Università di Padova - Scuola di Ingegneria

Massimo Guarnieri

Elettrotecnica

Capitolo 11

Reti lineari adinamiche con doppi bipoli

Equazioni di rete

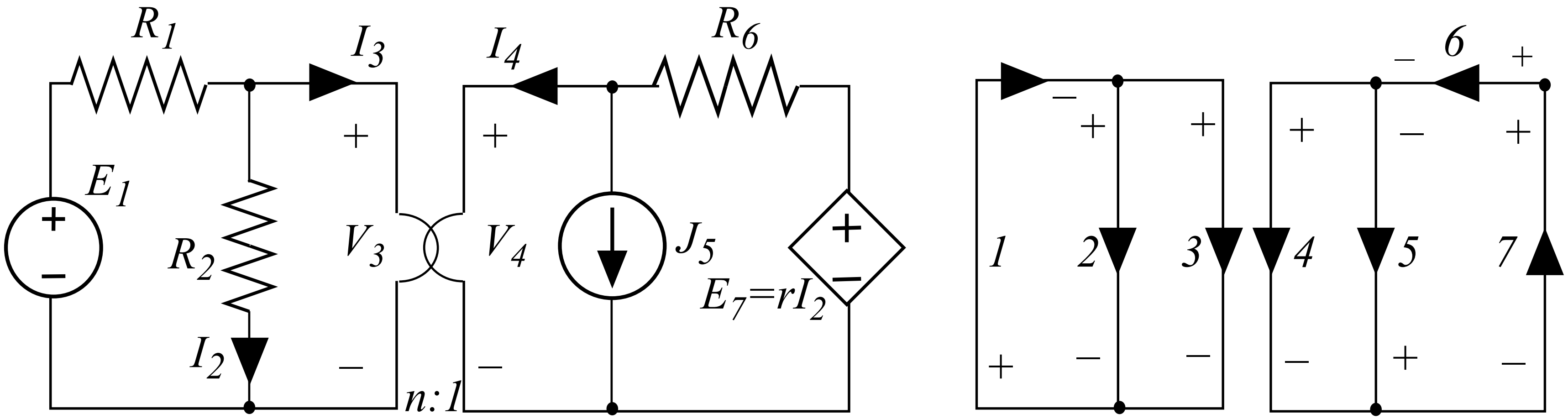
Gli ℓ lati, con ℓ tensioni e ℓ correnti, sono le porte di bipoli e doppi bipoli.
Il sistema lineare solutivo è costituito da:

- ℓ equazioni topologiche (n–1 della LKC e m della LKT)
- ℓ equazioni tipologiche (1 per ogni bipolo e 2 per ogni doppio bipolo)

Dato che il sistema è lineare, se la rete non è singolare (come assumiamo al solito), la soluzione è unica

Ma ci sono alcune particolarità rispetto alle reti di soli bipoli che devono essere messe in evidenza

Esempio



$$\text{LKT}\begin{cases} V_1 + V_2 = 0 \\ V_2 - V_3 = 0 \\ V_4 + V_5 = 0 \\ V_5 - V_6 + V_7 = 0 \end{cases} \qquad \text{bipoli}\begin{cases} V_1 - R_1 I_1 = -E_1 \\ V_2 - R_2 I_2 = 0 \\ I_5 = J_5 \\ V_6 - R_6 I_6 = 0 \end{cases}$$

$$\text{LKC}\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ I_4 + I_5 - I_6 = 0 \\ I_6 - I_7 = 0 \end{cases} \qquad \text{doppi bipoli}\begin{cases} V_3 - nV_4 = 0 \\ nI_3 + I_4 = 0 \\ V_7 - rI_2 = 0 \end{cases}$$

Esempio

$$\text{LKT}\begin{cases} V_1 + V_2 = 0 \\ V_2 - V_3 = 0 \\ V_4 + V_5 = 0 \\ V_5 - V_6 + V_7 = 0 \end{cases} \qquad \text{bipoli}\begin{cases} V_1 - R_1 I_1 = -E_1 \\ V_2 - R_2 I_2 = 0 \\ I_5 = J_5 \\ V_6 - R_6 I_6 = 0 \end{cases}$$

$$\text{LKC}\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ I_4 + I_5 - I_6 = 0 \\ I_6 - I_7 = 0 \end{cases} \qquad \text{doppi bipoli}\begin{cases} V_3 - nV_4 = 0 \\ nI_3 + I_4 = 0 \\ V_7 - rI_2 = 0 \end{cases}$$

Commenti sul sistema:

1) tutti i doppi bipoli, compresi i generatori pilotati, sono ai primi membri, tra le incognite → sono uscite (si chiamano “generatori” solo perché sono attivi)
2) solo i generatori indipendenti sono termini noti = ingressi
3) i loro coefficienti *n*, *–n*, *-r* compaiono insieme ai soli *–R*, *1*, *–1*

Esempio

Matrici tipologiche (che raccolgono tutte le equazioni tipologiche):

$$\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{V} + \boldsymbol{N}\,\boldsymbol{I} = \boldsymbol{X}$$

ossia:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_6 & 0 \\ 0 & -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ J_5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le due matrici tipologiche $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{N}$ non sono più diagonali –>
può mancare la reciprocità della rete

Conseguenze

Le reti lineari adinamiche con doppi bipoli:

- hanno *soluzione unica* (singolarità escluse)

e valgono:

- il teorema di *sostituzione* (singolarità escluse)
- i teoremi di *non amplificazione* solo se non sono presenti doppi bipoli in grado di amplificare
- il teorema di *reciprocità* solo se non sono presenti doppi bipoli non reciproci
- i teoremi di Thévenin e di Norton con le solite precisazioni*
- I metodi di analisi: correnti d'anello, potenziali nodali e sovrapposizione degli effetti*

* *i DBA vanno trattati come elementi inerti (al pari dei resistori) e non come ingressi*

Teoremi di Thévenin e Norton

I parametri dei generatori sono valutabili con le relazioni usuali:

$$\begin{cases} \text{Thévenin:} \quad E_{eq} = V_o \qquad R_{eq} = \dfrac{V_o}{I_{cc}}, \\[2ex] \text{Norton:} \quad J_{eq} = I_{cc} \qquad G_{eq} = \dfrac{I_{cc}}{V_o} \end{cases}$$

e danno valori unici perché le reti hanno soluzioni uniche, incluse V_o e I_{cc}

Invece il calcolo della resistenza (o conduttanza) interna **non** può essere eseguito con le sole riduzioni di resistori (es. serie/parallelo) della rete inerte (a **generatori indipendenti spenti**) a causa della presenza dei DBA.

La resistenza (o conduttanza) interna si può però calcolare applicando alla rete inerte (a **generatori indipendenti spenti**) una corrente impressa I^* e calcolando la conseguente tensione V^*, da cui:

$$R_{eq} = R_i = \frac{V^*}{I^*}, \quad G_{eq} = G_i = \frac{I^*}{V^*}$$

Esempio

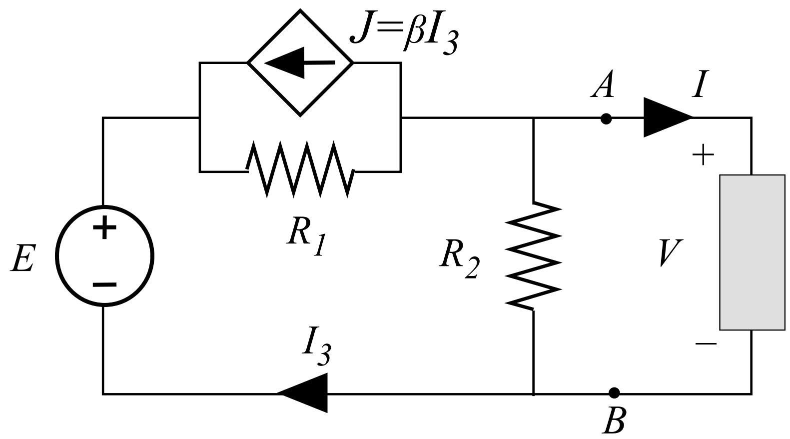
Cerchiamo i generatori equivalenti di questa rete

$E = 100\ \text{V}$

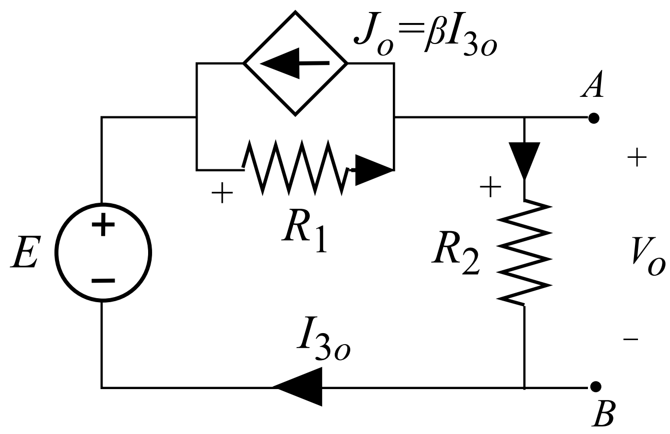
$R_1 = 8\ \Omega$

$R_2 = 10\ \Omega$

$\beta = 4$



Calcolo di V_o



$$I_{R2o} = I_{3o}$$

$$I_{R1o} = I_{R2o} + J_o = I_{3o} + \beta I_{3o} = I_{3o}(1+\beta)$$

$$E = R_1 I_{R1o} + R_2 I_{R2o} =$$
$$= R_1 I_{3o}(1+\beta) + R_2 I_{3o} = \left[R_1(1+\beta) + R_2\right] I_{3o}$$

$$I_{3o} = \frac{E}{R_1(1+\beta) + R_2}$$

$$V_o = R_2 I_{R2o} = R_2 I_{3o} = \frac{R_2 E}{R_1(1+\beta) + R_2} = E_{eq} = 20\ \text{V}$$

Esempio

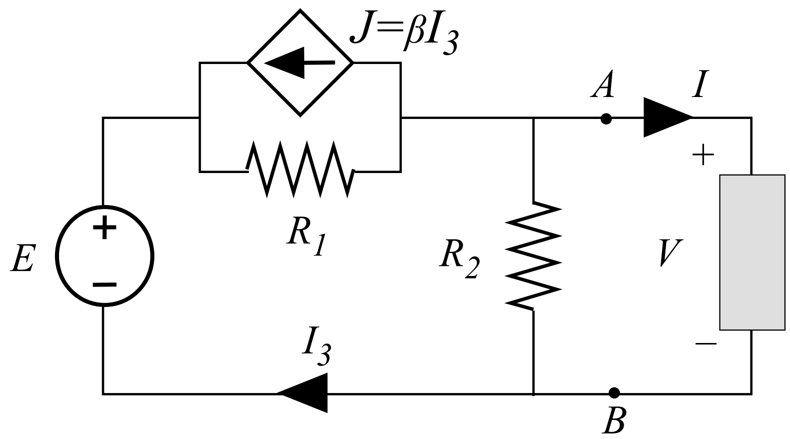
Cerchiamo i generatori equivalenti di questa rete

$E = 100\ \text{V}$

$R_1 = 8\ \Omega$

$R_2 = 10\ \Omega$

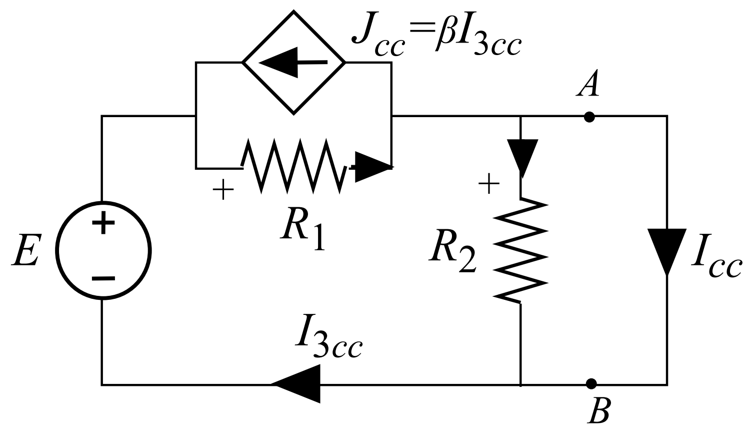
$\beta = 4$



Calcolo di I_{cc}

R_2 è cortocircuita = è come se fosse sostituita dal cortocircuito, ovvero le relazioni in cortocircuito si ottengono ponendo $R_2 = 0$ nelle elazioni a vuoto

$$I_{cc} = I_{3cc} = \frac{E}{R_1(1+\beta)} = J_{eq} = 2{,}5\ \text{A}$$



Esempio

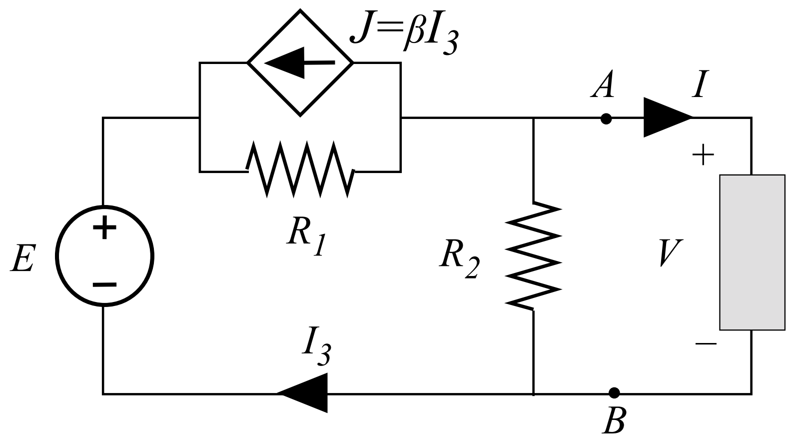
Cerchiamo i generatori equivalenti di questa rete

$E = 100\ \text{V}$

$R_1 = 8\ \Omega$

$R_2 = 10\ \Omega$

$\beta = 4$



Calcolo di R_i

$$R_i = \frac{V_o}{I_{cc}} = \frac{R_2 R_1 (1+\beta)}{R_1(1+\beta)+R_2} = R_{eq} = \frac{1}{G_{eq}} = 8\ \Omega$$

Esempio

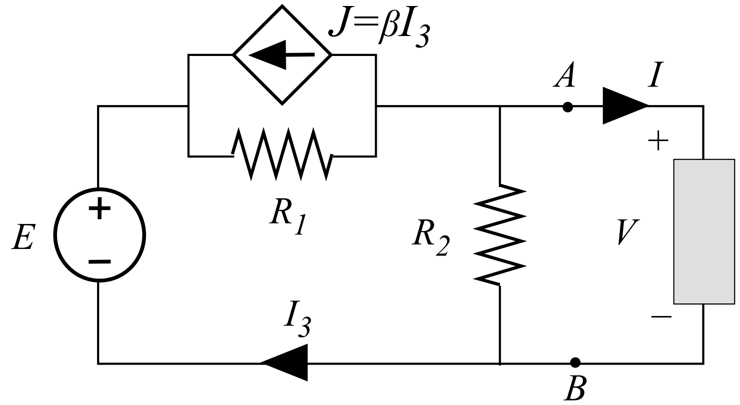
Cerchiamo i generatori equivalenti di questa rete

$E = 100\ \text{V}$

$R_1 = 8\ \Omega$

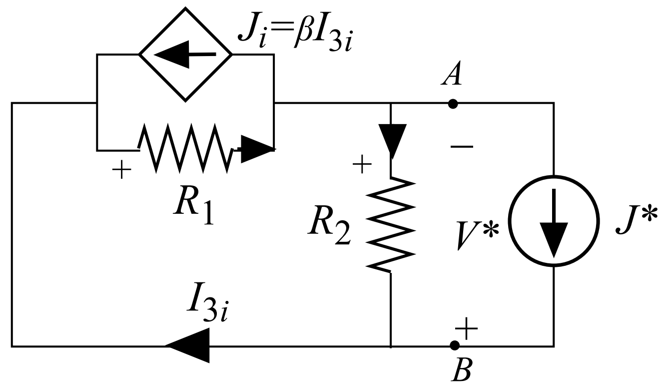
$R_2 = 10\ \Omega$

$\beta = 4$



Calcolo di R_i

secondo metodo: spengo il generatore indipendente *E* (solo lui!) e applico una corrente impressa *J** alla porta:



$$I_{R1i} = I_{3i} + J_i = I_{3i} + \beta I_{3i} = I_{3i}(1+\beta) \qquad I_{3i} = I_{R2i} + J^*$$

$$0 = R_1 I_{R1i} + R_2 I_{R2i} =$$

$$= R_1 I_{3i}(1+\beta) + R_2 I_{R2i} = R_1(1+\beta)\left(I_{R2i} + J^*\right) + R_2 I_{R2i}$$

$$I_{R2i} = \frac{-R_1(1+\beta)}{R_1(1+\beta)+R_2} J^*$$

$$V_{R2i} = R_2 I_{R2i} = \frac{-R_2 R_1(1+\beta)}{R_1(1+\beta)+R_2} J^* = -V^* \qquad R_i = \frac{V^*}{J^*} = \frac{-V_{R2i}}{J^*} = \frac{R_2 R_1(1+\beta)}{R_1(1+\beta)+R_2} = R_{eq} = 8\ \Omega$$

Metodi di analisi

Correnti d'anello e potenziali nodali

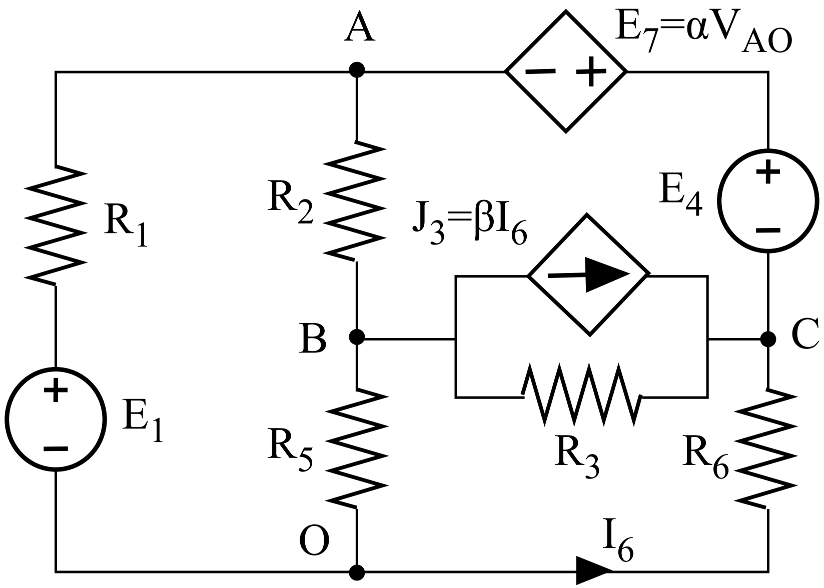
Nello scrivere il sistema, i **generatori pilotati** vanno sommati ai **generatori indipendenti** con le solite regole

Però poi la loro **grandezza di comando** (I o V), che è incognita, va espressa in funzione delle **incognite del sistema** (correnti d'anello K o potenziali U), in base alle equazioni di rete, e quindi vanno spostati ai primi membri, insieme alle altre incognite $\rightarrow$

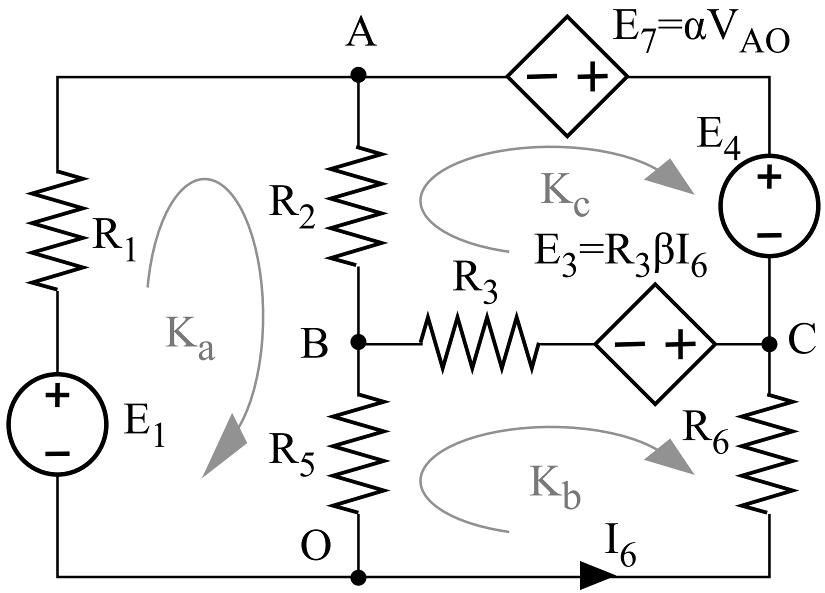
Così i termini noti restano soltanto i **generatori indipendenti**

Esempio con le correnti d'anello

E_1= 620 V	E_4=1180 V	R_1=10 Ω
R_2=40 Ω	R_3=20 Ω	R_5=50 Ω
R_6=30 Ω	$\alpha = -3$	$\beta = 1$



→

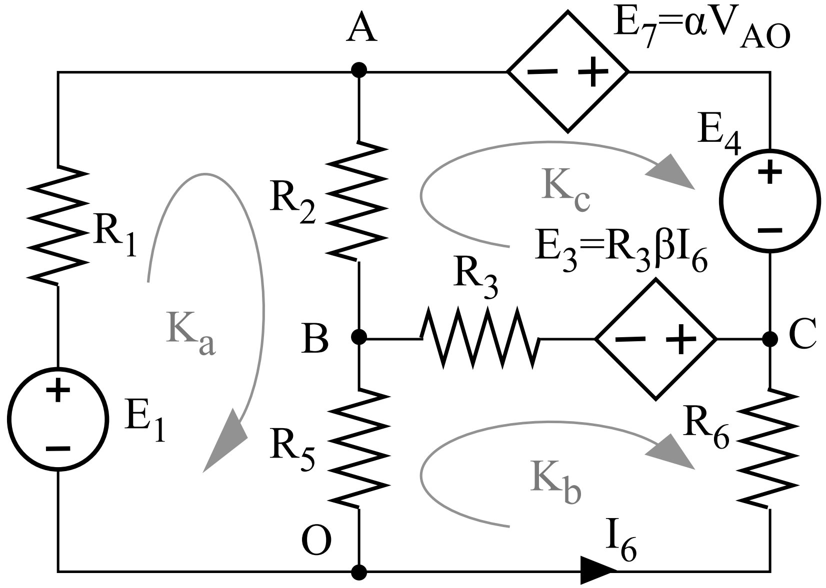


Adeguamento della rete con le solite regole:
Il GAC pilotato diventa un GAT pilotato

Esempio con le correnti d'anello

Equazioni correnti d'anello

$$\begin{cases} (R_1+R_2+R_5)K_a - R_5 K_b - R_2 K_c = E_1 \\ -R_5 K_a + (R_3+R_5+R_6)K_b - R_3 K_c = E_3 \\ -R_2 K_a - R_3 K_b + (R_2+R_3)K_c = E_7 - E_3 - E_4 \end{cases}$$



Equazioni generatori pilotati

$$\begin{cases} E_3 = R_3 \beta I_6 = -R_3 \beta K_b \\ E_7 = \alpha V_{AO} = \alpha\left[R_2(K_a - K_c) + R_5(K_a - K_b)\right] \end{cases}$$

Sistema finale

$$\begin{cases} (R_1+R_2+R_5)K_a - R_5 K_b - R_2 K_c = E_1 \\ -R_5 K_a + [(1+\beta)R_3 + R_5 + R_6)]K_b - R_3 K_c = 0 \\ -[(1+\alpha)R_2 + \alpha R_5]K_a + [\alpha R_5 - (1+\beta)R_3]K_b + [(1+\alpha)R_2 + R_3]K_c = -E_4 \end{cases}$$

K_a=6 A
K_b=2 A
K_c=–3 A

n.b.: equazione alternativa più semplice al posto della terza

$$E_7 = \alpha V_{AO} = \alpha(E_1 - R_1 K_a) \quad \rightarrow \quad (\alpha R_1 - R_2)K_a - (R_3\beta + R_3)K_b + (R_2+R_3)K_c = \alpha E_1 - E_4$$

Metodi di sovrapposizione degli effetti

Vanno fatti agire uno alla volta i soli **generatori indipendenti** = **ingressi**

Come nel caso dei generatori di Thévenin e Norton, i **generatori pilotati** agiscono di volta sotto l'azione di ciascun **generatore indipendente**

Perché le loro grandezze impresse sono uscite, come le tensioni e correnti dei resistori

Esempio

$E_3 = 180\ \text{V}$

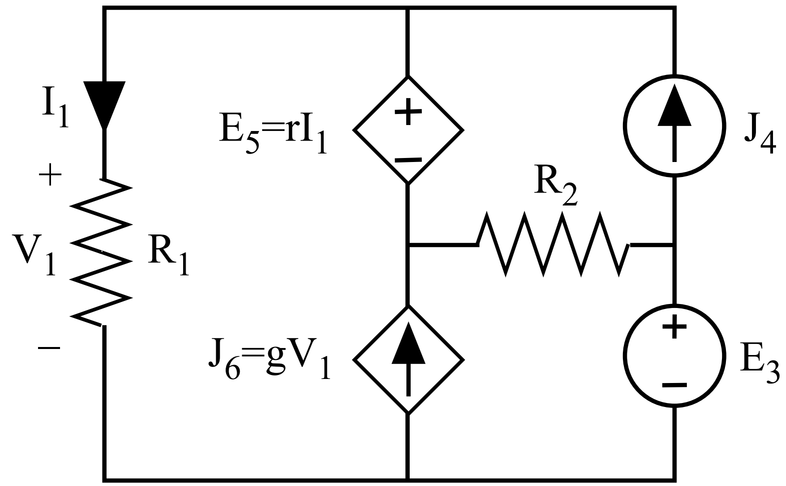
$J_4 = \ \ 6\ \text{A}$

$R_1 = 20\ \Omega$

$R_2 = \ 5\ \Omega$

$r\ = -5\ \Omega$

$g\ = -0{,}2\ \text{S}$



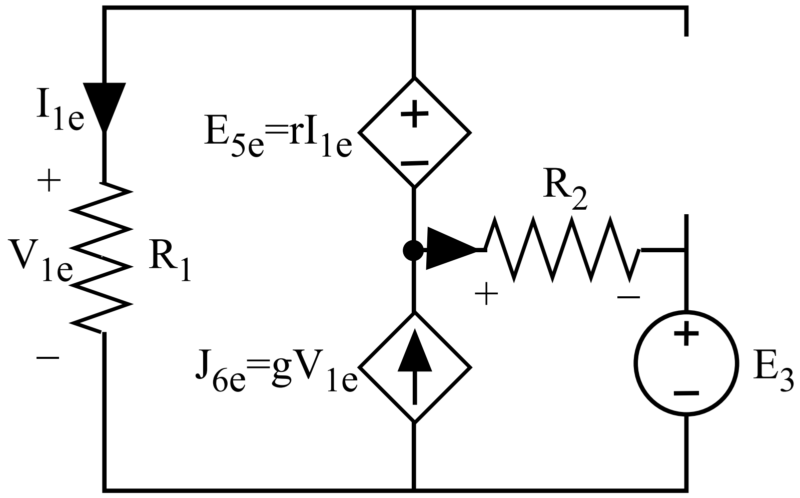
Con la **sovrapposizione degli effetti**, agiscono uno alla volta solo E_3 e J_4 mentre E_5 e J_6 sono lasciati sempre in azione

Esempio

Azione di E_3

$$E_3 = V_{1e} - E_{5e} - V_{2e} = R_1 I_{1e} - r I_{1e} - R_2 I_{2e}$$

$$I_{2e} = J_{6e} - I_{1e} = g V_{1e} - I_{1e} =$$
$$= g R_1 I_{1e} - I_{1e} = (g R_1 - 1) I_{1e}$$



$\rightarrow$ $$E_3 = R_1 I_{1e} - r I_{1e} - R_2 (g R_1 - 1) I_{1e}$$

$$I_{1e} = \frac{1}{R_1 + R_2 - r - g R_1 R_2} E_3 = H_{G_{13}} E_3 = 0{,}02 E_3$$

$$V_{1e} = \frac{R_1}{R_1 + R_2 - r - g R_1 R_2} E_3 = H_{V_{13}} E_3 = 0{,}4 E_3$$

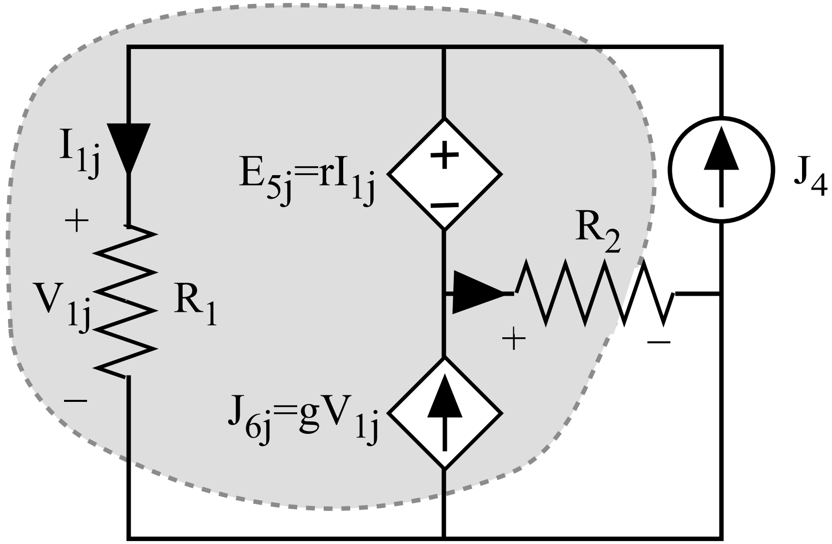
Esempio

Azione di J_4

$$0 = -V_{1j} + E_{5j} + V_{2j} = -R_1 I_{1j} + r\, I_{1j} + R_2 I_{2j}$$

$$I_{2j} = J_4 + J_{6j} - I_{1j} = J_4 + g V_{1j} - I_{1j} =$$
$$= J_4 + g R_1 I_{1j} - I_{1j} = J_4 + (\mathrm{g} R_1 - 1) I_{1j}$$

$$\rightarrow\ 0 = -R_1 I_{1j} + r\, I_{1j} + R_2 [J_4 + (\mathrm{g} R_1 - 1) I_{1j}]$$

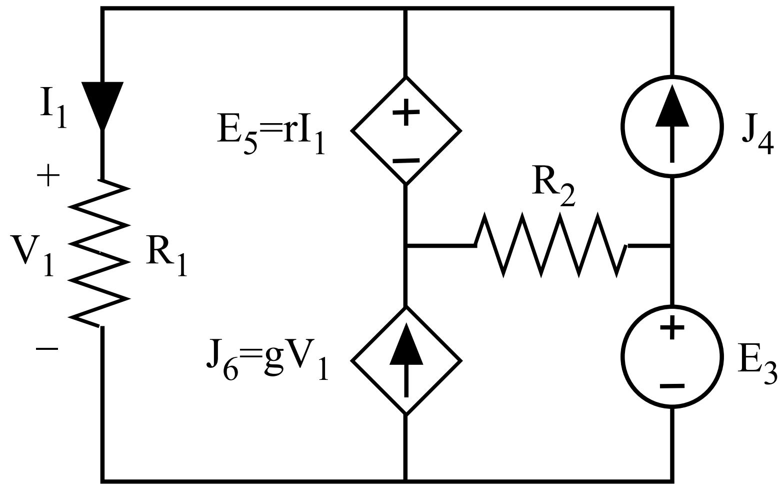


$$I_{1j} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 - r - g R_1 R_2} J_4 = H_{I14}\, J_4 = 0{,}1\, J_4$$

$$V_{1j} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 - r - g R_1 R_2} J_4 = H_{R14} J_4 = 2\, J_4$$

Esempio

$E_3 = 180\ \text{V}$
$J_4 = \ \ 6\ \text{A}$
$R_1 = 20\ \Omega$
$R_2 = \ 5\ \Omega$
$r \ = -5\ \Omega$
$g \ = -0{,}2\ \text{S}$



Sovrapponendo gli effetti:

$$I_1 = H_{G_{13}} E_3 + H_{I_{14}} J_4 = \frac{E_3 + R_2 J_4}{R_1 + R_2 - r - g R_1 R_2} = 4{,}2\ \text{A}$$

$$V_1 = H_{V_{13}} E_3 + H_{R_{14}} J_4 = \frac{R_1 (E_3 + R_2 J_4)}{R_1 + R_2 - r - g R_1 R_2} = 84\ \text{V}$$