Università di Padova - Scuola di Ingegneria

Massimo Guarnieri

Elettrotecnica

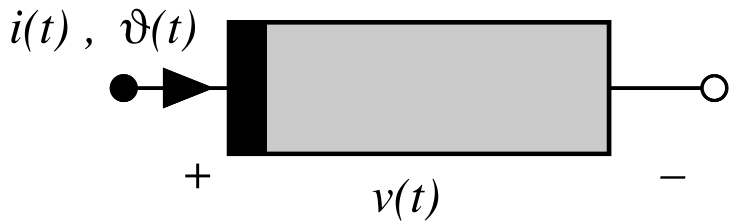
Capitolo 12
Bipoli dinamici

Grandezze elettriche ausiliarie

Per descrivere i bipoli dinamici sono utili due grandezze elettriche ausiliarie:

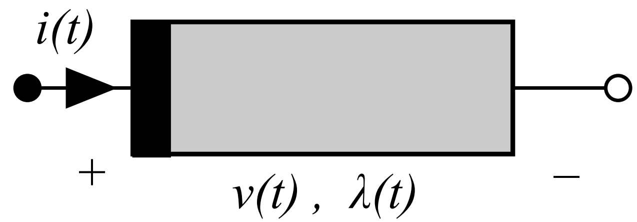
▪Integrale di corrente:

$$\vartheta(\mathrm{t}) = \int_{-\infty}^{t} i(\mathrm{t}')\,dt' \qquad [\mathrm{As}] \qquad \rightarrow \qquad i = \frac{d\vartheta}{dt}$$



▪Integrale di tensione:

$$\lambda(\mathrm{t}) = \int_{-\infty}^{t} v(\mathrm{t}')\,dt' \qquad [\mathrm{Vs}] \qquad \rightarrow \qquad v = \frac{d\lambda}{dt}$$



n.b.:

- $-\infty$ significa “da quando quella i(t) o quella v(t) è apparsa”
- dalle relazioni alle derivate si ottiene anche $d\vartheta = i\ dt$ e $d\lambda = v\ dt$

Formulazione pratica

Spezzando l'intervallo temporale in due parti, $(-\infty,\ t_o)$ e $(t_o,\ t)$, esse possono essere riscritte nelle seguenti forme, che considerano i valori $\vartheta(t_o)$ e $\lambda(t_o)$ dei precedenti integrali valutati nell'istante istante t_o (in genere t_o=0)

- Integrale di corrente: $$\vartheta(t) = \vartheta(t_o) + \int_{t_o}^{t} i(t')dt'$$

- Integrale di tensione: $$\lambda(t) = \lambda(t_o) + \int_{t_o}^{t} v(t')dt'$$

Sono molto più pratiche, perché evitano di dover integrare ogni volta da $-\infty$, note che siano $\vartheta(t_o)$ e $\lambda(t_o)$

Discontinuità?

Vedremo che in certi casi è necessario assumere che $\lambda(t)$ e $\vartheta(t)$ possano essere discontinue in t_o: allora le cose si complicano un po', ma per ora possiamo ignorare tali evenienze

→ per ora assumiamo che non esistano discontinuità di $\lambda(t)$ e $\vartheta(t)$

Bipoli dinamici ideali

Sono governati da una semplice equazione funzionale

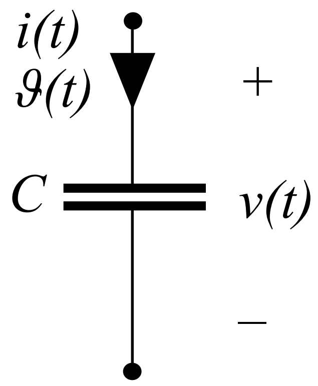
$$F[v(\mathrm{t}),i(\mathrm{t})]=0$$

contente una derivata temporale prima o un integrale

Non vale la pena di considerare le caratteristiche esterne v-i, perché esse variano con la dinamica imposta a tensione e corrente

Condensatore ideale

Definizione: è il bipolo che, convenzionato da utilizzatore, verifica le equazioni:



$$\vartheta = C\,v \quad , \quad v = \frac{1}{C}\vartheta = S\,\vartheta$$

sono equazioni lineari algebriche ove

C : capacità [F]

S=1/C : elastanza [F^{-1}] (usata pochissimo)

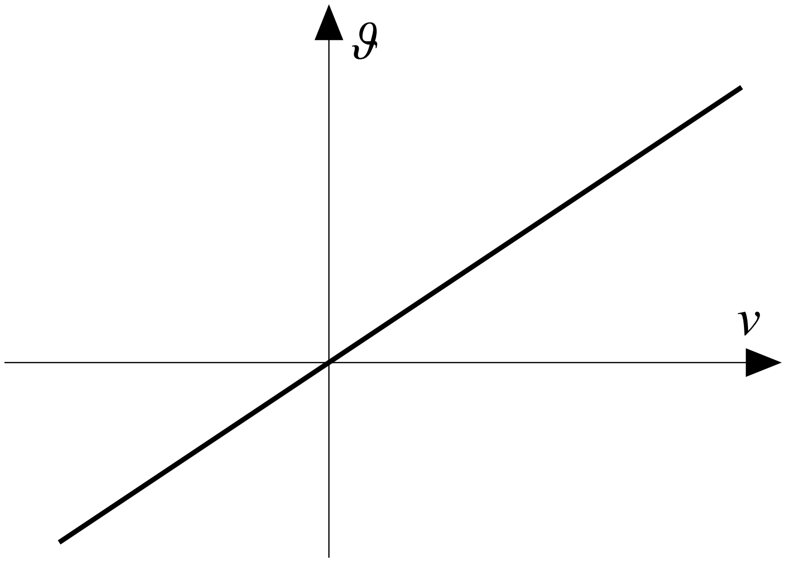
nel **condensatore ideale** C (e S) è costante.

Caratteristica esterna v-ϑ

Esiste una sola caratteristica esterna v-ϑ

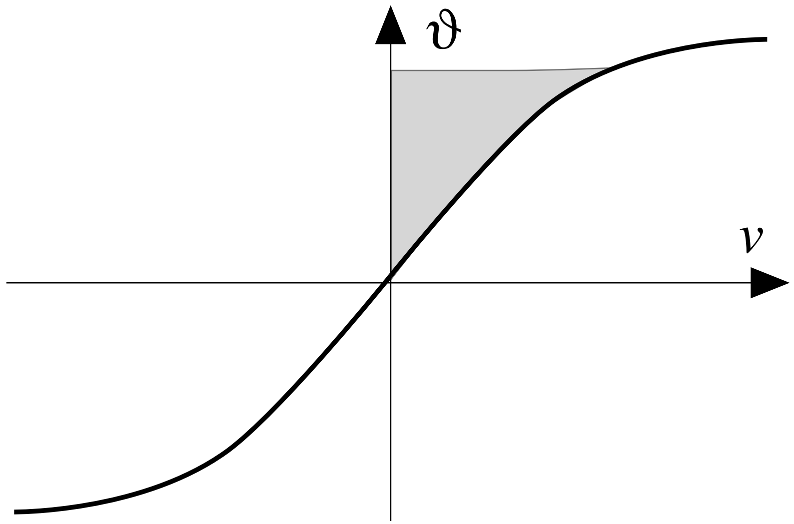
Condensatore ideale $\vartheta = C\, v$

C = costante



Condensatore non ideale $\vartheta = \vartheta(v)$

C = variabile con ϑ e v



Comportamento energetico -1

Lavoro elettrico infinitesimo entrante nel condensatore ideale nell'intervallo dt:

$$d\mathcal{L} = p\,dt = v\,i\,dt = v\,d\vartheta = v\,d\left(C\,v\right) = v\,C\,dv$$

Lavoro elettrico finito entrante in (t_o, t^*), ossia tra l'istante t_o in cui $\vartheta_O = \vartheta(t_O)$ e $v_O = v(t_O)$ e l'istante t^* in cui $\vartheta^* = \vartheta(t^*)$ e $v^* = v(t^*)$:

$$\Delta\mathcal{L} = \int_{t_o}^{t^*} p\,dt = \int_{v_o}^{v^*} C\,v\,dv = \left[\frac{C}{2}v^2\right]_{v_o}^{v^*} = \frac{C}{2}v^{*2} - \frac{C}{2}v_o^{\,2}$$

Comportamento energetico -2

$\Delta\mathcal{L}$ è una funzione di stato di v (ossia dei suoi valori istantanei v_o e v^*): nel processo opposto, quando v ritorna da v^* a v_o, entra il lavoro $\Delta\mathcal{L}'$ opposto a $\Delta\mathcal{L}$, ossia il lavoro prima assorbito è reso (erogato).

→ il lavoro scambiato $\Delta\mathcal{L}$ è conservativo, ovvero

→ il lavoro elettrico assorbito $\Delta\mathcal{L}$ dal condensatore è immagazzinato in **energia capacitiva** w_C:

$$\Delta\mathcal{L} = \Delta w_C$$

che poi può essere resa

Eseguendo questa sola conversione energetica, il condensatore ideale è un **bipolo perfetto:** un **accumulatore perfetto**

Inoltre, potendo erogare il lavoro precedentemente accumulato (e non più di questo) il condensatore è un **bipolo passivo**

Comportamento energetico -3

Il lavoro assorbito è accumulato per poter essere reso successivamente

$$\Delta\mathcal{L} = \Delta w_{\mathrm{C}}$$

In Fisica la potenzialità di compiere lavoro è energia immagazzinata, è una forma di energia potenziale

lavoro assorbito = incremento di energia immagazzinata,

lavoro erogato = decremento di energia immagazzinata.

In questo caso l’energia immagazzinata si chiama capacitiva

Come per ogni energia potenziale ne va definito il livello zero.

Energia capacitiva del condensatore ideale

L'energia capacitiva si pone nulla quando il condensatore è a riposo:

se $v=0$ e $\vartheta=0 \rightarrow w_C=0$

Si ha quindi :

$$w_C = \left[\frac{C}{2} v^2 \right]_0^v = \frac{C}{2} v^2 = \frac{1}{2} v \vartheta = \frac{1}{2C} \vartheta^2$$

w_C è una **funzione di stato** di v e ϑ che sono le **variabili di stato**

w_C è una funzione pari (non dipende dal riferimento di v)

w_C è sempre positiva, $w_C > 0$, se $v \neq 0$ e $\vartheta \neq 0$

La corrente i non è una variabile energetica (non è una variabile di stato)

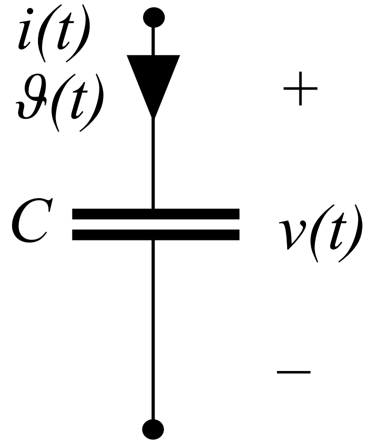
n.b.: l'accumulo di tutto il lavoro entrante in energia si verifica anche se *C* non è costante, basta che esistano le relazioni $\vartheta=\vartheta(v)$ e $v=v(\vartheta)$ monotone ed invertibili in tal caso il **condensatore è perfetto ma non ideale** e le espressioni di w_C risultano diverse e più complesse

Equazione differenziale *v-i*

Per studiare un condensatore inserito in rete le precedenti relazioni non bastano: dobbiamo considerare anche la corrente.

Per ottenere l'equazione controllata in tensione:

dall'equazione $\vartheta = C\,v$ del **condensatore ideale**
e $i = d\vartheta/dt$ si ottiene:



$$i = C\frac{dv}{dt}$$

è un'equazione funzionale del tipo:

$$F[v(\mathrm{t}),i(\mathrm{t})] = i - C\,dv/dt = 0$$

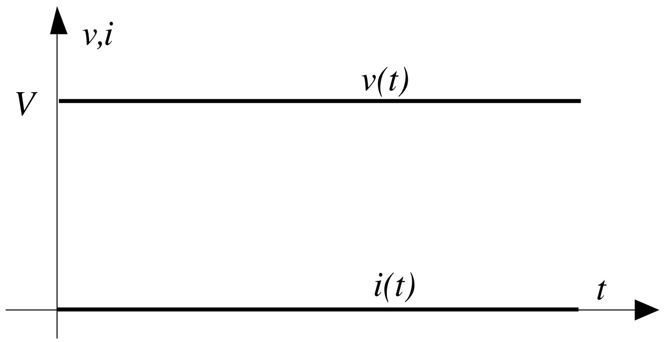
è un'equazione differenziale lineare

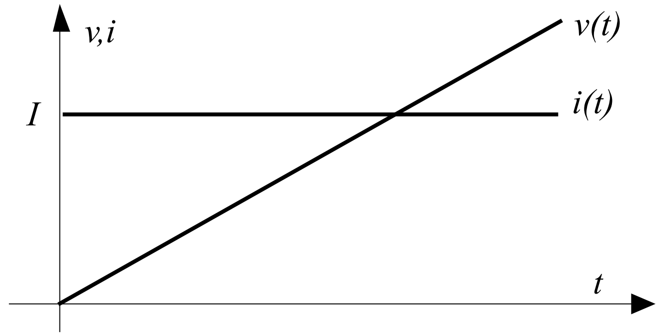
ad essa non corrisponde una sola caratteristica esterna *v-i*

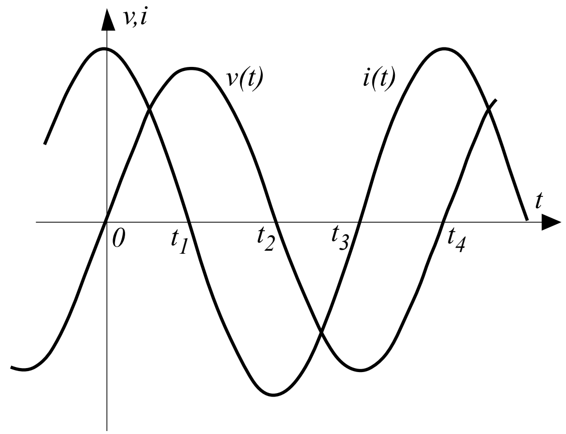
Caratteristiche esterne *v-i*

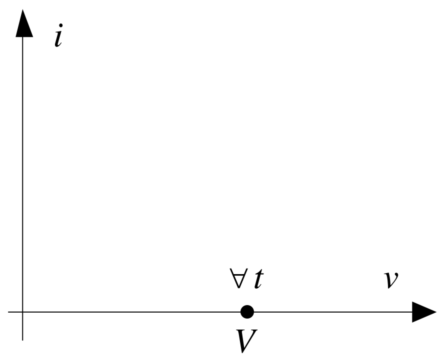
Cambiano con il regime di *v-i*: da $i = C\, dv/dt$

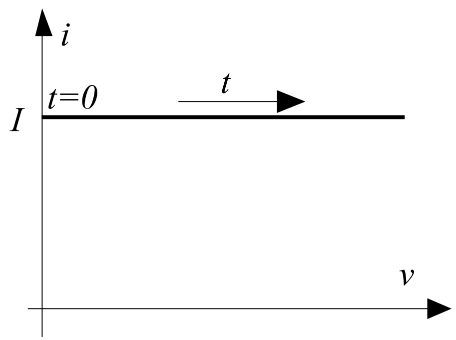
$$v = V \rightarrow i \equiv 0 \qquad v = K\,t \rightarrow i = C\,K = I \qquad v = V_M \, sen\,\omega t \rightarrow i = \omega C V_M \cos \omega t$$

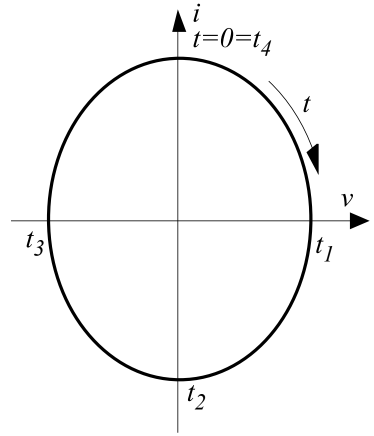












Equazione integrale *v-i*

Per ottenere l'equazione controllata in corrente (inversa di $i = C dv/dt$):

dall'equazione $v = \vartheta / C$ del **condensatore ideale** e dalla definizione di ϑ discende:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i(t')\, dt'$$

se è nota $v(t_o) = \vartheta(t_o)/C$, è preferibile la seguente:

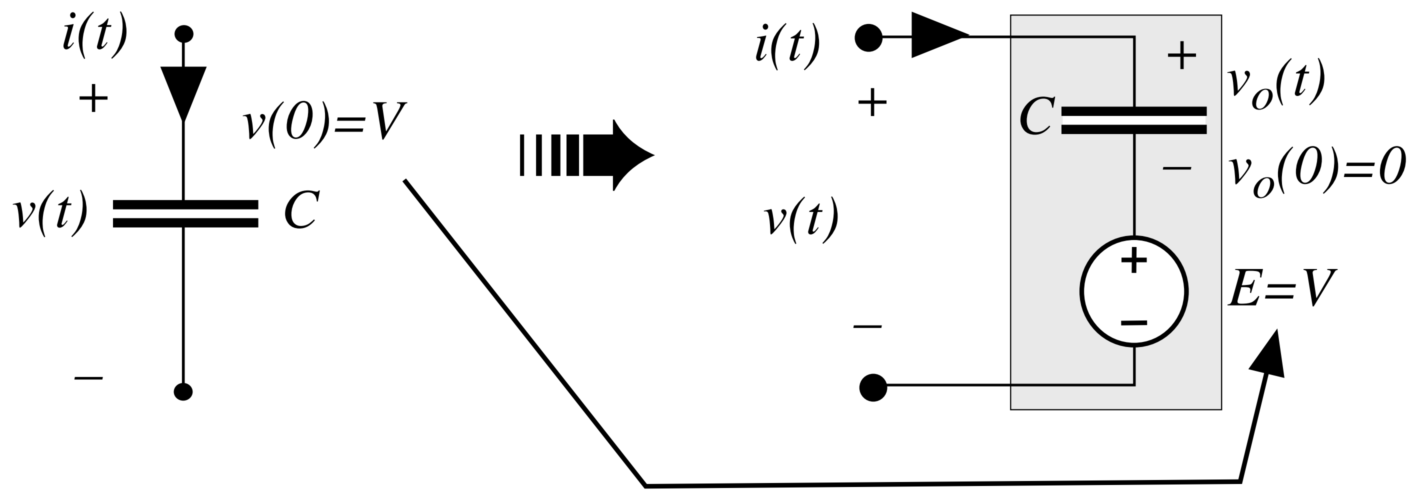
$$v(t) = \frac{1}{C} \left[\vartheta\left(t_o\right) + \int_{t_o}^{t} i(t')\, dt' \right] = v\left(t_o\right) + \frac{1}{C} \int_{t_o}^{t} i(t')\, dt'$$

- $v(t_o)$ e $\vartheta(t_o)$ sono i **valori iniziali** (n.b.: delle variabili di stato)
- se il condensatore è carico in t_o, ossia $v(t_o) \neq 0$, la relazione non è lineare.

Circuito equivalente linearizzato

Quando servono relazioni lineari, può essere usato uno schema equivalente del condensatore carico, ove il condensatore è scaricato (=linearizzato) e compare un generatore ideale di tensione costante per tener conto del valore iniziale $v(0)=V$

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t')\,dt' \qquad v_o(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t')\,dt'$$

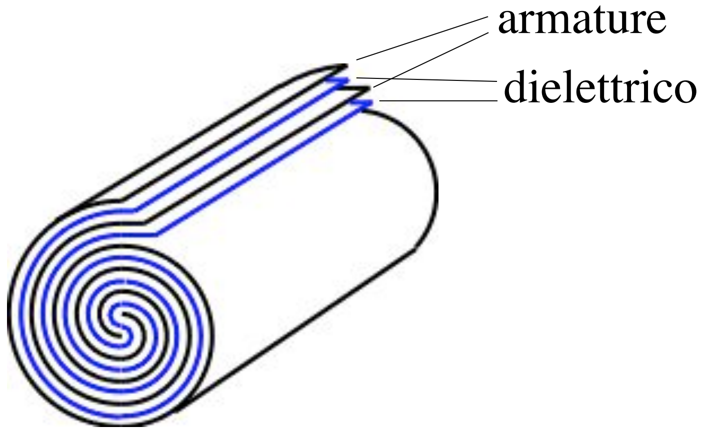


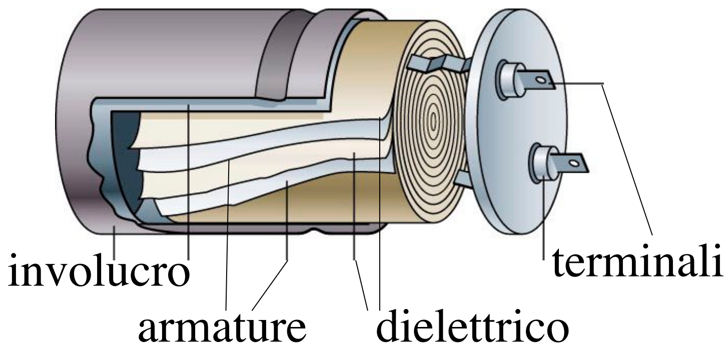
Condensatori reali

I condensatori reali più comuni sono di tipo dielettrico, ovvero costituiti da due armature metalliche separate da un mezzo isolante dielettrico (di solito molto sottile). Quando tra le due armature è applicata la tensione v, esse recano le cariche opposte $+q$ e $-q$ che corrispondono all'integrale di corrente, $\vartheta = +q = -(-q)$:

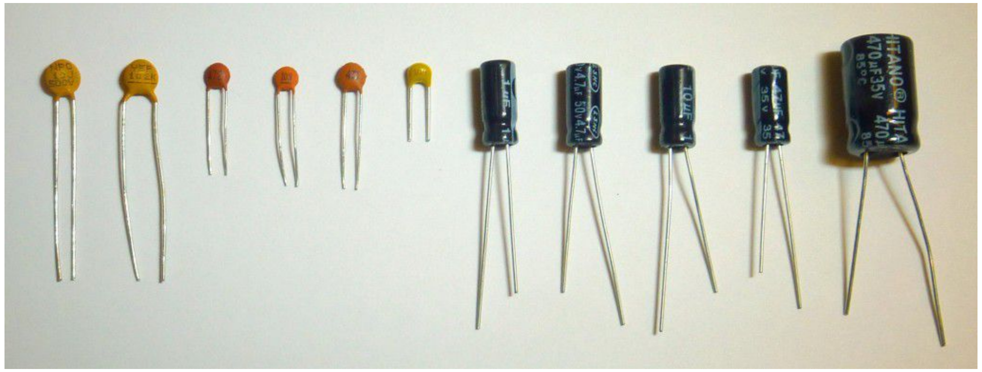
→ $$q = C\, v$$

C dipende dalla geometria e dalle proprietà del mezzo dielettrico





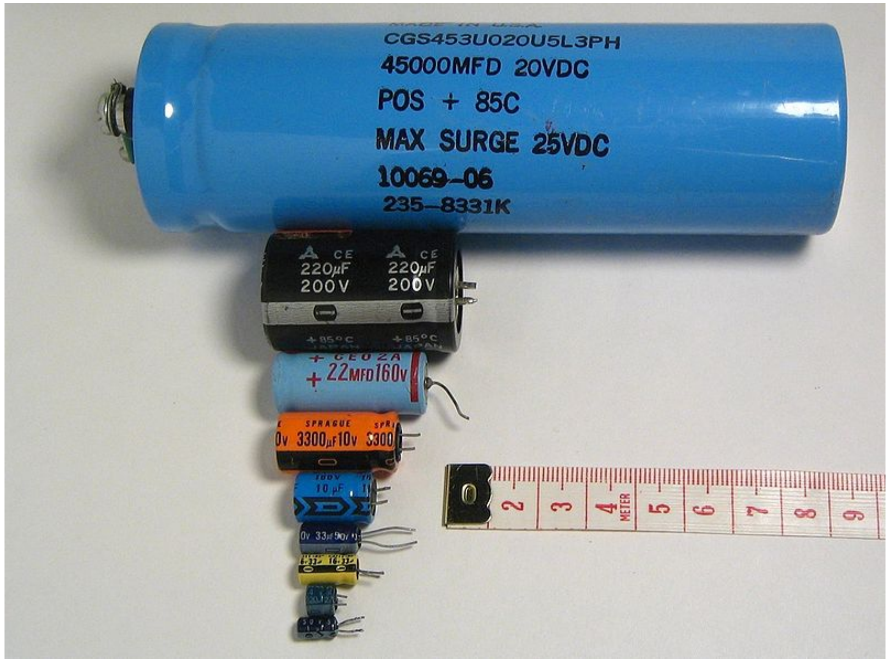
Condensatori reali



Condensatori per tensioni di alcuni volt, adatti ad applicazioni di segnale. Le capacità vanno dai picofarad ai microfard.

Condensatori per centinaia e migliaia di volt, per apparecchi di maggiore potenza. Le capacità vanno dai picofarad ai microfard.

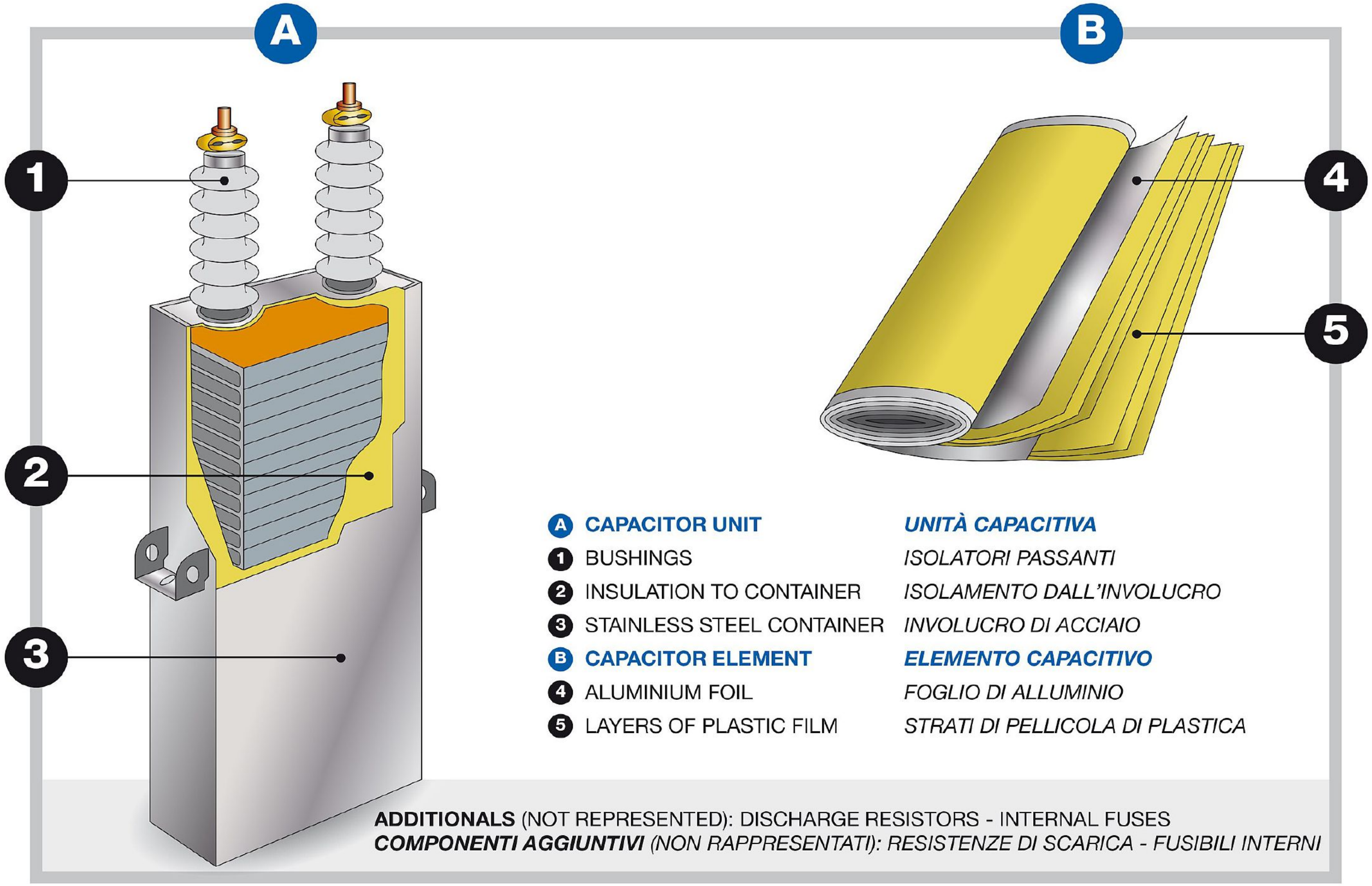
Condensatori reali



Condensatori elettrolitici con capacità di $10^{-6} \div 10^{0}$ F per tensioni di $10^{0} \div 10^{2}$ V.

Supercondensatori (o ultracondensatori) con capacità di $10^{2} \div 10^{3}$ F, per tensioni di $10^{0} \div 10^{1}$ V

Condensatori reali



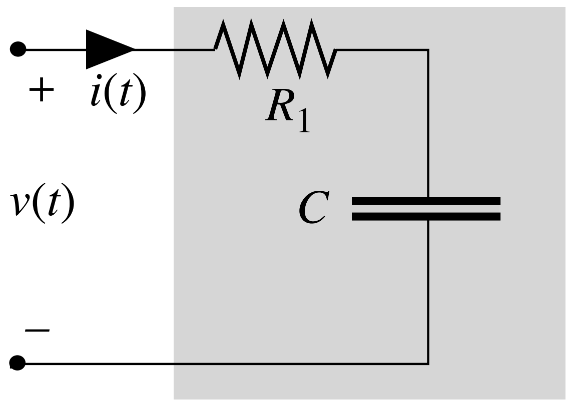
Condensatore per alte tensioni ($10^3 \div 10^4$ V) da $10^{-8} \div 10^{-6}$ F

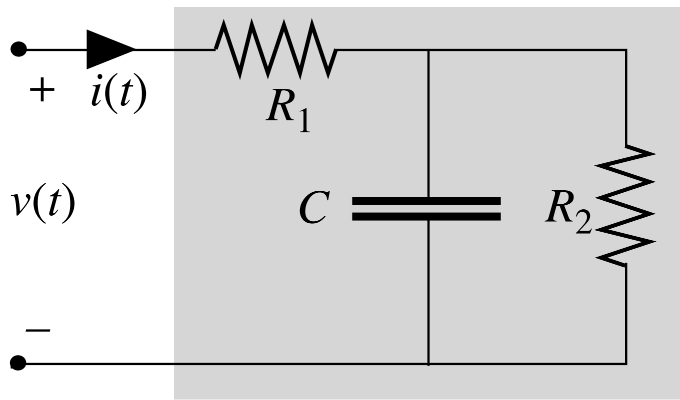
Perdite nei condensatori reali

I condensatori reali non sono perfetti (e nemmeno ideali) e sono sedi di dissipazioni, oltre che di accumulo di energia. Vi si verificano:

1) perdite ohmiche nelle armature e nei terminali (non hanno resistività nulla), quando è presente corrente
2) perdite ohmiche nel dielettrico (non ha resistività infinita), quando è presente tensione

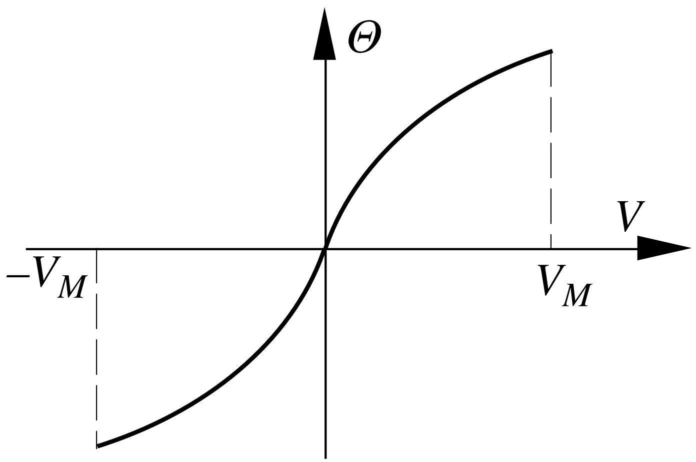
Se ne tiene conto con schemi equivalenti comprendenti resistori (R_1 in serie e R_2 in parallelo, rispettivamente)

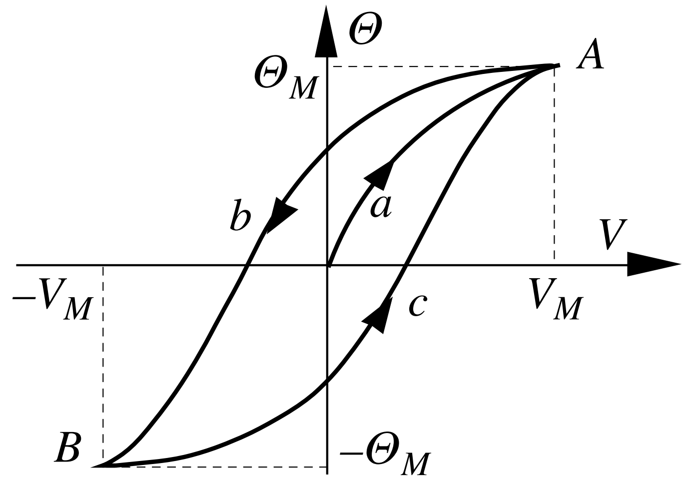
a) 

b) 

Perdite nei condensatori reali

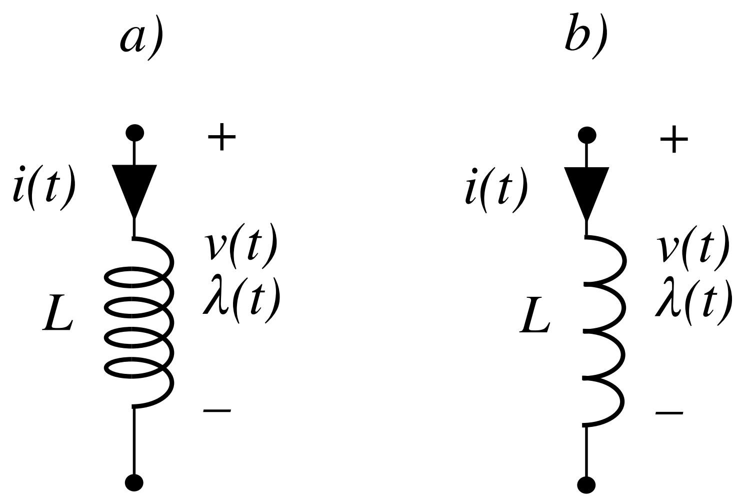
Nel funzionamento in alta frequenza possono comparire perdite per isteresi nel dielettrico, dovute alla perdita di linearità e comparsa di isteresi nella caratteristica ϑ–v (mentre a bassa frequenza il comportamento si presenta ideale). Le perdite per unità di volume in ogni ciclo sono proporzionali all'area del ciclo di isteresi e se ne può tenere conto con un resistore in parallelo a *C*, come la precedente R_2.





Induttore ideale

Definizione: è il bipolo che, convenzionato da utilizzatore, verifica le equazioni:



$$\lambda = L\, i \quad , \quad i = \frac{1}{L}\lambda = \Gamma\, \lambda$$

sono equazioni lineari algebriche ove

L: induttanza [H]

$\Gamma=1/L$: inertanza [H^{-1}] (poco usata)

nell'**induttore ideale** L (e Γ) è costante.

Caratteristica esterna *i*-λ

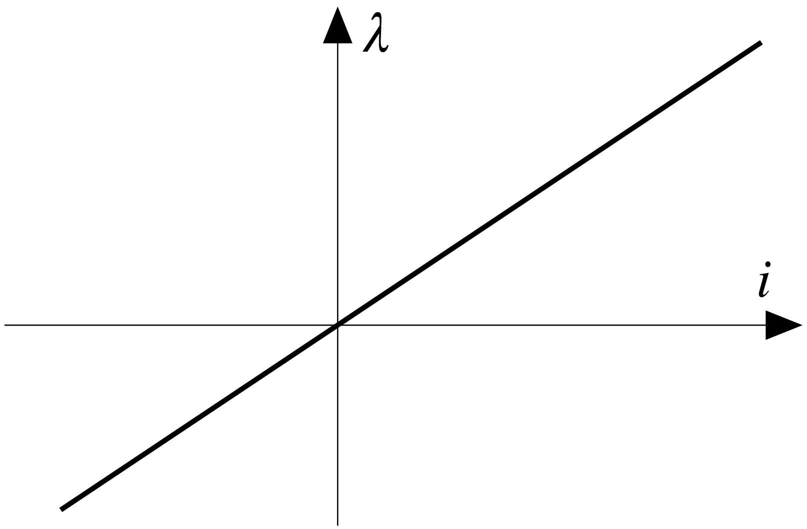
Esiste una sola caratteristica esterna i-λ

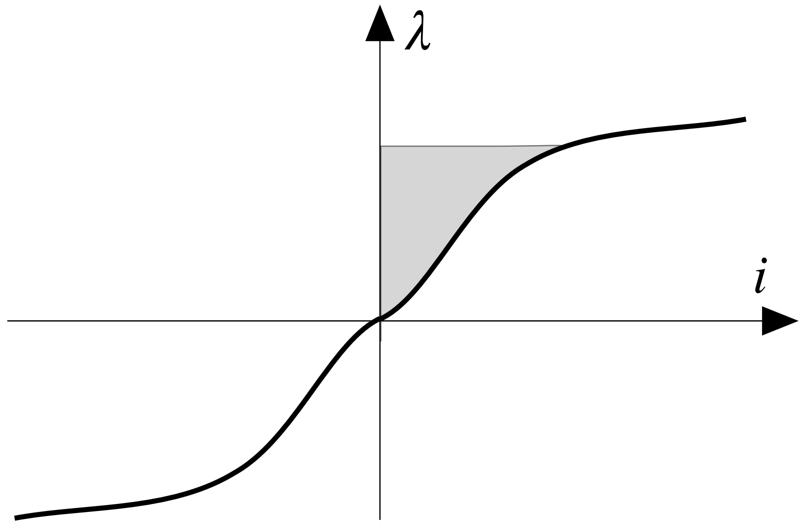
Induttore ideale $\lambda = L\, i$

L = costante

Induttore non ideale $\lambda = \lambda(i)$

L = variabile con λ e i





Comportamento energetico -1

Lavoro elettrico infinitesimo entrante nell'induttore ideale nell'intervallo dt:

$$d\mathcal{L} = p\,dt = iv\,dt = i\,d\lambda = i\,d\left(Li\right) = i\,L\,di$$

Lavoro elettrico finito entrante in (t_o,t^*), ossia tra l'istante t_o in cui $\lambda_o = \lambda(t_o)$ e $i_o = i(t_o)$ e l'istante t^* in cui $\lambda^* = \lambda(t^*)$ e $i^* = i(t^*)$:

$$\Delta\mathcal{L} = \int_{t_o}^{t^*} p\,dt = \int_{i_o}^{i^*} L\,i\,di = \left[\frac{L}{2}i^2\right]_{i_o}^{i^*} = \frac{L}{2}i^{*2} - \frac{L}{2}i_o^{\,2}$$

Comportamento energetico -2

$\Delta\mathcal{L}$ è una funzione di stato di i (ossia dei suoi valori istantanei i_o e i^*): nel processo opposto, quando i ritorna da i^* a i_o, entra il lavoro $\Delta\mathcal{L}'$ opposto a $\Delta\mathcal{L}$, ossia il lavoro prima assorbito è reso (erogato).

→ il lavoro scambiato $\Delta\mathcal{L}$ è conservativo, ovvero

→ il lavoro elettrico assorbito $\Delta\mathcal{L}$ dall'induttore è immagazzinato in **energia induttiva** w_L:

$$\Delta\mathcal{L} = \Delta w_L$$

che poi può essere resa.

Eseguendo questa sola conversione energetica, l'induttore ideale è un **bipolo perfetto:** un **accumulatore perfetto**

Inoltre, potendo erogare il lavoro precedentemente accumulato (e non più di questo) l'induttore è un **bipolo passivo**

Comportamento energetico -3

Il lavoro assorbito è accumulato per poter essere reso successivamente

$$\Delta\mathcal{L} = \Delta w_L$$

In Fisica la potenzialità di compiere lavoro è energia immagazzinata, è una forma di energia potenziale

lavoro assorbito = incremento di energia immagazzinata,

lavoro erogato = decremento di energia immagazzinata.

In questo caso l'energia immagazzinata si chiama induttiva

Come per ogni energia potenziale ne va definito il livello zero.

Energia induttiva dell'induttore ideale

L'energia induttiva si pone nulla quando l'induttore è a riposo:
se $i=0$ e $\lambda=0$ → $w_L=0$

Si ha quindi :

$$w_L = \left[\frac{L}{2} i^2\right]_0^i = \frac{L}{2} i^2 = \frac{1}{2} i\lambda = \frac{1}{2L}\lambda^2$$

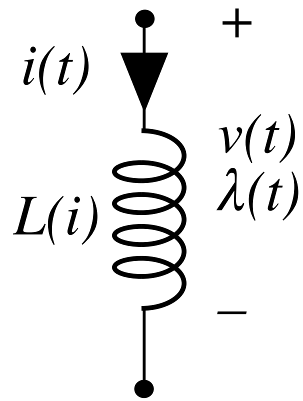
w_L è una **funzione di stato** di i e λ che sono le **variabili di stato**
w_L è una funzione pari (non dipende dal riferimento di i)
w_L è sempre positiva, $w_l > 0$, se $i \neq 0$ e $\lambda \neq 0$
La tensione v non è una variabile energetica (non è una variabile di stato)

n.b.: l'accumulo di tutto il lavoro entrante in energia si verifica anche se *L* non è costante, basta che esistano le relazioni $\lambda=\lambda(i)$ e $i=i(\lambda)$ monotone ed invertibili in tal caso l'**induttore è perfetto ma non ideale** e le espressioni di w_L risultano diverse e più complesse

Equazione differenziale *i-v*

Per studiare un induttore inserito in rete le precedenti relazioni non bastano: dobbiamo considerare anche la tensione.

Per ottenere l'equazione controllata in corrente:



dall'equazione $\lambda = L\,i$ dell'**induttore ideale**
e $v = d\lambda/dt$ si ottiene:

$$v = L\frac{di}{dt}$$

è un'equazione funzionale del tipo:

$$F[v(\mathrm{t}),i(\mathrm{t})] = v - L\,di/dt = 0$$

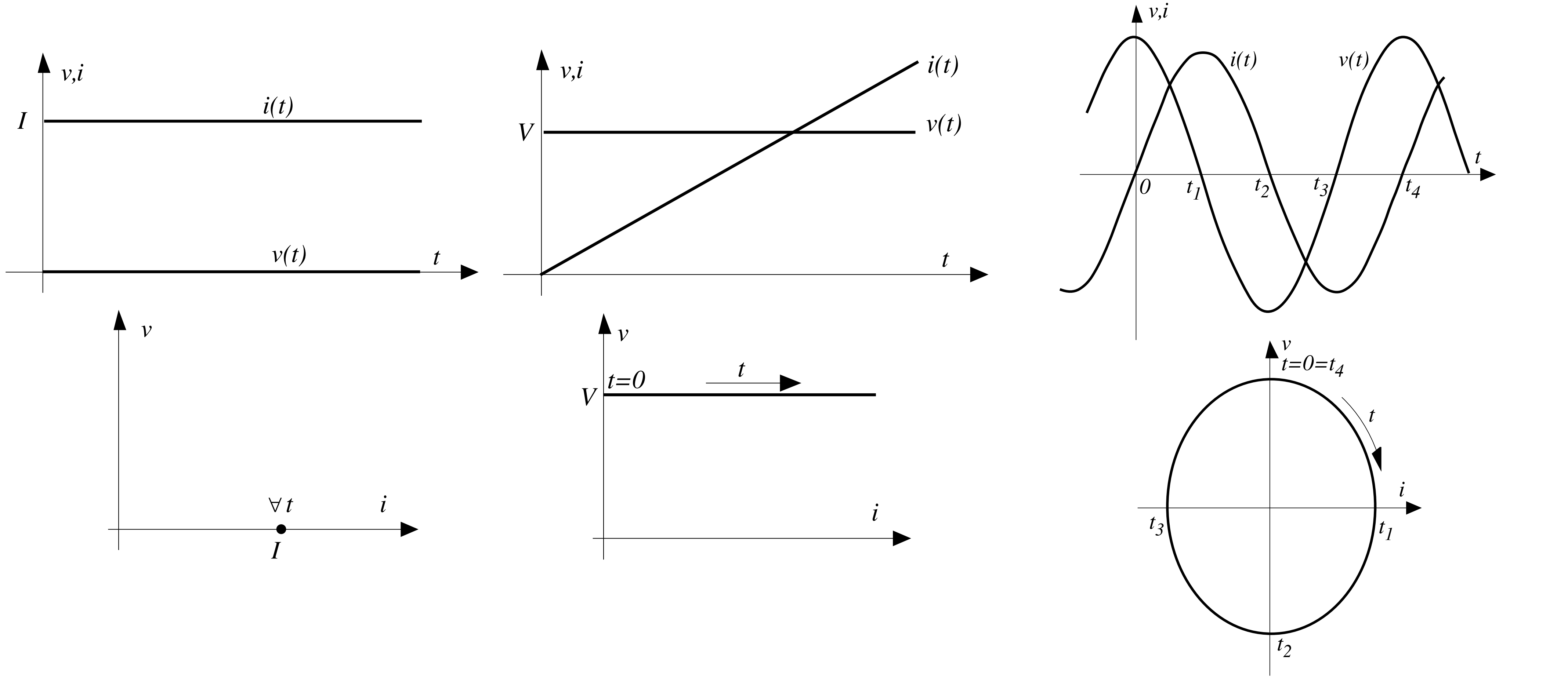
è un'equazione differenziale lineare

ad essa non corrisponde una sola caratteristica esterna *i-v*

Caratteristiche esterne *i-v*

Cambiano con il regime di *i-v*: da $v = L\, di/dt$

$i = I \rightarrow v \equiv 0$ $\qquad i = K\,t \rightarrow v = L\,K = V$ $\qquad i = I_M \, sen\,\omega t \rightarrow v = \omega L\, I_M \, cos\,\omega t$



Equazione integrale *i-v*

Per ottenere l'equazione controllata in tensione (inversa di $v = L di/dt$):
dall'equazione $i = \lambda / L$ dell'**induttore ideale** e dalla definizione di λ discende:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(t')\,dt'$$

se è nota $i(t_o)=\lambda(t_o)/L$, è preferibile la seguente:

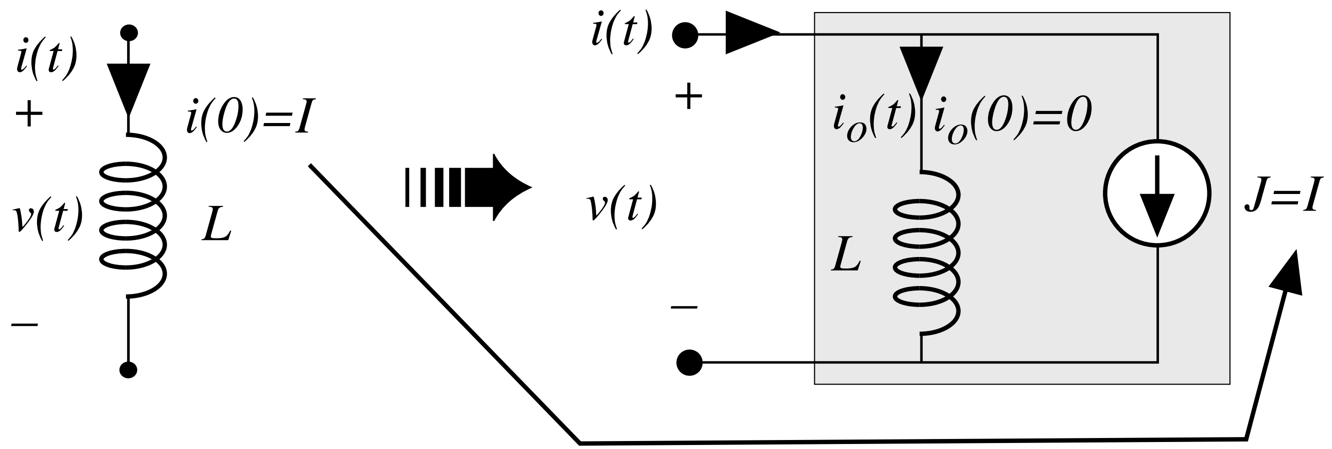
$$i(t) = \frac{1}{L}\left[\lambda\left(t_o\right) + \int_{t_o}^{t} v(t')\,dt'\right] = i\left(t_o\right) + \frac{1}{L}\int_{t_o}^{t} v(t')\,dt'$$

- $i(t_o)$ e $\lambda(t_o)$ sono i **valori iniziali** (n.b.: delle variabili di stato)
- se l'induttore è carico in t_o, ossia $i(t_o)\neq 0$, la relazione non è lineare.

Circuito equivalente linearizzato

Quando servono relazioni lineari, può essere usato uno schema equivalente dell'induttore carico, ove l'induttore è scaricato (=linearizzato) e compare un generatore ideale di corrente costante per tener conto del valore iniziale $i(0)=I$

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L}\int_0^t v(t')\,dt' \qquad\qquad i_o(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(t')\,dt'$$

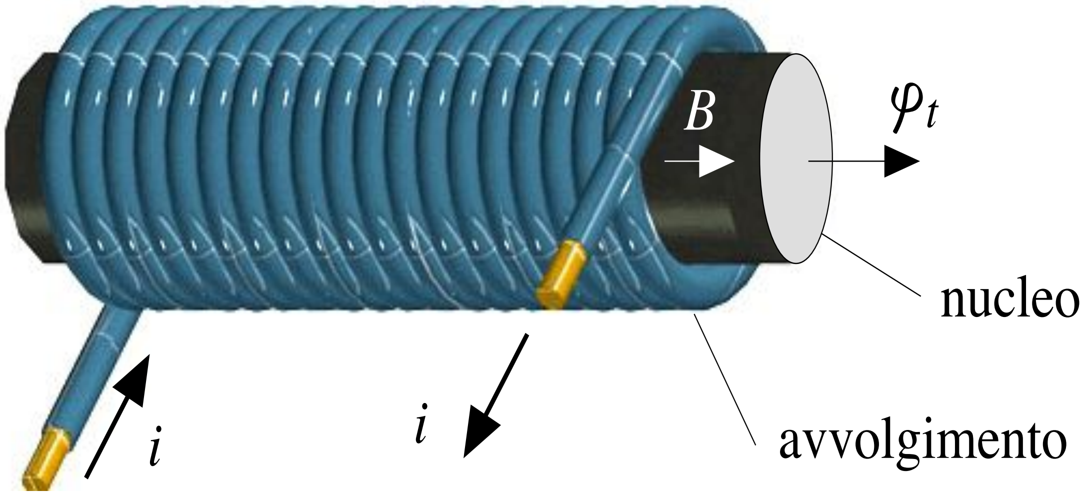


Induttori reali

Gli induttori reali più comuni sono di tipo magnetico, ovvero costituiti da un avvolgimento (circuito induttore) realizzato con un conduttore di sezione più o meno sottile. Quando vi è applicata la corrente i, esso produce il flusso di induzione magnetica concatenato φ_c (che è un multiplo del flusso sulla sezione φ_t) e corrisponde all'integrale di tensione, $\lambda = \varphi_c$:

→ $$\varphi_c = L\, i$$

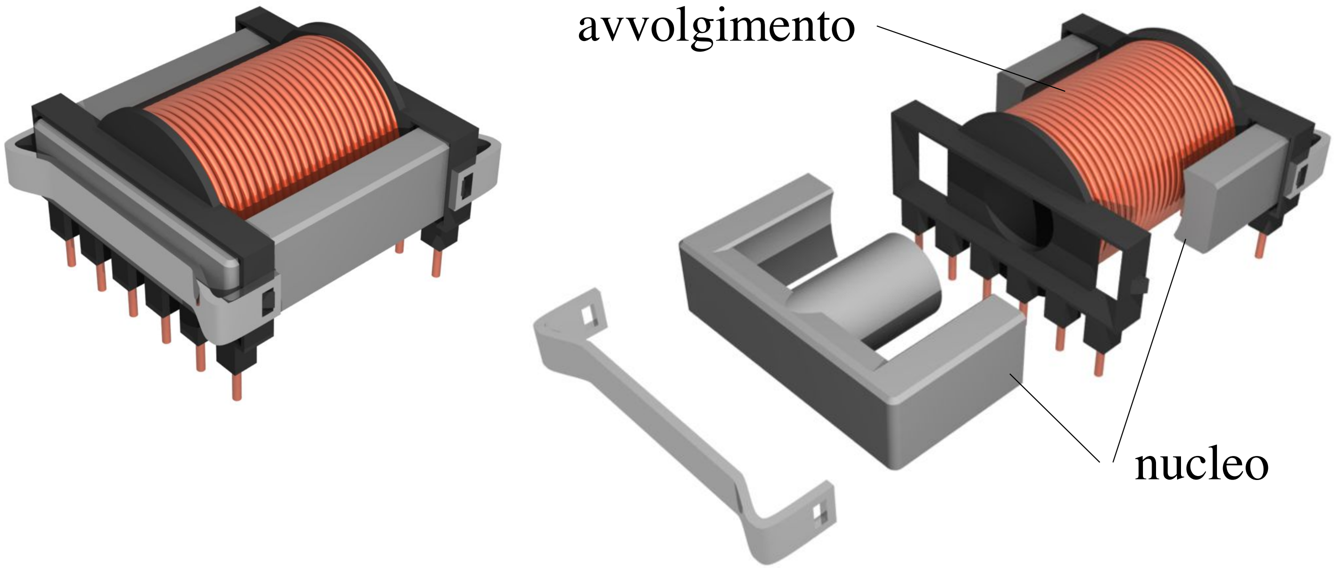
L dipende dalla geometria e dalle proprietà del mezzo ove si sviluppa φ_c



Induttori reali

Circuiti induttori ad asse rettilineo (solenoidi) e circolare (toroidi) con induttanze di frazioni di mH per correnti dell'ordine di $10^0 \div 10^1$ A.
L'avvolgimento è avvolto su un nucleo in ferrite, dotato di alta permeabilità, che canalizza ed intensifica il flusso di induzione

Induttori reali



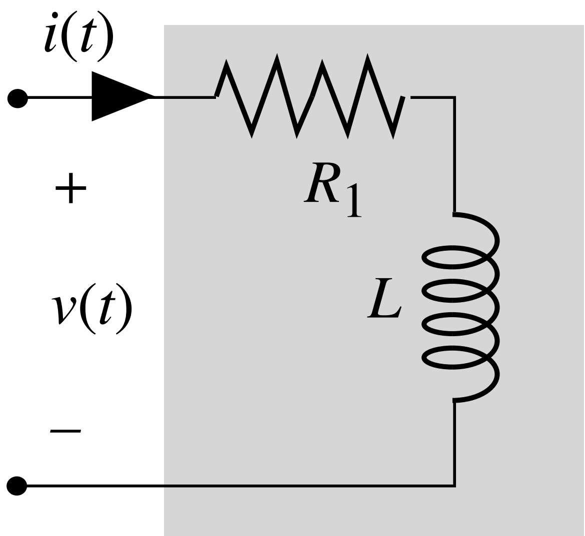
Induttore con nucleo ferromagnetico e sua vista esplosa. Le parti grigie costituiscono il nucleo in ferrite ad elevata permeabilità magnetica

Perdite negli induttori reali

Gli induttori reali non sono perfetti (e nemmeno ideali) e sono sedi di dissipazioni, oltre che di accumulo di energia. Vi si verificano anzitutto:

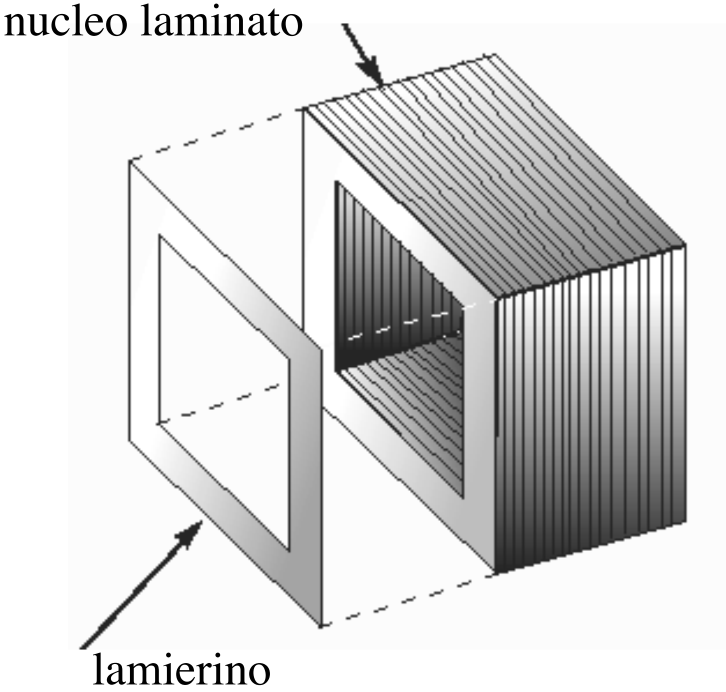
1) perdite ohmiche nell'avvolgimento (non ha resistività nulla), quando è presente corrente

Se ne tiene conto con uno schema equivalente comprendente il resistore R_1



Perdite negli induttori reali

Negli induttori con nucleo ferromagnetico (realizzato con lamierini ferro-silicio o ferriti) si manifestano anche perdite per **isteresi magnetica** e per **correnti parassite**, chiamate complessivamente **perdite nel nucleo** o **perdite nel ferro**.



Perdite negli induttori reali

Le **perdite per isteresi magnetica** per unità di volume in ogni ciclo sono proporzionali all'area del ciclo di isteresi.

Delle **perdite nel ferro** complessive si può tenere conto introducendo un resistore R_2 di opportuno valore in parallelo ad L.