

Generatori comandati o generatori dipendenti:

- La grandezza impressa e o j dipende da v o i di un altro lato.
- sono doppi bipoli adinamici inerti ove:

1) alla porta 1 è costituita da un circuito aperto oppure un cortocircuito; la grandezza non nulla, v o i rispettivamente, è detta **grandezza di comando**;
2) alla porta 2 è connesso un generatore ideale con **grandezza impressa** (*e* o *j*) funzione (**grandezza comandata**) della grandezza di comando della porta 1.

Le possibili combinazioni tensione/corrente danno origine a 4 diversi generatori pilotati

GTPT ideale

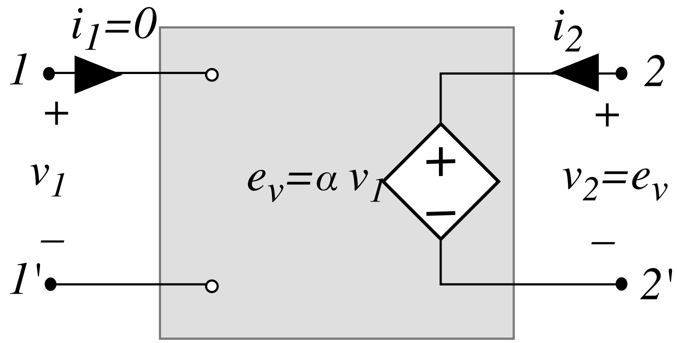
Generatore ideale di tensione pilotato in tensione

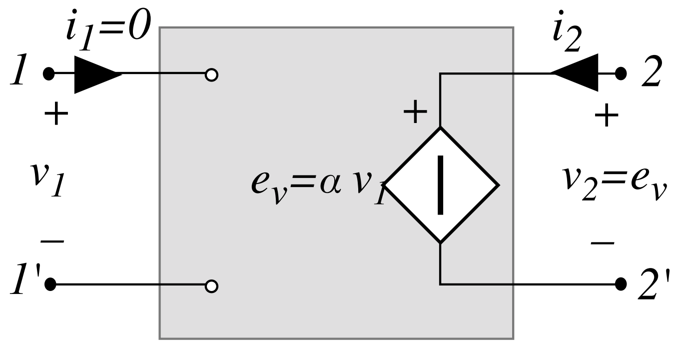
$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ v_2 = e_v = \alpha v_1 \end{cases}$$

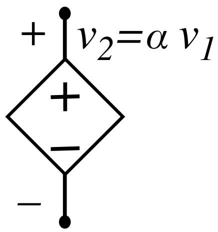
α = guadagno in tensione [adimens.]

matrici rappresentative: soltanto ***g*** e ***T***

$$\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$







GTPC ideale

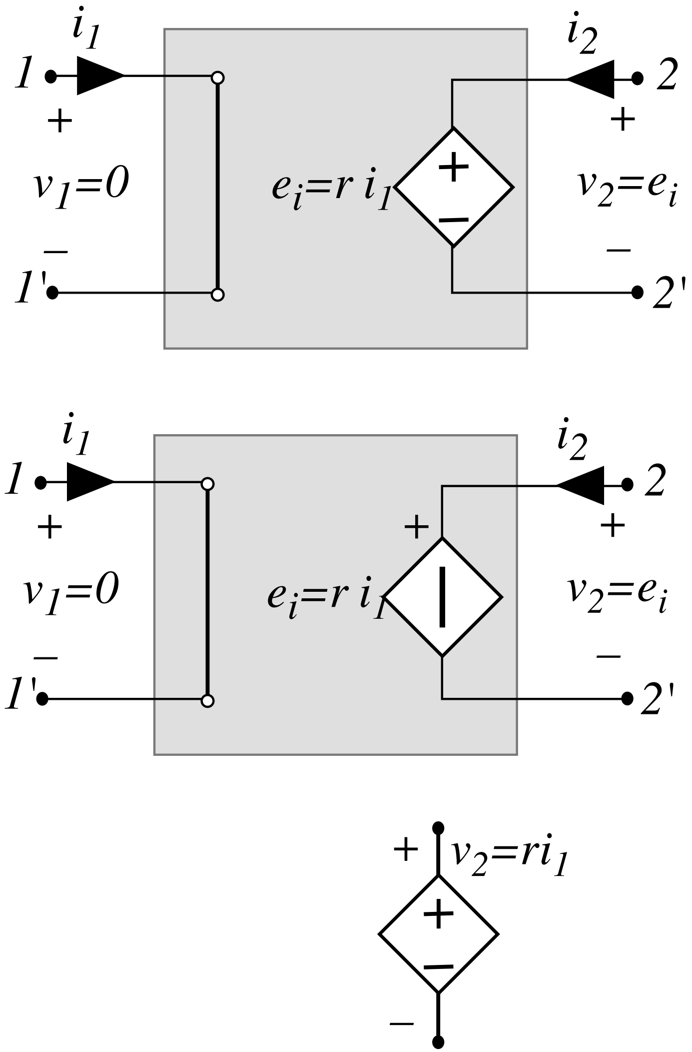
Generatore ideale di tensione pilotato in corrente

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = e_i = r\, i_1 \end{cases}$$

r = transresistenza [Ω]

matrici rappresentative: soltanto ***R*** e ***T***

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix}$$



GCPT ideale

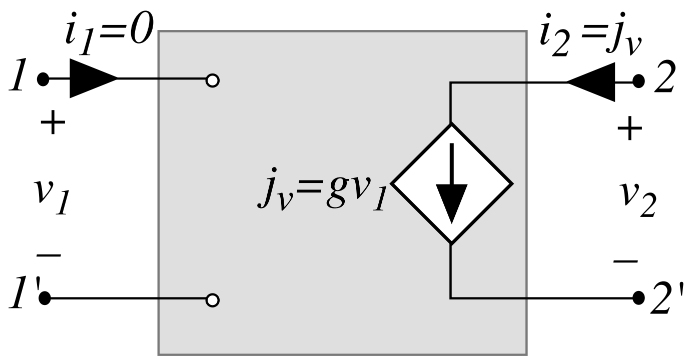
Generatore ideale di corrente pilotato in tensione

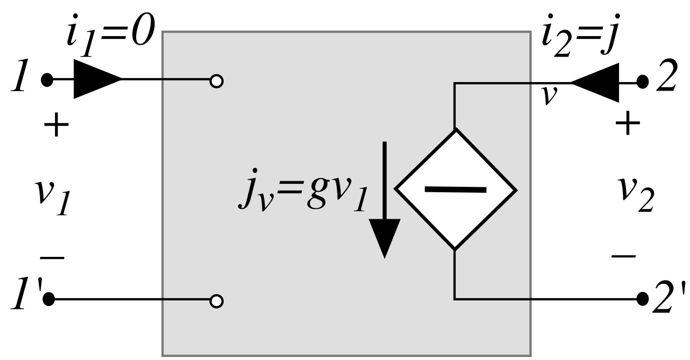
$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ i_2 = j_v = g\,v_1 \end{cases}$$

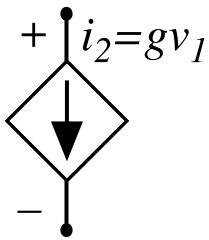
g = transconduttanza [S]

matrici rappresentative: soltanto ***G*** e ***T***

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{g} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$







GCPC ideale

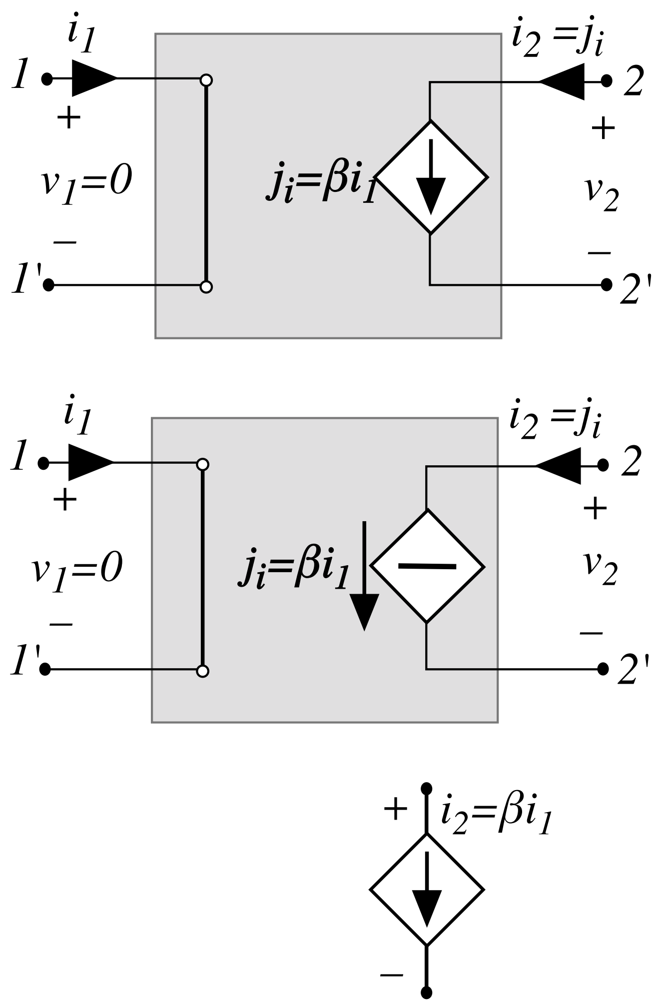
Generatore ideale di corrente pilotato in corrente

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ i_2 = j_2 = \beta\, i_1 \end{cases}$$

β = guadagno in corrente [adimens.]

matrici rappresentative: soltanto ***h*** e ***T***

$$\boldsymbol{h} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\beta} \end{bmatrix}$$



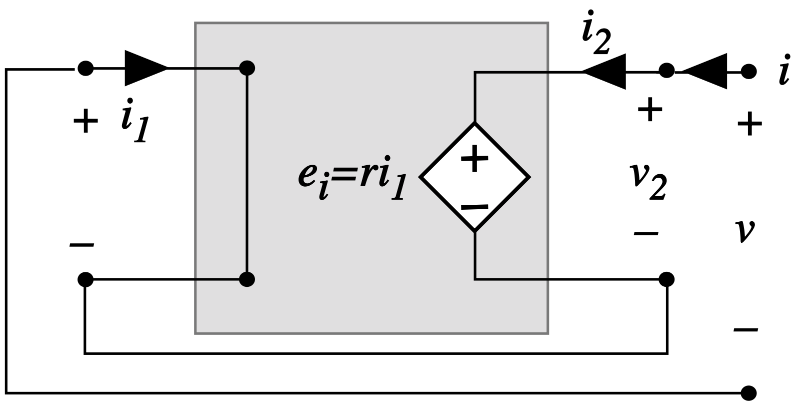
Generatori pilotati ideali

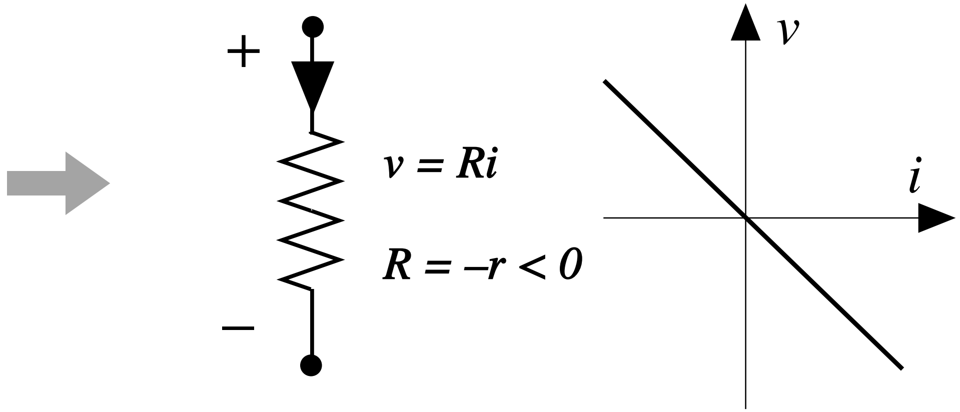
Proprietà:

- Non reciproci (si verifica immediatamente dall'esame dei parametri matriciali. Es. per il GTPT h_{12}=0 e $h_{21}=-\alpha$: la reciprocità richiede $h_{12}=-h_{21}$)
- Attivi: $p_1 = 0$ e $p_2 < 0, = 0, > 0$
- Essendo attivi possono amplificare ad es. il GTPT per $\alpha > 1$ e il GCPC per $\beta > 1$
- Sono utili nel realizzare circuiti equivalenti di vari dispositivi, in particolare di dispositivi elettronici quali transistor, triodi, ecc.

Generatori pilotati ideali

- Esempio:



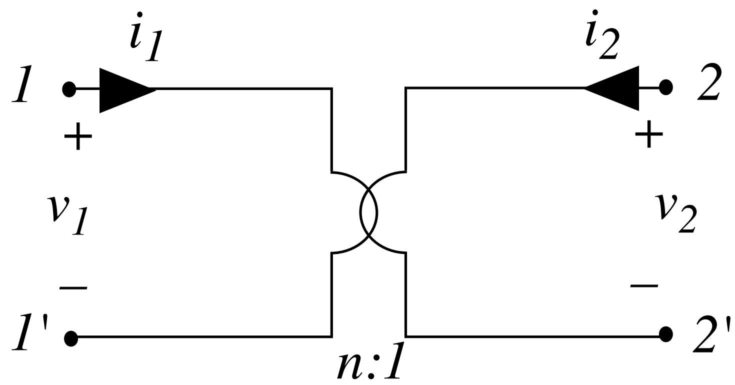


$$\begin{cases} v = v_2 - v_1 = v_2 = r\, i_1 \\ i = i_2 = -i_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v = -r\, i = R\, i \quad \text{con} \quad R < 0$$

Trasformatore ideale

Equazioni:

$$\begin{cases} v_1(t) = n\,v_2(t) \\ i_1(t) = -\dfrac{1}{n}\,i_2(t) \end{cases}$$



n = rapporto di trasformazione [adim.]

matrici:

$$\boldsymbol{h} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{n} & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{n} \end{bmatrix} \;,\quad T' = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{G}$ non esistono

Trasformatore ideale

Proprietà:

- amplifica (se $n \neq 1$). Es. se $n>1$, alimentando la porta 2, alla porta 1 a vuoto si ha $v_1 = n\, v_2 > v_2$
- reciproco (verificabile con ***h:*** $h_{12}=-h_{21}$ o con le altre matrici)
- trasparenza alla potenza: $p \equiv 0$ (caso limite di passività):

$$p(t) = v_1(t)\,i_1(t) + v_2(t)\,i_2(t) =$$

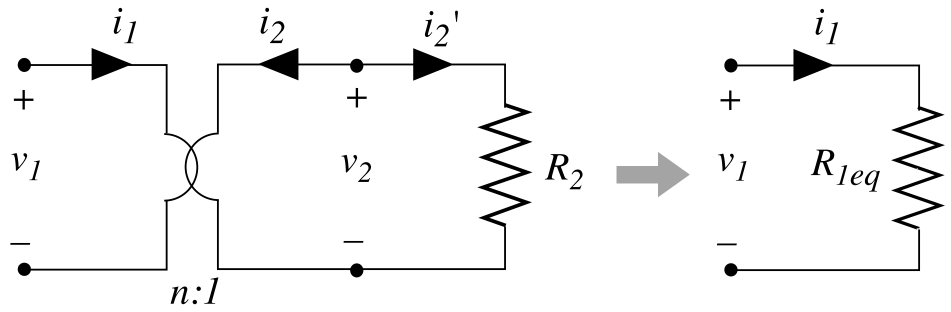
$$= n v_2(t)\left[-\frac{1}{n} i_2(t)\right] + v_2(t)\,i_2(t) =$$

$$= -v_2(t)\,i_2(t) + v_2(t)\,i_2(t) = 0$$

Trasformatore ideale

Proprietà:

- trasferimento di resistenza:

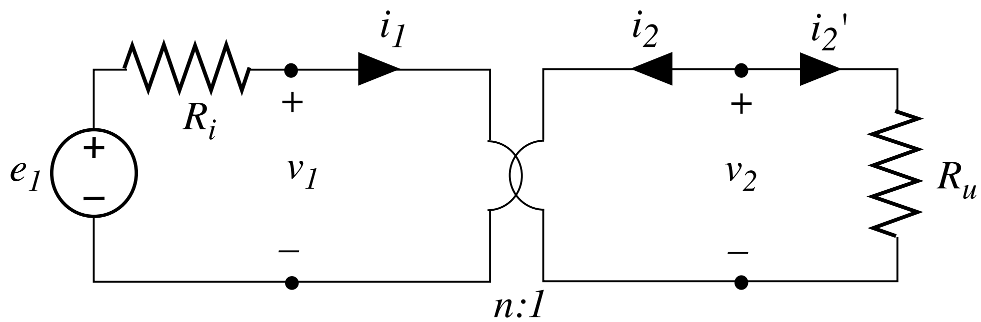


$$R_{1eq} = \frac{v_1}{i_1} = \frac{n\, v_2}{-\frac{i_2}{n}} = n^2 \frac{v_2}{-i_2} = n^2 \frac{v_2}{i_2\,'} = n^2 R_2$$

Esempio:

E = 300 V, R_i = 200 Ω,

R_u = 8 Ω



- senza trasformatore (connessione diretta GAT-carico) → P_u= 16,6 W
- con trasformatore con n=5 → P_u= 112,5 W
  (condizione di max. trasferimento di potenza)

Esempio di uso dei generatori pilotati ideali

Esempio per transistor *npn*: modello accurato ottenuto con rete contente anche un GTPT e un GCPC