

Università di Padova - Scuola di Ingegneria

Massimo Guarnieri

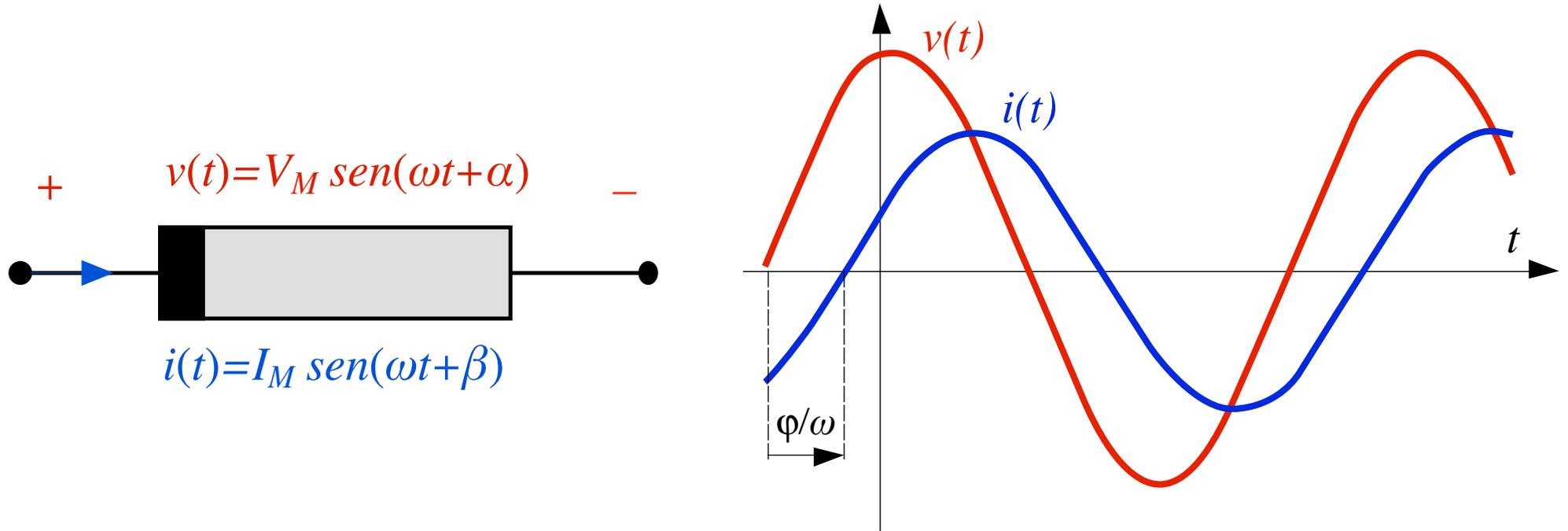
Elettrotecnica

Capitolo 15

Bipoli e doppi bipoli in regime sinusoidale

Potenza in regime sinusoidale

Generico bipolo in regime sinusoidale:



Sfasamento tensione-corrente: $\varphi = \alpha - \beta$

Potenza istantanea -1

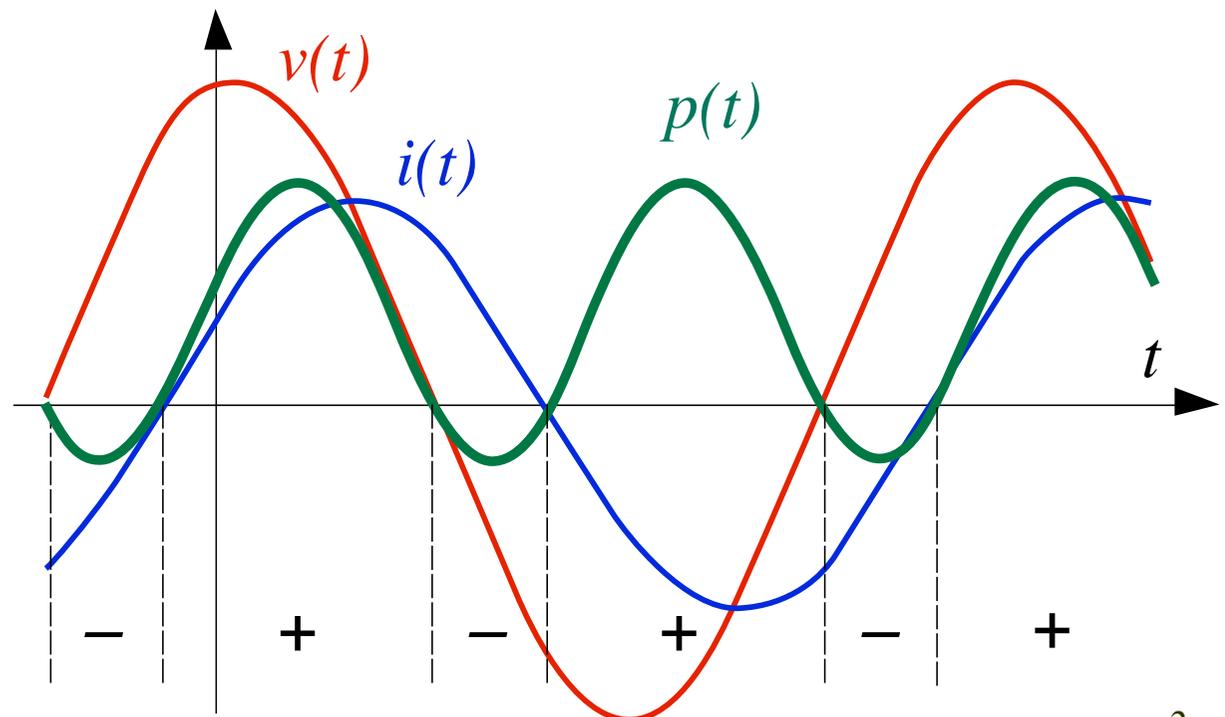
Come al solito $p=vi$ [W]

al solito:

è entrante se il bipolo è convenzionato da utilizzatore;
è uscente se il bipolo è convenzionato da generatore.

$$p(t) = v(t) i(t) = V_M I_M \text{sen}(\omega t + \alpha) \text{sen}(\omega t + \beta)$$

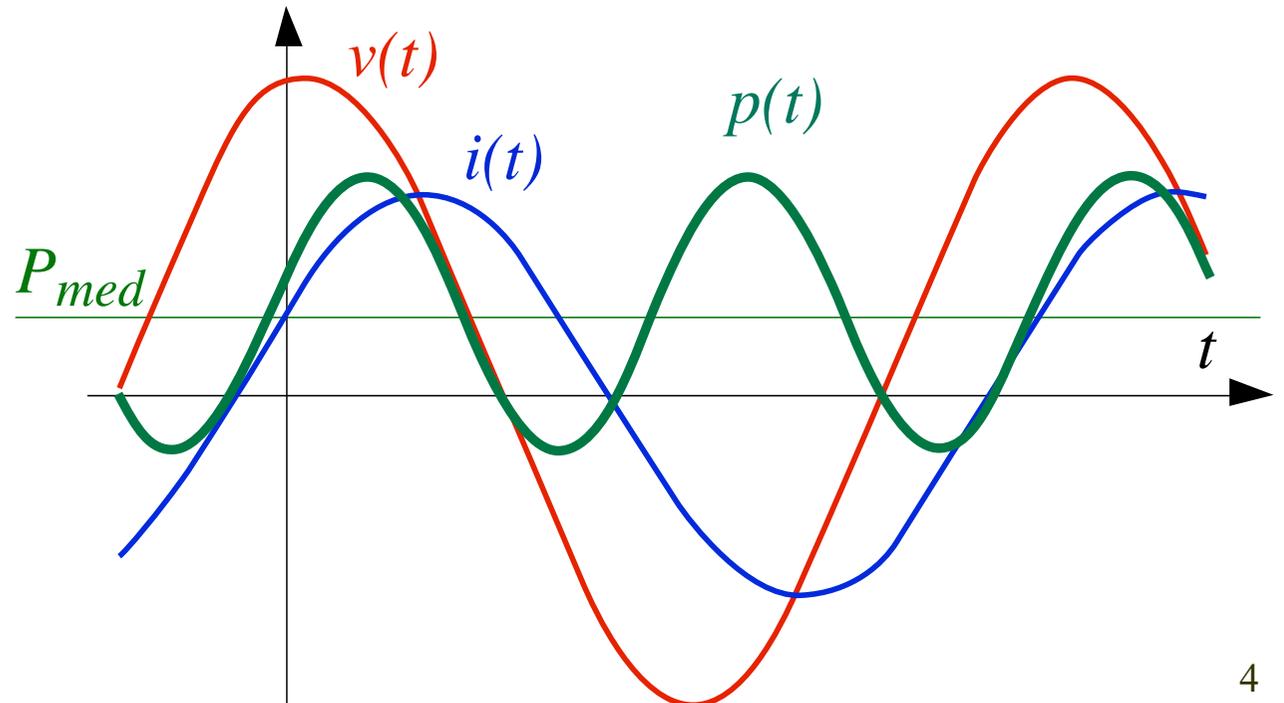
... la potenza istantanea non
è isofrequenziale con v e i
e nemmeno alternata



Potenza istantanea -2

Riscritta con una delle formule di Werner diventa

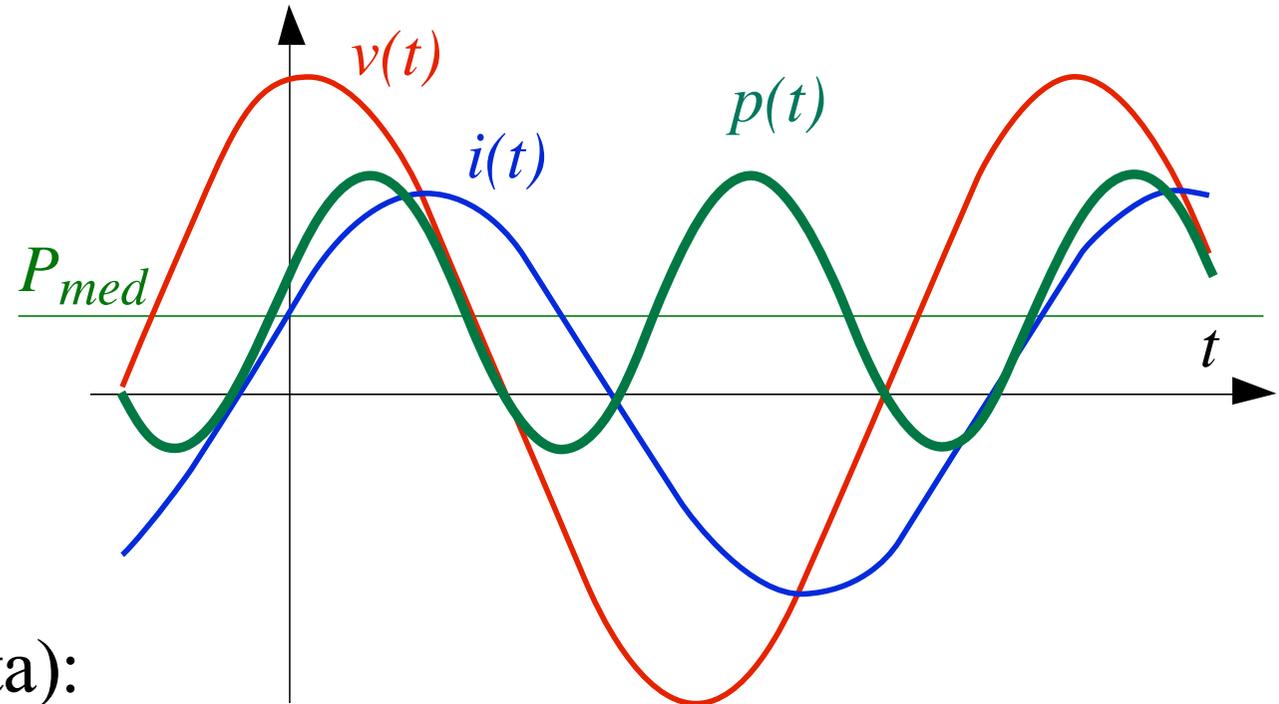
$$\begin{aligned} p(t) = v i &= V_M I_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) \operatorname{sen}(\omega t + \beta) = \\ &= V_M I_M \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(2\omega t + \alpha + \beta)] = \\ &= V I \cos \varphi - V I \cos(2\omega t + \alpha + \beta) = P_{med} + p_f(t) \end{aligned}$$



Potenza istantanea -3

valore medio (costante):

$$P_{\text{cost}} = VI \cos \varphi$$



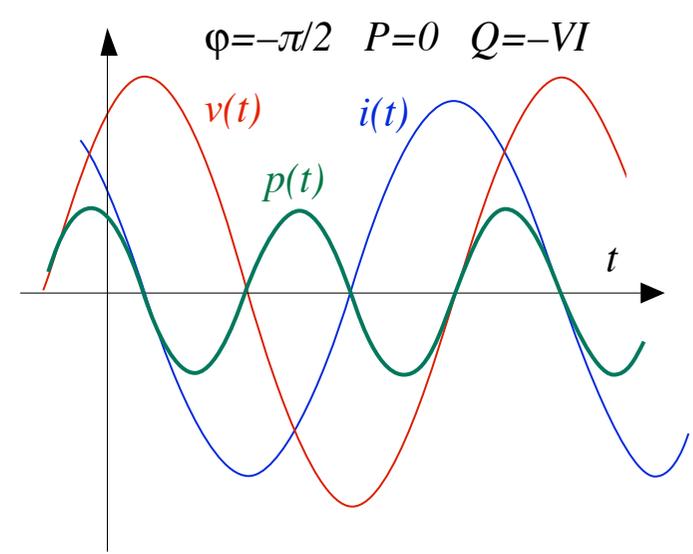
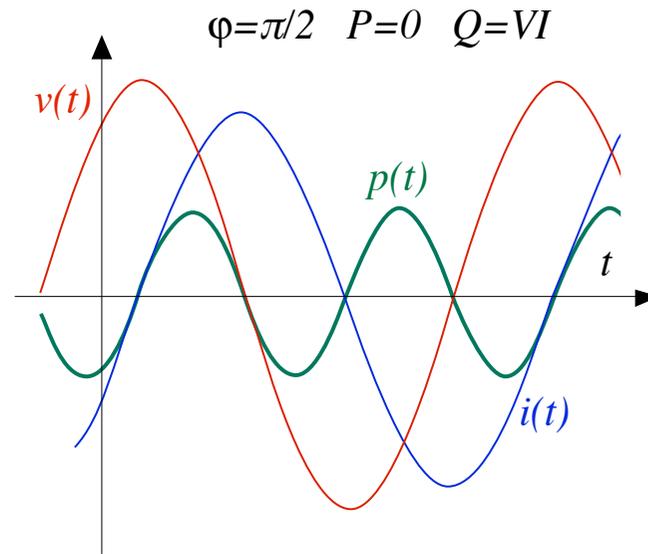
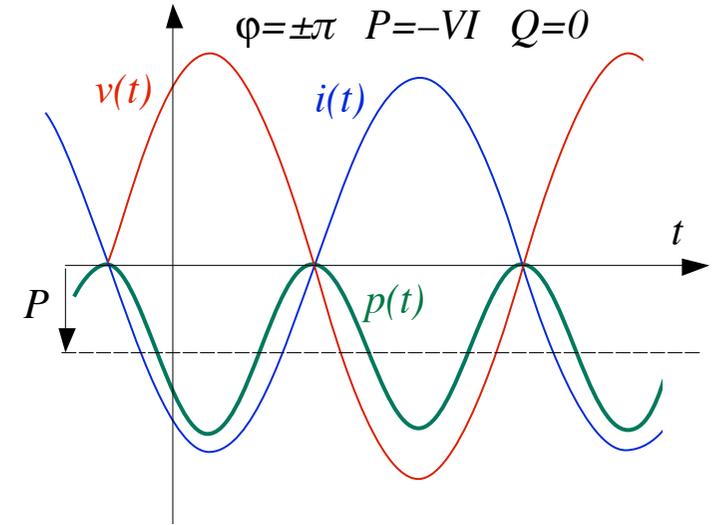
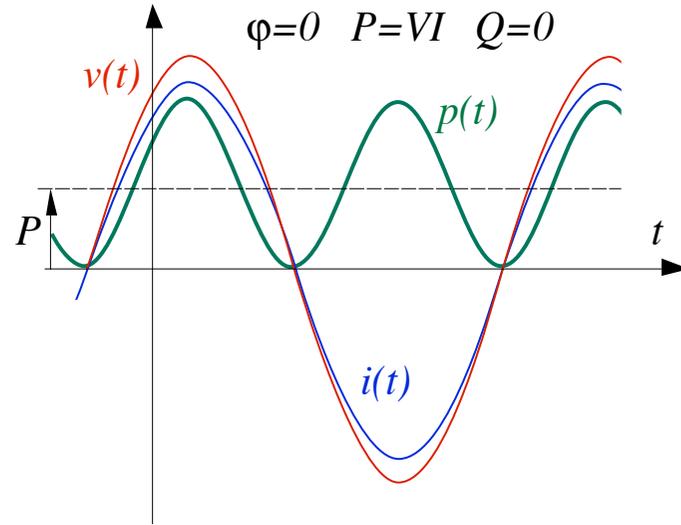
potenza fluttuante (alternata):

$$p_f(t) = -VI \cos(2\omega t + \alpha + \beta)$$

Potenza istantanea -4

Dipende dallo sfasamento:

comportamento per i quattro valori notevoli di φ



Potenza attiva

Definizione (per qualsiasi regime periodico):

$$P \triangleq \frac{1}{T} \int_T p(t) dt \quad [\text{W}]$$

Scopo: una volta nota, permette di calcolare il lavoro elettrico scambiato in un intervallo di tempo lungo ($\Delta t \gg T$) per mezzo del prodotto:

$$\Delta \mathcal{L} = P \Delta t$$

senza dover integrare $p(t)$ nel tempo

Potenza attiva

Applicando la definizione al **regime sinusoidale** si ottiene:

potenza attiva:
$$P = VI \cos \varphi \quad [\text{W}]$$

P è uguale al valor medio P_{med}

$p_f(t)$, che è alternata, è ininfluente.

Potenza reattiva e apparente

Definizioni:

potenza reattiva: $Q \triangleq VI \operatorname{sen} \varphi$ [VAR]

potenza apparente: $S \triangleq VI$ [VA]

Relazioni:

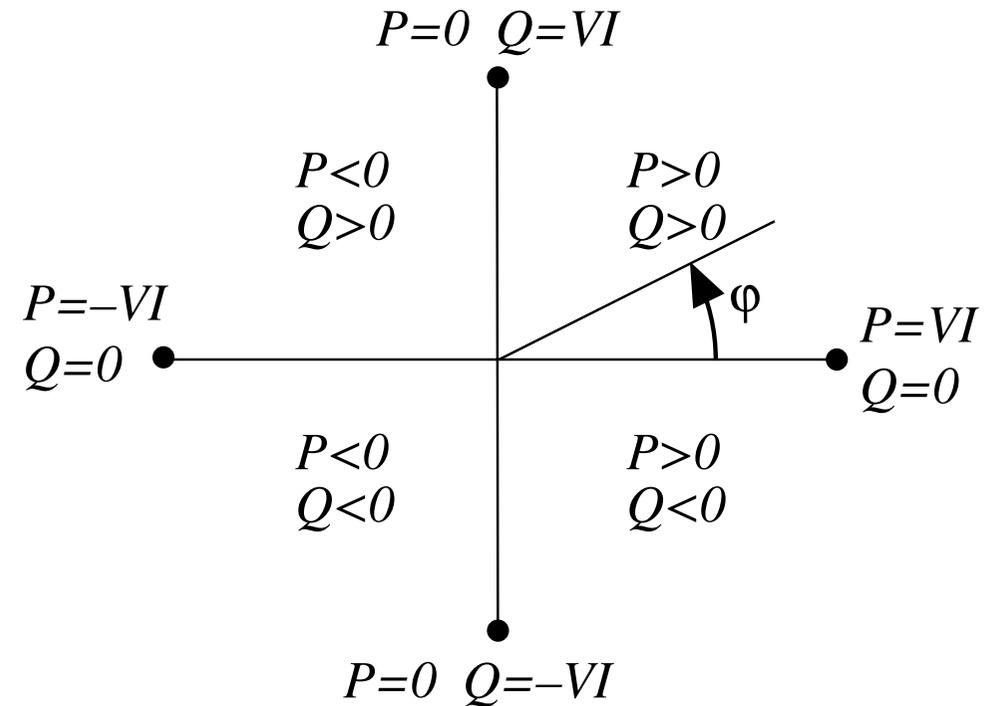
$$\begin{aligned} P &= S \cos \varphi \\ Q &= S \operatorname{sen} \varphi \end{aligned} \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Fattore di potenza: $\cos \varphi \triangleq \frac{P}{S} = \cos \varphi \leq 1$

Segni delle potenze

$S \geq 0$ P e Q dipendono da φ :

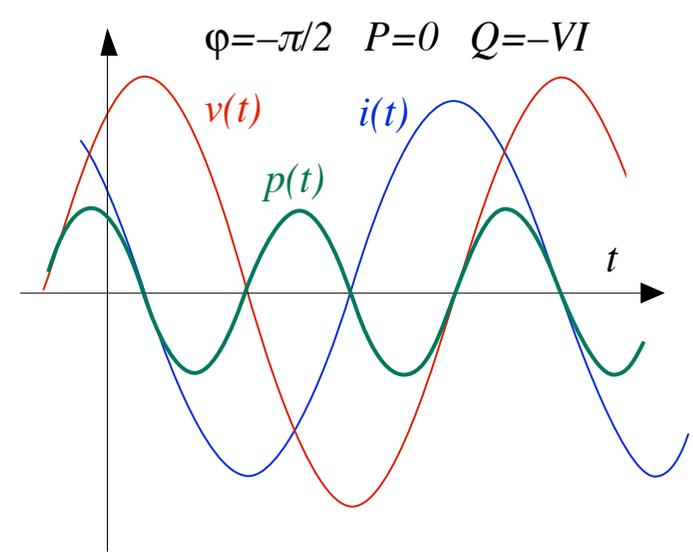
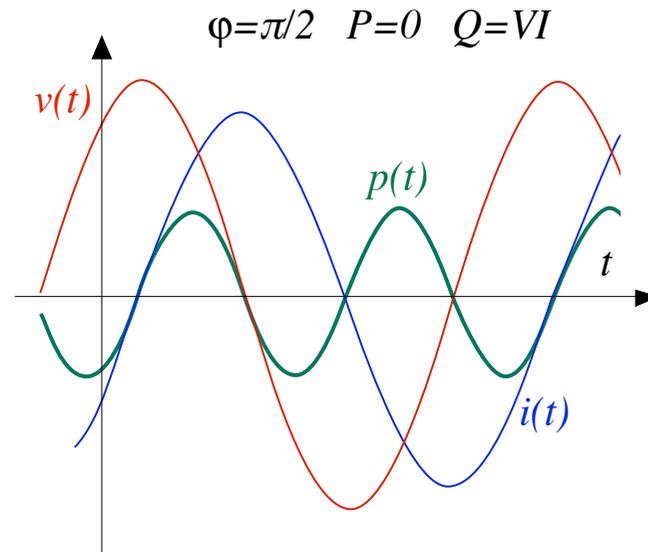
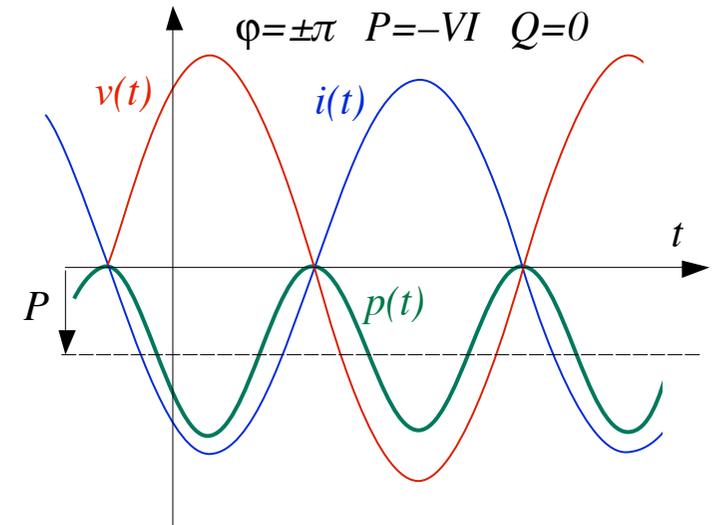
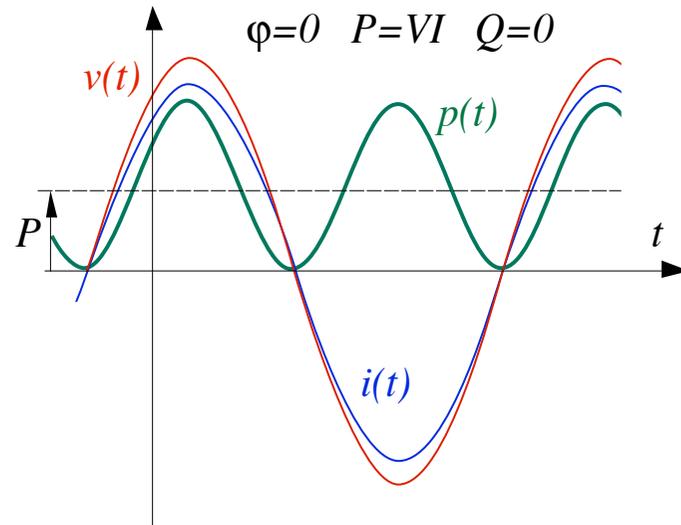
$0 < \varphi < \pi/2$	\rightarrow	$P > 0$	$Q > 0$
$\pi/2 < \varphi < \pi$	\rightarrow	$P < 0$	$Q > 0$
$-\pi/2 < \varphi < 0$	\rightarrow	$P > 0$	$Q < 0$
$-\pi/2 < \varphi < -\pi$	\rightarrow	$P < 0$	$Q < 0$



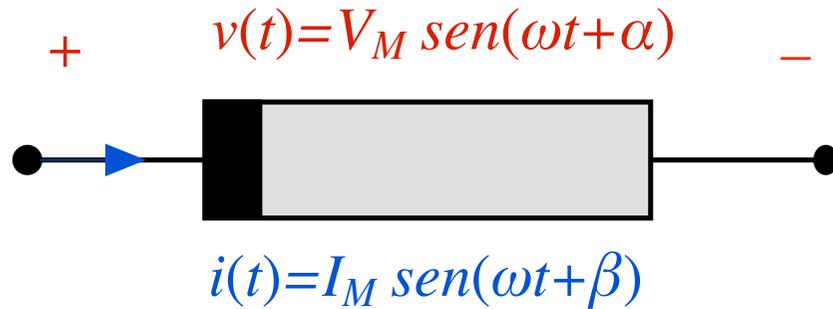
$\varphi = 0$	\rightarrow	$P = VI$ (max)	$Q = 0$ (nulla)
$\varphi = \pi/2$	\rightarrow	$P = 0$ (nulla)	$Q = VI$ (max)
$\varphi = -\pi/2$	\rightarrow	$P = 0$ (nulla)	$Q = -VI$ (min)
$\varphi = \pm \pi$	\rightarrow	$P = -VI$ (min)	$Q = 0$ (nulla)

Segni delle potenze

Come già indicato
in questi diagrammi

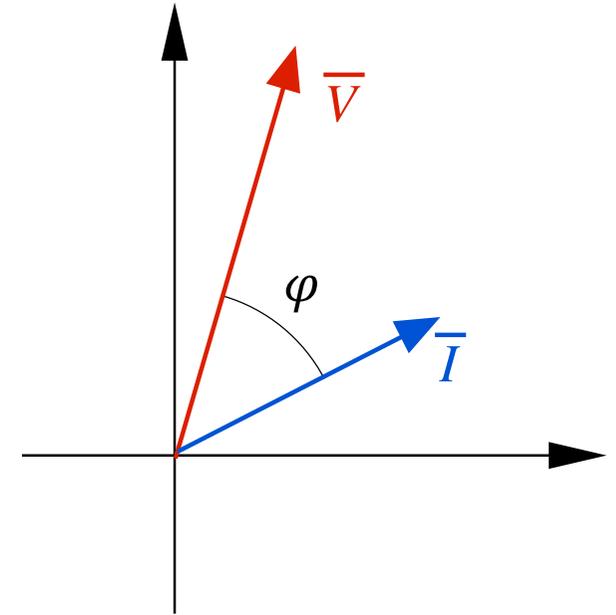


Potenza complessa



$$\bar{V} = V e^{j\alpha}$$

$$\bar{I} = I e^{j\beta}$$



Fasori di tensione e corrente:

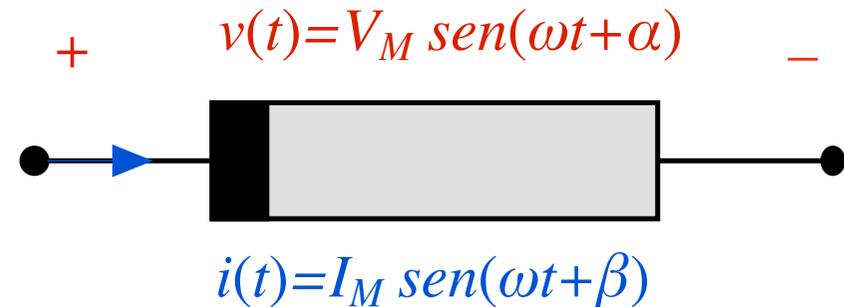
Definizione: $\dot{S} \triangleq \bar{V} \bar{I}^*$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad \dot{S} &= V e^{j\alpha} I e^{j(-\beta)} = VI e^{j(\alpha-\beta)} = S e^{j\varphi} = \\ &= S \cos \varphi + j S \text{sen} \varphi \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad |\dot{S}| = S \quad \angle \dot{S} = \varphi \quad \Re[\dot{S}] = P \quad \Im[\dot{S}] = Q$$

Passività in regime sinusoidale

Bipolo passivo (definizione già nota):
il lavoro elettrico erogato in Δt non
può superare il decremento di
energia immagazzinata



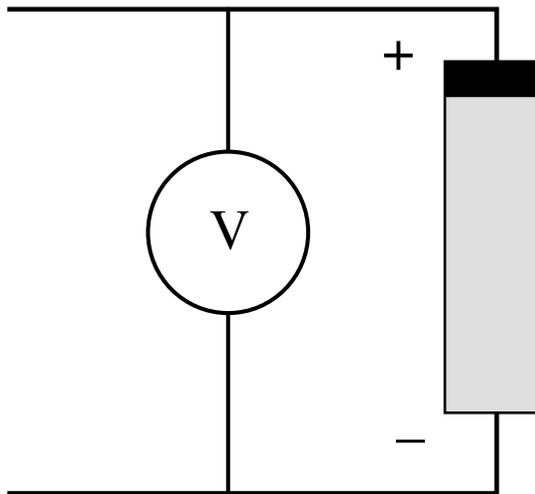
Applicata ad un periodo T : la variazione di energia è nulla, $\Delta w = 0$,
perché tensioni e correnti dopo un periodo tornano ai valori iniziali.
→ il lavoro uscente $\Delta \mathcal{L} = PT$ deve essere negativo o nullo. Ma $T > 0$.
→ la potenza entrante (**convenzione degli utilizzatori**) deve essere
 $P \geq 0$:

$$P = VI \cos \varphi \geq 0 \quad \rightarrow \quad \cos \varphi \geq 0$$
$$\rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

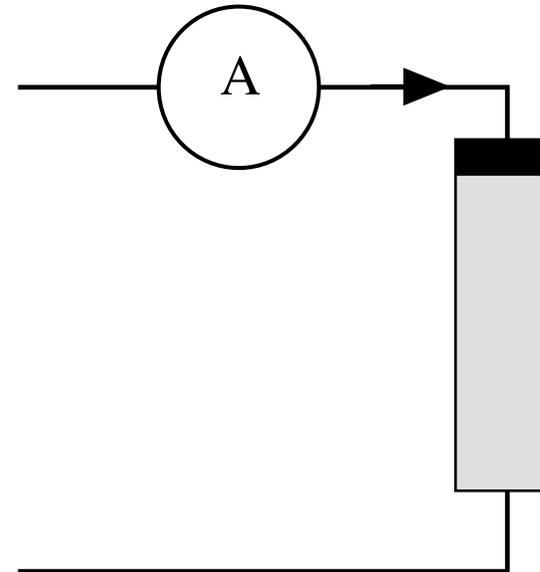
Strumenti in regime sinusoidale

Più spesso che gli strumenti a valore istantaneo, si considerano quelli a valore efficace o medio

**Voltmetro
a valore efficace**

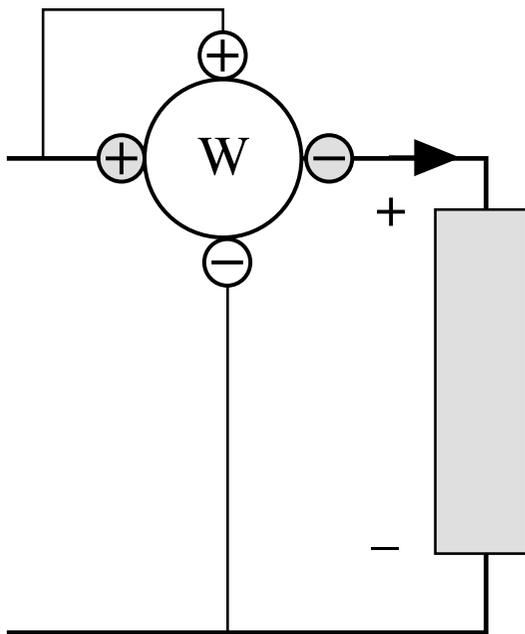


**Amperometro
a valore efficace**

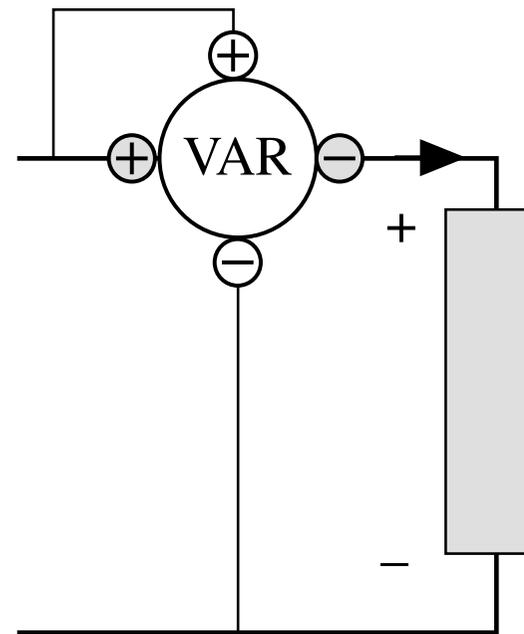


Strumenti in regime sinusoidale

Wattmetro
a valore medio
= P (potenza attiva)



Varmetro
(poco frequente)
= Q (potenza reattiva)



Altre misure in regime sinusoidale

Potenza apparente $S = VI$ (usando le misure dei valori efficaci)

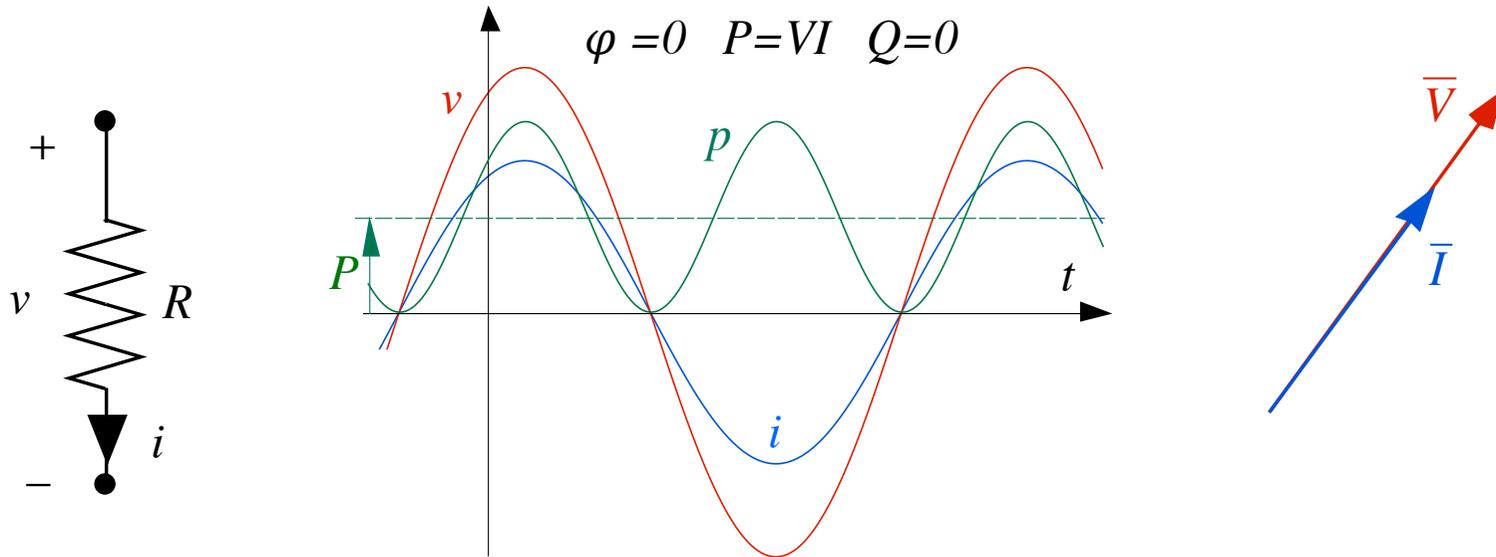
Fattore di potenza $\cos\phi = P / VI$ (usando le misure della potenza attiva e dei valori efficaci)

Potenza reattiva $|Q| = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{V^2 I^2 - P^2}$

Lavoro elettrico in un periodo wattmetro integratore (contatore)

Strumenti elettronici multifunzione rilevano tensione e corrente e forniscono varie misure

Resistore passivo in regime sinusoidale



$$v(t) = R i(t)$$

$$i(t) = I_M \text{sen}(\omega t + \beta) \quad \rightarrow \quad v(t) = R I_M \text{sen}(\omega t + \beta) = (R I_M) \text{sen}(\omega t + \beta) \\ = V_M \text{sen}(\omega t + \alpha)$$

$$\rightarrow \quad \alpha = \beta \quad V_M = R I_M$$

Resistore passivo in regime sinusoidale

RELAZIONI SINETICHE

Sinusoidi

$$\varphi = \alpha - \beta = 0 \quad \frac{V_M}{I_M} = \frac{V}{I} = R \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} V = R I \\ I = G V \end{array} \quad G = \frac{1}{R}$$

$$\text{Fasori} \left\{ \begin{array}{l} \bar{V} = V e^{j\alpha} \\ \bar{I} = I e^{j\beta} \end{array} \right.$$

$$\frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{V e^{j\alpha}}{I e^{j\beta}} = \frac{V}{I} e^{j(\alpha-\beta)} = R e^{j0} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \bar{V} = R \bar{I} \\ \bar{I} = G \bar{V} \end{array}$$

Resistore passivo in regime sinusoidale

Potenze

n.b.: $\varphi = 0$

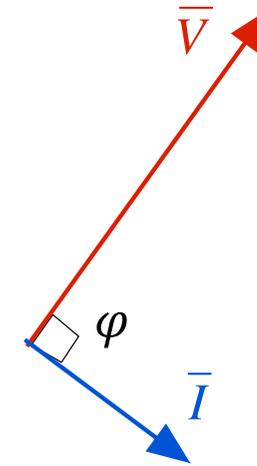
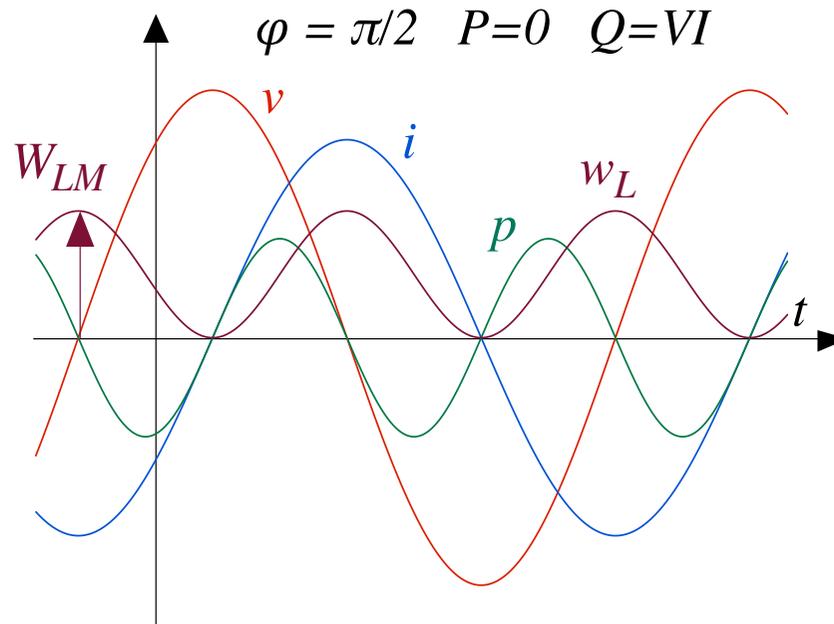
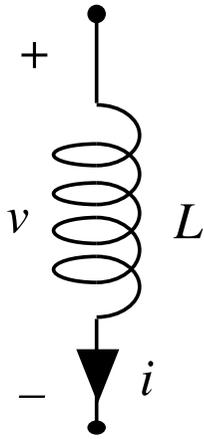
$\cos \varphi = 1$

$\sin \varphi = 0$

$$P = S = V I = \begin{cases} = R I^2 = \frac{V^2}{R} \\ = G V^2 = \frac{I^2}{G} \end{cases}, \quad Q = 0$$

n.b.: Le espressioni, ove compaiono i valori efficaci, sono formalmente identiche a quelle valide in regime stazionario, ove compaiono i valori costanti

Induttore in regime sinusoidale



$$v(t) = L di(t)/dt$$

$$i(t) = I_M \text{sen}(\omega t + \beta)$$

\rightarrow

$$\begin{aligned} v(t) &= \omega L I_M \text{sen}(\omega t + \beta + \pi/2) = \\ &= (\omega L I_M) \text{sen}[\omega t + (\beta + \pi/2)] = \\ &= V_M \text{sen}(\omega t + \alpha) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \alpha = \beta + \pi/2 \quad V_M = \omega L I_M$$

Induttore in regime sinusoidale

RELAZIONI SINETICHE

Sinusoidi

$$\varphi = \alpha - \beta = \frac{\pi}{2} \quad \frac{V_M}{I_M} = \frac{V}{I} = \omega L \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} X_L = \omega L \quad [\Omega] \\ B_L = \frac{-1}{\omega L} \quad [\text{S}] \end{array} \quad \begin{array}{l} V = |X_L| I \\ I = |B_L| V \end{array}$$

X_L = reattanza induttiva
 B_L = suscettanza induttiva

$$B_L = \frac{-1}{X_L}$$

Fasori $\left\{ \begin{array}{l} \bar{V} = V e^{j\alpha} \\ \bar{I} = I e^{j\beta} \end{array} \right. \quad \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{V}{I} e^{j(\alpha-\beta)} = |X_L| e^{j\frac{\pi}{2}} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \bar{V} = jX_L \bar{I} \\ \bar{I} = jB_L \bar{V} \end{array}$

n.b.: $\frac{1}{jX_L} = -j \frac{1}{X_L} = jB_L$

Induttore in regime sinusoidale

Potenze

n.b.: $\varphi = \pi/2$

$\cos \varphi = 0$

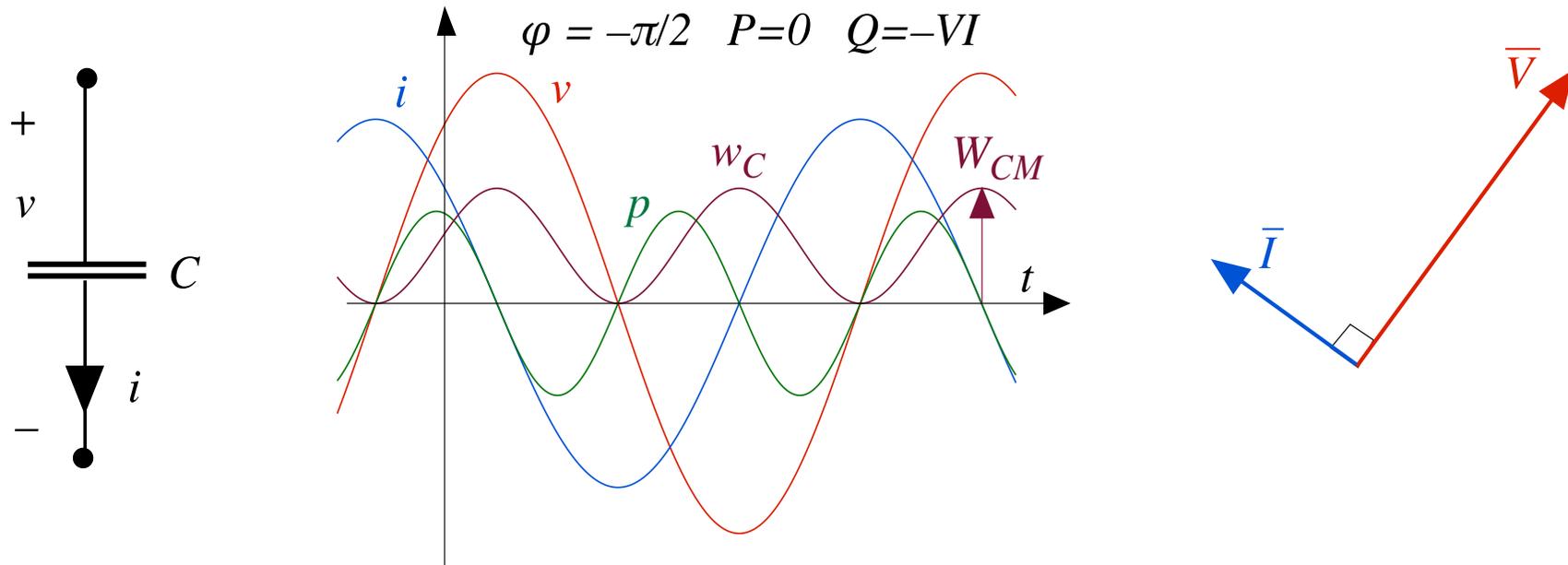
$\sin \varphi = 1$

$$P = 0 \quad , \quad Q = S = VI = \begin{cases} = X_L I^2 = \frac{V^2}{X_L} > 0 \\ = -\frac{I^2}{B_L} = -B_L V^2 > 0 \end{cases}$$

Potenza reattiva:

$$Q = \omega L \left(\frac{I_M}{\sqrt{2}} \right)^2 = \omega \left(L \frac{I_M^2}{2} \right) = \omega W_{LM} = 2\omega W_{Lm}$$

Condensatore in regime sinusoidale



$$i(t) = C \, dv(t)/dt$$

$$\begin{aligned}
 v(t) = V_M \, \text{sen}(\omega t + \alpha) \quad \rightarrow \quad i(t) &= \omega C \, V_M \, \text{sen}(\omega t + \alpha + \pi/2) = \\
 &= (\omega C V_M) \, \text{sen}[\omega t + (\alpha + \pi/2)] = \\
 &= I_M \, \text{sen}(\omega t + \beta)
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad \beta = \alpha + \pi/2 \quad I_M = \omega C V_M$$

Condensatore in regime sinusoidale

RELAZIONI SINETICHE

Sinusoidi

$$\varphi = \alpha - \beta = -\frac{\pi}{2} \quad \frac{V_M}{I_M} = \frac{V}{I} = \frac{1}{\omega C} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} X_C = \frac{-1}{\omega C} \quad [\Omega] \\ B_C = \omega C \quad [S] \end{array} \quad \begin{array}{l} V = |X_C| I \\ I = |B_C| V \end{array}$$

X_C = reattanza capacitiva

B_C = suscettanza capacitiva

$$B_C = \frac{-1}{X_C}$$

Fasori $\left\{ \begin{array}{l} \bar{V} = V e^{j\alpha} \\ \bar{I} = I e^{j\beta} \end{array} \right. \quad \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{V}{I} e^{j(\alpha-\beta)} = |X_C| e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \bar{V} = jX_C \bar{I} \\ \bar{I} = jB_C \bar{V} \end{array}$

n.b.: $\frac{1}{jX_C} = -j \frac{1}{X_C} = jB_C$

Condensatore in regime sinusoidale

Potenze

n.b.: $\varphi = -\pi/2$

$\cos \varphi = 0$

$\sin \varphi = -1$

$$P = 0 \quad , \quad Q = -S = -VI = \begin{cases} = X_C I^2 = \frac{V^2}{X_C} < 0 \\ = -\frac{I^2}{B_C} = -B_C V^2 < 0 \end{cases}$$

Potenza reattiva:

$$|Q| = \omega C \left(\frac{V_M}{\sqrt{2}} \right)^2 = \omega \left(C \frac{V_M^2}{2} \right) = \omega W_{CM} = 2\omega W_{Cm}$$

Tabella riassuntiva

proprietà	resistore R	induttore L	condensatore C
relazione funzionale	$v = R i$	$v = L \frac{di}{dt}$	$i = C \frac{dv}{dt}$
reattanza	-	$X_L = \omega L$	$X_C = -\frac{1}{\omega C}$
suscettanza	-	$B_L = -\frac{1}{\omega L}$	$B_C = \omega C$
rapporto tra i val. eff. $\frac{V}{I}$	R	$ X_L = \omega L$	$ X_C = \frac{1}{\omega C}$
rapporto tra i val. eff. $\frac{I}{V}$	G	$ B_L = \frac{1}{\omega L}$	$ B_C = \omega C$
sfasamento φ	0	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
rapporto tra i fasori $\frac{\bar{V}}{\bar{I}}$	R	$jX_L = j\omega L$	$jX_C = \frac{-j}{\omega C}$
rapporto tra i fasori $\frac{\bar{I}}{\bar{V}}$	G	$jB_L = \frac{-j}{\omega L}$	$jB_C = j\omega C$
potenza attiva P	$RI^2 = GV^2$	0	0
potenza reattiva Q	0	$X_L I^2 = -B_L V^2 \geq 0$	$X_C I^2 = -B_C V^2 \leq 0$
potenza apparente S	$RI^2 = GV^2$	$ X_L I^2 = B_L V^2$	$ X_C I^2 = B_C V^2$

Bipoli passivi generici

Resistore passivo, induttore e condensatore sono bipoli passivi ($P_{\text{entrante}} \geq 0$) per i quali sono ben definiti i rapporti tra il fasore di tensione e fasore di corrente, e viceversa, che valgono $R, G, jX_L, jB_L, jX_C, jB_C$

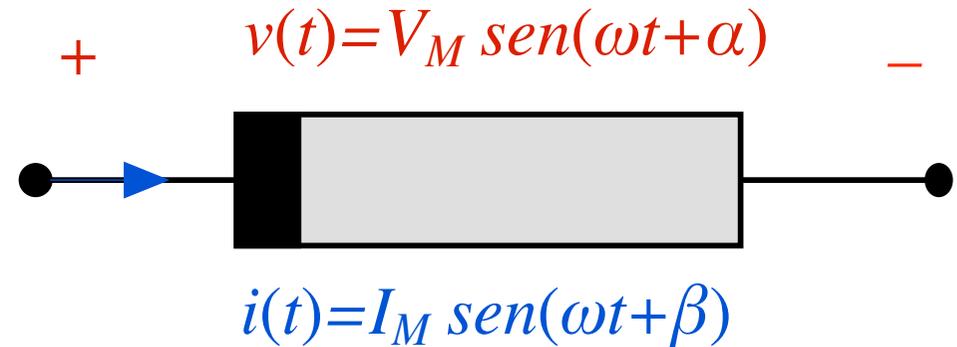
Questa proprietà si può generalizzare con i conetti di impedenza e ammettenza

Bipoli passivi generici

Bipolo passivo convenzionato da utilizzatore

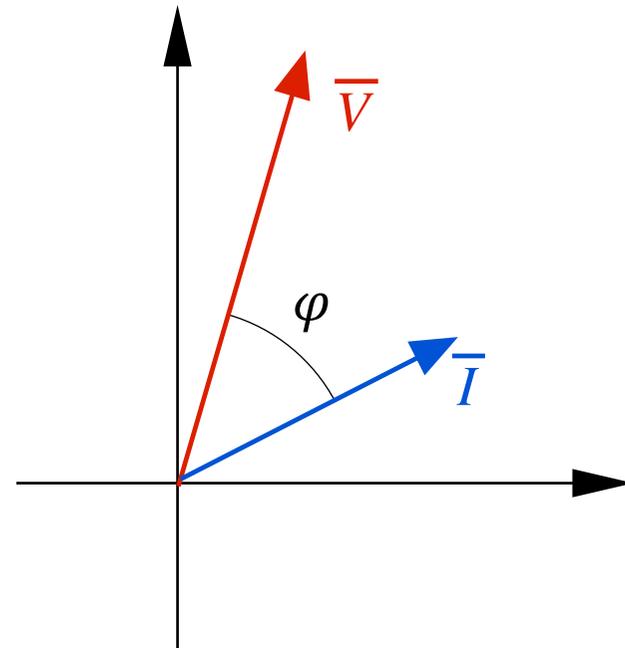
sfasamento $v-i$: $\varphi = \alpha - \beta$

sfasamento $i-v$: $\varphi' = \beta - \alpha$



passività $\rightarrow -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$
 $-\pi/2 \leq \varphi' \leq \pi/2$

Fasori:

$$\bar{V} = V e^{j\alpha}$$
$$\bar{I} = I e^{j\beta}$$


Impedenza -1

Definizione $\dot{Z} \triangleq \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$

$\rightarrow \dot{Z} = \frac{V e^{j\alpha}}{I e^{j\beta}} = \frac{V}{I} e^{j(\alpha-\beta)} = \frac{V}{I} e^{j\varphi} = Z e^{j\varphi}$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\dot{Z}| = Z = \frac{V}{I} \\ \angle \dot{Z} = \varphi \end{array} \right.$$

anche $\dot{Z} = Z_{\Re} + jZ_{\Im}$

Relazioni tra notazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{\Re} = Z \cos \varphi \geq 0 \quad (\text{per passività}) \\ Z_{\Im} = Z \sin \varphi \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} Z = \sqrt{Z_{\Re}^2 + Z_{\Im}^2} \\ \varphi = \arctan \frac{Z_{\Im}}{Z_{\Re}} \end{array} \right.$$

Impedenza -2

Legame tipologico simbolico controllato in corrente

$$\bar{V} = \dot{Z} \bar{I}$$

Esempi

$$\dot{Z}_R = R e^{j0} = R + j0$$

$$(X_L > 0) \quad \dot{Z}_L = X_L e^{j\frac{\pi}{2}} = 0 + jX_L$$

$$(X_C < 0) \quad \dot{Z}_C = X_C e^{j\frac{\pi}{2}} = 0 + jX_C$$

n.b.: in generale non è vero che le parti reali sono dovute solo alle resistenze e che le parti immaginarie sono dovute solo alle reattanze

Impedenza -3

Potenze

$$\dot{S} = \bar{V} \bar{I}^* = \dot{Z} \bar{I} \bar{I}^* = \dot{Z} I^2 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} S = Z I^2 \\ P = Z_{\Re} I^2 \\ Q = Z_{\Im} I^2 \end{array} \right.$$

Ammetenza -1

Definizione $\dot{Y} \triangleq \frac{\dot{I}}{\bar{V}}$

$$\rightarrow \dot{Y} = \frac{I e^{j\beta}}{V e^{j\alpha}} = \frac{I}{V} e^{j(\beta-\alpha)} = \frac{I}{V} e^{j\varphi'} = Y e^{j\varphi'} \left\{ \begin{array}{l} |\dot{Y}| = Y = \frac{I}{V} \\ \angle \dot{Y} = \varphi' \end{array} \right.$$

anche $\dot{Y} = Y_{\Re} + jY_{\Im}$

Relazioni tra notazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{\Re} = Y \cos \varphi' \geq 0 \quad (\text{per passività}) \\ Y_{\Im} = Y \sin \varphi' \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} Y = \sqrt{Y_{\Re}^2 + Y_{\Im}^2} \\ \varphi' = \arctan \frac{Y_{\Im}}{Y_{\Re}} \end{array} \right.$$

Ammettenza -2

Legame tipologico simbolico controllato in tensione

$$\bar{I} = \dot{Y} \bar{V}$$

Esempi

$$\dot{Y}_R = Ge^{j0} = G + j0$$

$$(B_L < 0) \quad \dot{Y}_L = B_L e^{j\frac{\pi}{2}} = 0 + jB_L$$

$$(B_C > 0) \quad \dot{Y}_C = B_C e^{j\frac{\pi}{2}} = 0 + jB_C$$

n.b.: in generale non è vero che le parti reali sono dovute solo alle conduttanze e che le parti immaginarie sono dovute solo alle suscettanze

Ammettenza -3

Potenze

$$\dot{S} = \bar{V} \bar{I}^* = \bar{V} \dot{Y}^* \bar{V}^* = \dot{Y}^* V^2 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} S = Y V^2 \\ P = Y_{\Re} V^2 \\ Q = -Y_{\Im} V^2 \end{array} \right.$$

Relazioni tra impedenza ed ammettenza

Impedenza ed ammettenza sono duali e reciproche:

Espressione complessa: $\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}}$

componenti polari: $Y e^{j\varphi'} = \frac{1}{Z e^{j\varphi}} = \frac{1}{Z} e^{j(-\varphi)}$

ovvero: $Y = \frac{1}{Z} \quad , \quad \varphi' = -\varphi$

Relazioni

componenti cartesiane

$$\left. \begin{aligned} Y_{\mathfrak{R}} &= Y \cos \varphi' \\ Y_{\mathfrak{S}} &= Y \sin \varphi' \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$Y_{\mathfrak{R}} = \frac{\cos \varphi}{Z} \quad Y_{\mathfrak{S}} = -\frac{\sin \varphi}{Z}$$

$$Z_{\mathfrak{R}} = \frac{\cos \varphi'}{Y} \quad Z_{\mathfrak{S}} = -\frac{\sin \varphi'}{Y}$$

$$Y_{\mathfrak{R}} = \frac{Z \cos \varphi}{Z^2} = \frac{Z_{\mathfrak{R}}}{Z_{\mathfrak{R}}^2 + Z_{\mathfrak{S}}^2}$$

$$Y_{\mathfrak{S}} = \frac{-Z \sin \varphi}{Z^2} = \frac{-Z_{\mathfrak{S}}}{Z_{\mathfrak{R}}^2 + Z_{\mathfrak{S}}^2}$$

$$Z_{\mathfrak{R}} = \frac{Y \cos \varphi'}{Y^2} = \frac{Y_{\mathfrak{R}}}{Y_{\mathfrak{R}}^2 + Y_{\mathfrak{S}}^2}$$

$$Z_{\mathfrak{S}} = \frac{-Y \sin \varphi'}{Y^2} = \frac{-Y_{\mathfrak{S}}}{Y_{\mathfrak{R}}^2 + Y_{\mathfrak{S}}^2}$$

Relazioni

	Impedenza	ammettenza
definizione	$\dot{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$	$\dot{Y} = \frac{\bar{I}}{\bar{V}}$
modulo	$Z = \frac{V}{I} = \frac{V_M}{I_M}$	$Y = \frac{I}{V} = \frac{I_M}{V_M}$
argomento	$\varphi = \alpha - \beta$	$\varphi' = \beta - \alpha$
parte reale	$Z_{\Re} = Z \cos \varphi$	$Y_{\Re} = Y \cos \varphi'$
parte immaginaria	$Z_{\Im} = Z \sin \varphi$	$Y_{\Im} = Y \sin \varphi'$
potenza attiva	$P = Z_{\Re} I^2$	$P = Y_{\Re} V^2$
potenza reattiva	$Q = Z_{\Im} I^2$	$Q = -Y_{\Im} V^2$
potenza apparente	$S = Z I^2$	$S = Y V^2$
potenza complessa	$\dot{S} = \dot{Z} I^2$	$\dot{S} = \dot{Y}^* V^2$

Commento

Osservazione:

Le **relazioni tipologiche fasoriali in campo complesso** relative ad impedenza e ammettenza per i bipoli passivi simbolici in regime sinusoidale

$$\bar{V} = \dot{Z} \bar{I} \quad e \quad \bar{I} = \dot{Y} \bar{V}$$

sono formalmente simili alle **relazioni tipologiche reali** di resistenza e conduttanza per i bipoli passivi ideali (resistori) del regime stazionario

$$V = R I \quad e \quad I = G V$$

Leggi di Kirchhoff simboliche: LKCS e LKTS

$$LKC \text{ a } n-1 \text{ insiemi di taglio: } \sum \pm i(t) = 0 \quad \rightarrow \quad \sum \pm \bar{I} = 0$$

$$LKT \text{ a } m \text{ maglie: } \sum \pm v(t) = 0 \quad \rightarrow \quad \sum \pm \bar{V} = 0$$

Le **equazioni topologiche simboliche (o fasoriali) LKCS e LKTS** si scrivono in forma **complessa** applicandole agli usuali insiemi di taglio e maglie e con le usuali modalità e attenzioni, in particolare nel porre i riferimenti.

È proibito scriverle sui valori efficaci!

Commento:

Esse sono formalmente simili alle **equazioni topologiche** in campo reale del regime stazionario:

$$\sum \pm I = 0$$

$$\sum \pm V = 0$$

Leggi di Kirchhoff simboliche

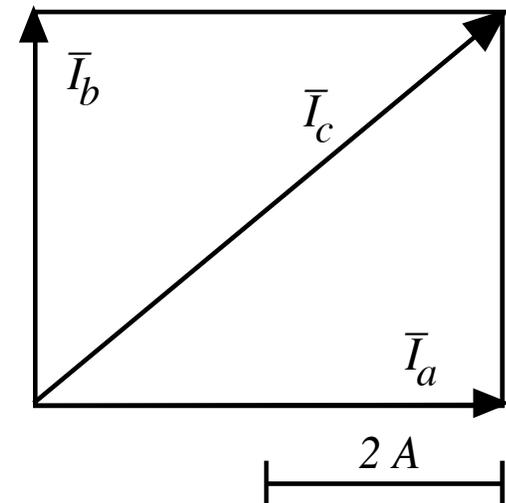
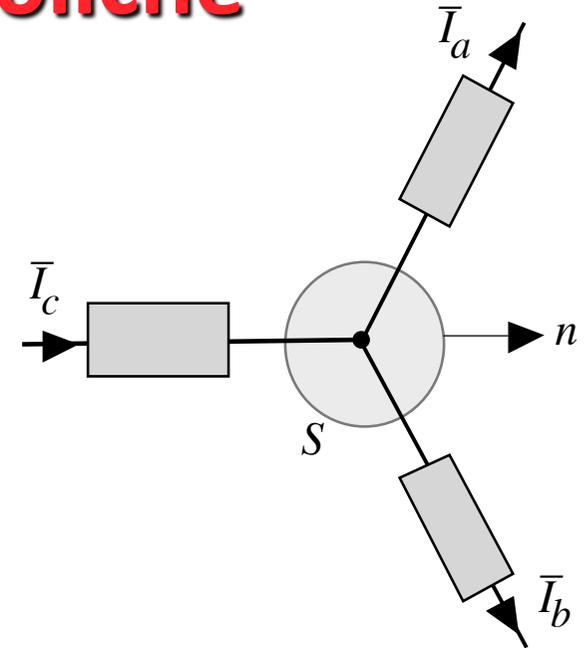
Esempio di LKCS:

$$\sum \pm \bar{I} = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{I}_c = \bar{I}_a + \bar{I}_b$$

sia: $\bar{I}_a = 4 + j0$, $\bar{I}_b = 0 + j3$

$$\rightarrow \bar{I}_c = \bar{I}_a + \bar{I}_b = (4 + j0) + (0 + j3) = 4 + j3$$

i valori efficaci sono: $I_a=4$ A, $I_b=3$ A e $I_c=5$ A
(e non 7 A)



Leggi di Kirchhoff simboliche

Esempio di LKTS:

$$\sum \pm \bar{V} = 0$$

$$\rightarrow \bar{V}_a - \bar{V}_b - \bar{V}_c + \bar{V}_d = 0$$

sia: $\bar{V}_a = 80$ $\bar{V}_b = j60$

$\bar{V}_c = 20 + j20$ $\bar{V}_d = -60 + j80$

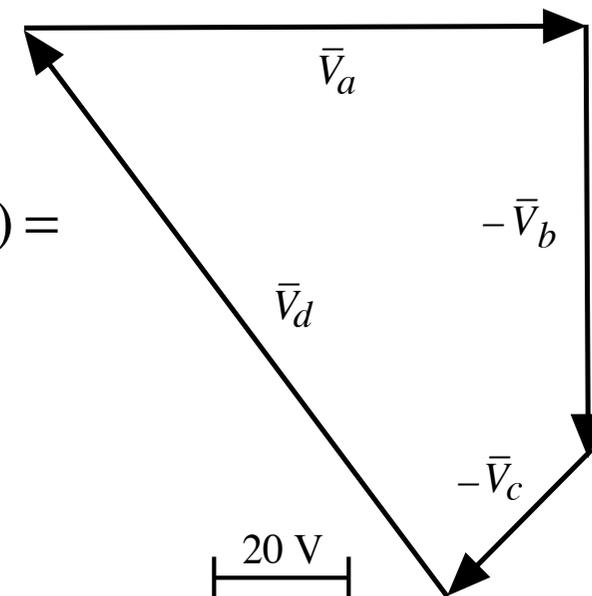
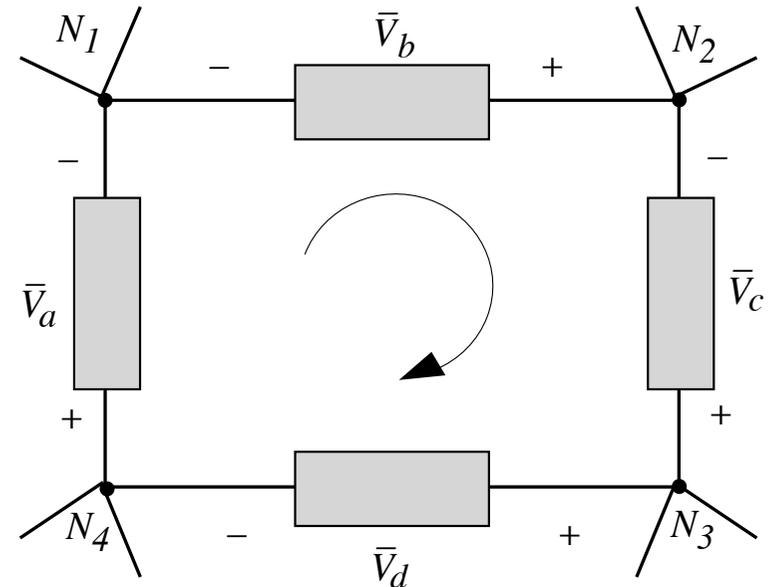
$$\rightarrow \bar{V}_a - \bar{V}_b - \bar{V}_c + \bar{V}_d =$$

$$= (80 + j0) - (0 + j60) - (20 + j20) + (-60 + j80) =$$

$$= 0$$

La somma dei valori efficaci è:

$$V_a - V_b - V_c + V_d = 80 - 60 - 28,2 + 100 = 91,8 \neq 0$$



Struttura delle equazioni fasoriali

Rete passiva adinamica
(regime stazionario)

$$\sum \pm V = 0$$

$$\sum \pm I = 0$$

$$V = R I$$

$$I = G V$$

Rete passiva simbolica
(regime sinusoidale)

$$\sum \pm \bar{V} = 0$$

$$\sum \pm \bar{I} = 0$$

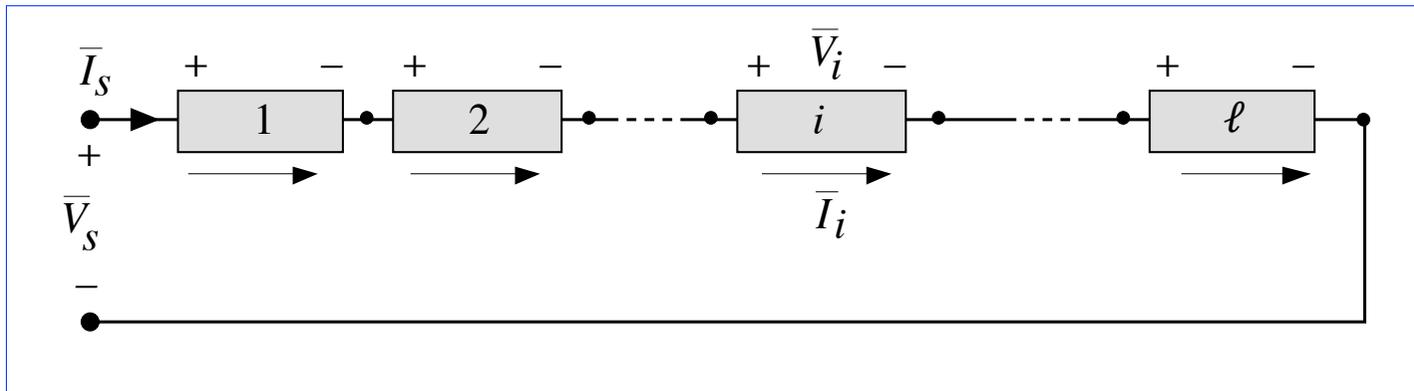
$$\bar{V} = \dot{Z} \bar{I}$$

$$\bar{I} = \dot{Y} \bar{V}$$

Sono due sistemi di equazioni lineari omogenee, il primo in campo reale e il secondo in complesso. Inoltre: l'algebra reale e l'algebra complessa presentano proprietà simili

→ È possibile estendere molte proprietà delle reti adinamiche alle reti fasoriali

Bipoli passivi in serie



Equazioni tipologiche: $\bar{V}_i = \dot{Z}_i \bar{I}_i \quad i = 1, \dots, l$

LKCS: $\bar{I}_i = \bar{I}_s \quad i = 1, \dots, l$

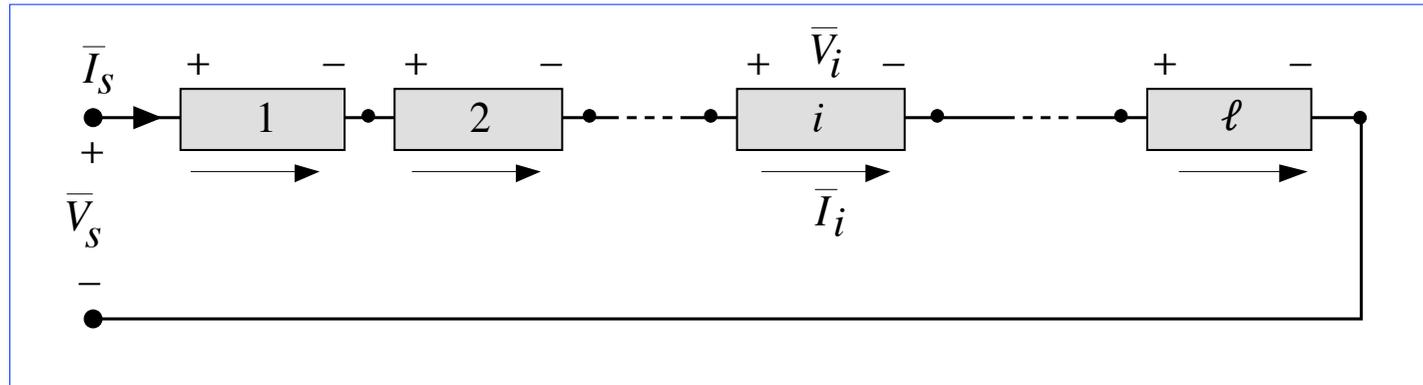
LKTS: $\bar{V}_s = \sum_{i=1}^l \bar{V}_i$

$$\rightarrow \bar{V}_s = \sum_{i=1}^l (\dot{Z}_i \bar{I}_i) = \left(\sum_{i=1}^l \dot{Z}_i \right) \bar{I}_s = \dot{Z}_s \bar{I}_s$$

\rightarrow la serie equivale ad un bipolo passivo di impedenza $\dot{Z}_s = \sum_{i=1}^l \dot{Z}_i$

Bipoli passivi in serie

$$\bar{V}_s = \dot{Z}_s \bar{I}_s$$



Impedenza equivalente:

$$\dot{Z}_s = \sum_{i=1}^{\ell} \dot{Z}_i = \left(\sum_{i=1}^{\ell} Z_{i\Re} \right) + j \left(\sum_{i=1}^{\ell} Z_{i\Im} \right) = Z_{s\Re} + jZ_{s\Im}$$

Ammettenza equivalente:

$$\dot{Y}_s = \frac{1}{\dot{Z}_s} = \frac{1}{Z_{s\Re} + jZ_{s\Im}} = \frac{Z_{s\Re}}{Z_{s\Re}^2 + Z_{s\Im}^2} + j \frac{-Z_{s\Im}}{Z_{s\Re}^2 + Z_{s\Im}^2} = Y_{s\Re} + jY_{s\Im}$$

le somme vanno eseguite sui numeri complessi.

È proibito sommare i moduli di impedenze e ammettenze

Partitore di tensione simbolico

Tensione (fasoriale) del generico bipolo passivo della serie:

$$\bar{V}_k = \dot{Z}_k \bar{I}_k = \dot{Z}_k \bar{I}_s = \frac{\dot{Z}_k}{\dot{Z}_s} \bar{V}_s = \frac{\dot{Z}_k}{\sum_{i=1}^{\ell} \dot{Z}_i} \bar{V}_s = \dot{\rho}_v \bar{V}$$

$\dot{\rho}_v$ = rapporto di partizione in corrente simbolico

Se ne può estrarre il modulo → **partitore di tensione sui valori efficaci:**

$$V_k = \frac{Z_k}{Z_s} V_s = \frac{Z_k}{\left| \sum_{i=1}^{\ell} \dot{Z}_i \right|} V_s = \rho_v V_s$$

n.b.: prodotti e divisioni possono essere eseguiti sui moduli (perdendo le informazioni sugli argomenti = sulle relazioni di fase);

somme e sottrazioni non possono essere eseguite sui moduli

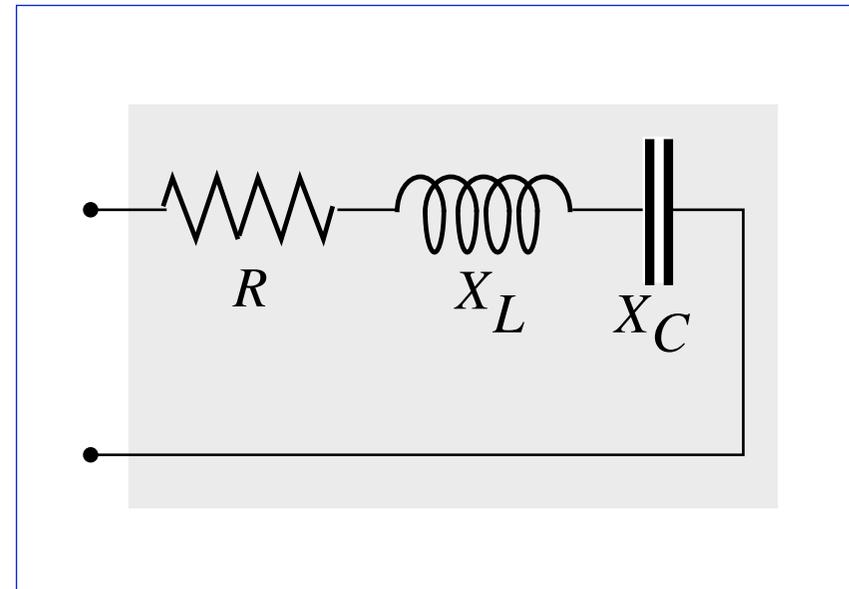
Esempio 1

$$\dot{Z}_R = R$$

$$\dot{Z}_L = jX_L$$

$$\dot{Z}_C = jX_C$$

$$\dot{Z}_s = R + j(X_L + X_C)$$



$$\dot{Y}_s = \frac{R}{R^2 + (X_L + X_C)^2} + j \frac{-(X_L + X_C)}{R^2 + (X_L + X_C)^2}$$

Esempio 2

$$\bar{E} = 100 + j0 \quad \omega = 500 \text{ rad/s}$$

$$R = 30 \, \Omega, \quad L = 80 \text{ mH}$$

Cosa indica V_1 ?

$$X_L = \omega L = 40 \, \Omega$$

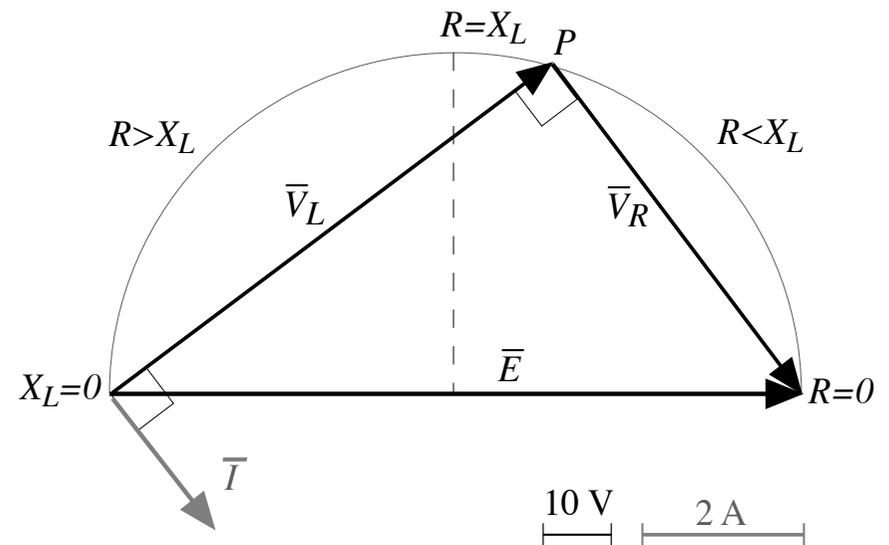
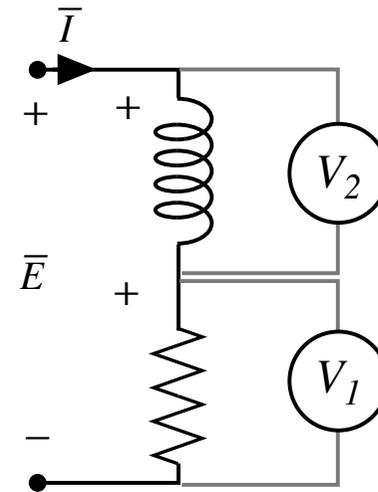
$$\dot{Z}_s = 30 + j40 \quad Z_s = 50 \, \Omega$$

$$V_1 = E \frac{R}{Z_s} = 100 \frac{30}{50} = 100 \cdot 0,6 = 60 \text{ V}$$

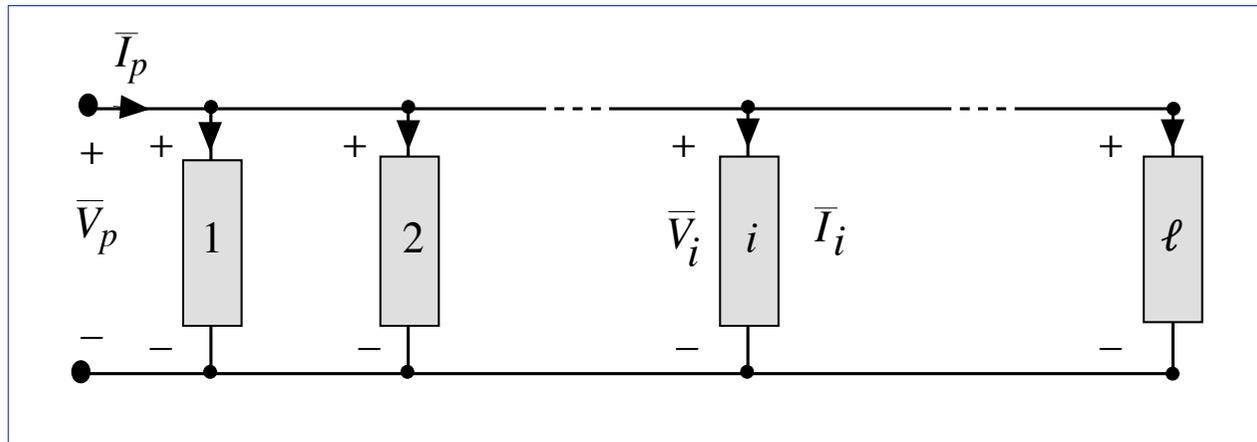
Cosa indica V_2 ?

$$V_2 = E \frac{X_L}{Z_s} = 100 \frac{40}{50} = 100 \cdot 0,8 = 80 \text{ V}$$

e non $E - V_1 = 100 - 60 = 40 \text{ V}$



Bipoli passivi in parallelo



Equazioni tipologiche: $\bar{I}_i = \dot{Y}_i \bar{V}_i \quad i = 1, \dots, l$

LKTS: $\bar{V}_i = \bar{V}_p \quad i = 1, \dots, l$

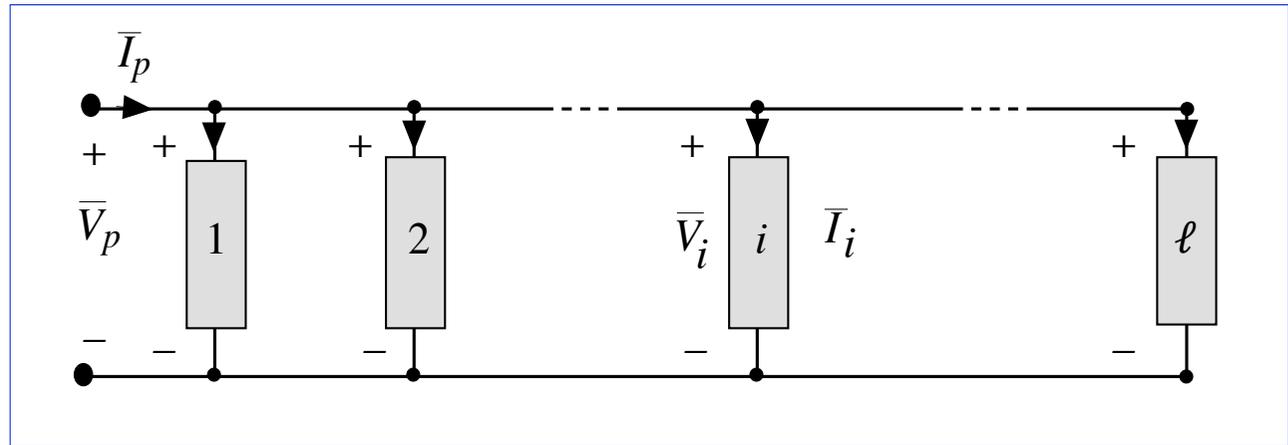
LKCS: $\bar{I}_p = \sum_{i=1}^l \bar{I}_i$

$\rightarrow \bar{I}_p = \sum_{i=1}^l (\dot{Y}_i \bar{V}_i) = \left(\sum_{i=1}^l \dot{Y}_i \right) \bar{V}_p = \dot{Y}_p \bar{V}_p$

\rightarrow Il parallelo equivale ad un bipolo passivo di ammettenza $\dot{Y}_p = \sum_{i=1}^l \dot{Y}_i$

Bipoli passivi in parallelo

$$\bar{I}_p = \dot{Y}_p \bar{V}_p$$



Ammetenza equivalente:

$$\dot{Y}_p = \sum_{i=1}^{\ell} \dot{Y}_i = \left(\sum_{i=1}^{\ell} Y_{i\Re} \right) + j \left(\sum_{i=1}^{\ell} Y_{i\Im} \right) = Y_{p\Re} + jY_{p\Im}$$

Impedenza equivalente:

$$\dot{Z}_p = \frac{1}{Y_{p\Re} + jY_{p\Im}} = \frac{Y_{p\Re}}{Y_{p\Re}^2 + Y_{p\Im}^2} + j \frac{-Y_{p\Im}}{Y_{p\Re}^2 + Y_{p\Im}^2} = Z_{p\Re} + jZ_{p\Im}$$

le somme vanno eseguite sui numeri complessi.

È proibito sommare i moduli di ammettenze e impedenze

Partitore di corrente simbolico

Corrente (fasoriale) del generico bipolo passivo del parallelo:

$$\bar{I}_k = \dot{Y}_k \bar{V}_k = \dot{Y}_k \bar{V}_p = \frac{\dot{Y}_k}{\dot{Y}_p} \bar{I}_p = \frac{\dot{Y}_k}{\sum_{i=1}^{\ell} \dot{Y}_i} \bar{I}_p = \dot{\rho}_i \bar{I}_p$$

$\dot{\rho}_i$ = rapporto di partizione in corrente simbolico

Se ne può estrarre il modulo → **partitore di corrente sui valori efficaci:**

$$I_k = \frac{Y_k}{Y_p} I_p = \frac{Y_k}{\left| \sum_{i=1}^{\ell} \dot{Y}_i \right|} I_p = \rho_i I_p$$

n.b.: prodotti e divisioni possono essere eseguiti sui moduli (perdendo le informazioni sugli argomenti = sulle relazioni di fase);

somme e sottrazioni non possono essere eseguite sui moduli

Esempio

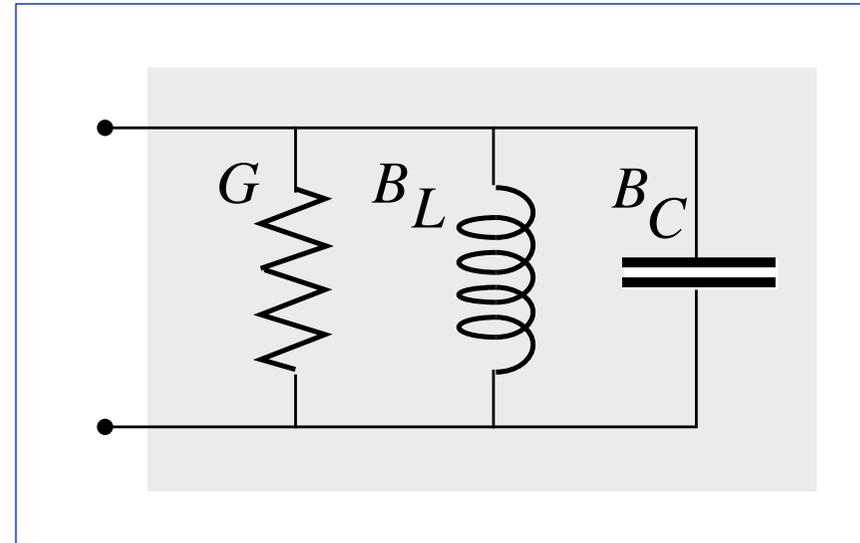
$$\dot{Y}_R = G$$

$$\dot{Y}_L = jB_L$$

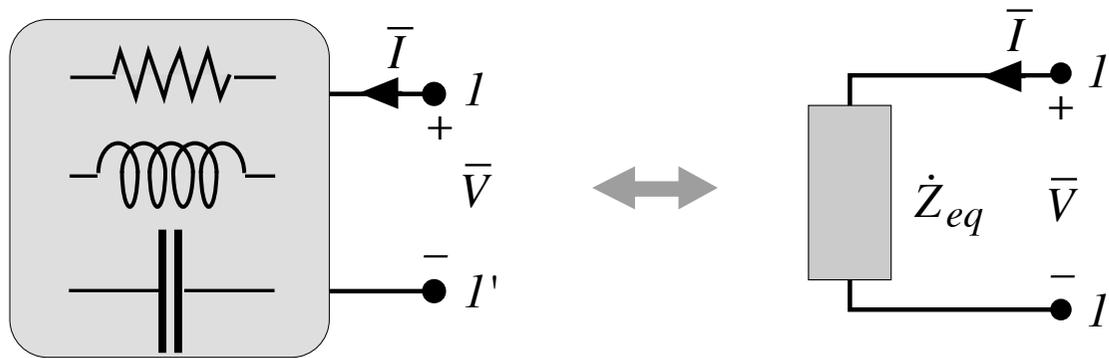
$$\dot{Y}_C = jB_C$$

$$\dot{Y}_p = G + j(B_L + B_C)$$

$$\dot{Z}_p = \frac{G}{G^2 + (B_L + B_C)^2} + j \frac{-(B_L + B_C)}{G^2 + (B_L + B_C)^2}$$



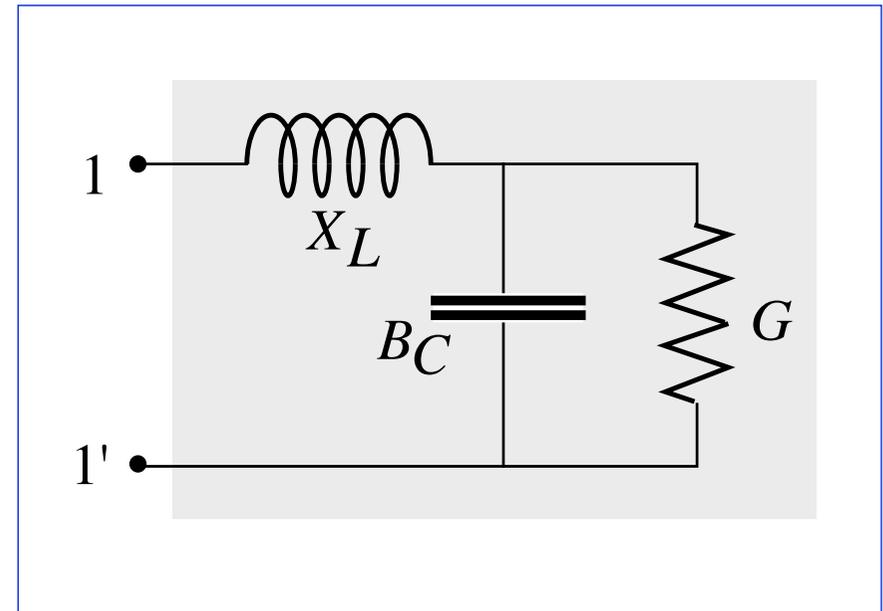
Reti di bipoli passivi



Per una rete generica di bipoli passivi accessibile ad una porta è possibile determinare l'impedenza e l'ammettenza equivalente ai morsetti 11'.

Generalmente tramite riduzione serie-parallelo

Esempio



$$\dot{Z}_{R//C} = \frac{G}{G^2 + B_C^2} - j \frac{B_C}{G^2 + B_C^2}$$

$$\dot{Z}_{eq} = \frac{G}{G^2 + B_C^2} + j \left(X_L - \frac{B_C}{G^2 + B_C^2} \right)$$

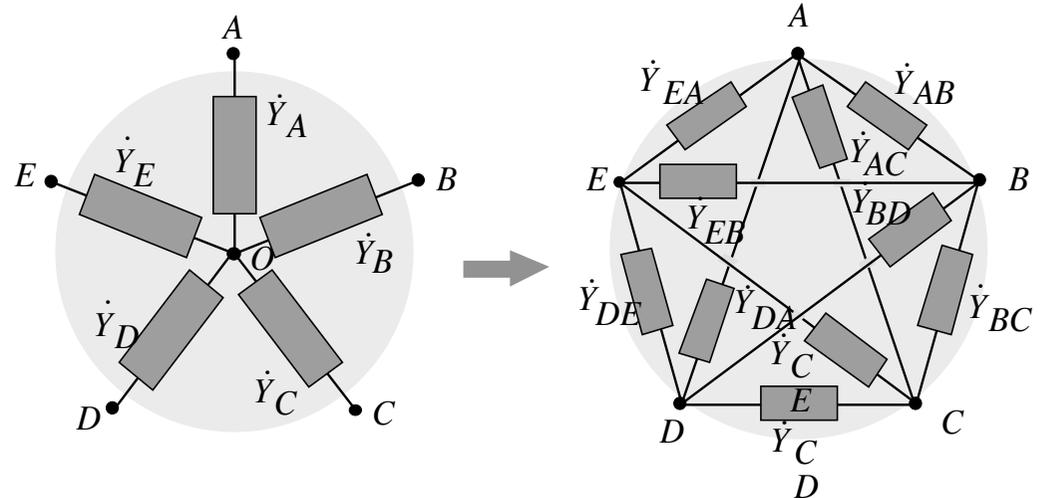
$$\dot{Y}_{eq} = \frac{G}{1 - 2B_C X_L + X_L^2 G^2 + X_L^2 B_C^2} + j \frac{B_C - G^2 X_L - B_C^2 X_L}{1 - 2B_C X_L + X_L^2 G^2 + X_L^2 B_C^2}$$

Stelle e poligoni

Se si presentino poligoni e stelle di impedenze/ammettenze si possono applicare trasformazioni simili a quelle dei resistori

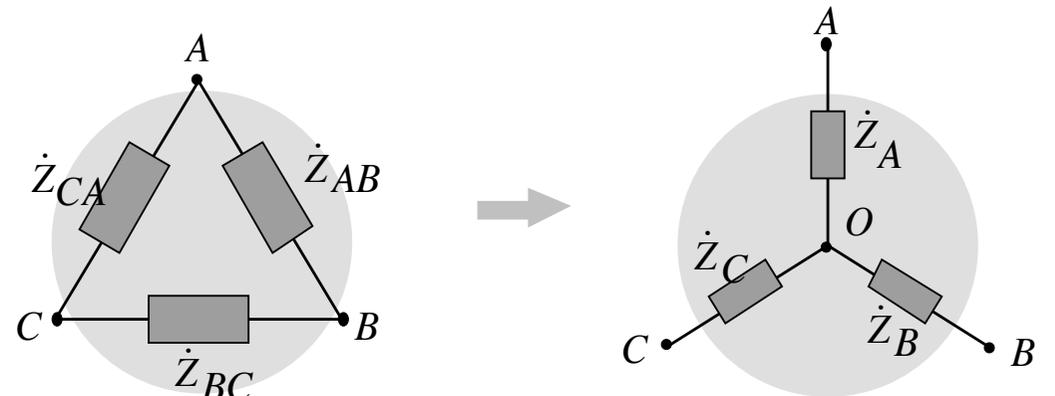
Stella \rightarrow poligono

$$\dot{Y}_{hk} = \frac{\dot{Y}_h \dot{Y}_k}{\sum_{i=1}^n \dot{Y}_i} \Rightarrow \dot{Z}_{hk} = \dot{Z}_h \dot{Z}_k \sum_{i=1}^n \frac{1}{\dot{Z}_i}$$



Triangolo \rightarrow stella

$$\dot{Z}_h = \frac{\dot{Z}_{hi} \dot{Z}_{hj}}{\sum_{i,j=1}^3 \dot{Z}_{ij}}$$



Se le tre impedenze sono uguali:

$$\dot{Z}_{\Delta} = 3\dot{Z}_Y$$

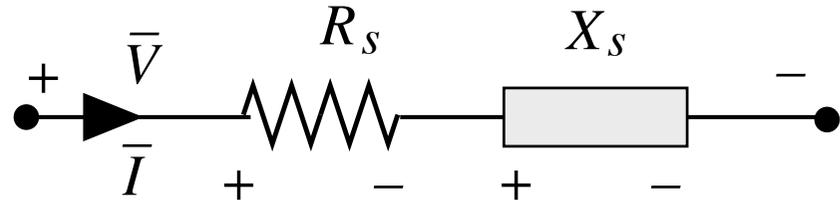
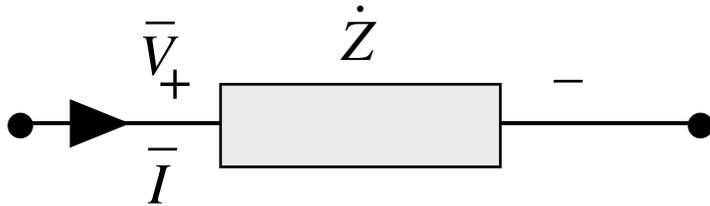
Sintesi di un bipolo passivo

Un bipolo passivo che si trova in regime sinusoidale può essere realizzato in modo molto complesso, per dare luogo ad una ben precisa impedenza o ammettenza.

Torna comunque comodo rappresentarlo tramite due bipoli ideali elementari, di tipo resistivo e reattivo, connessi in serie o in parallelo.

Farne la sintesi significa determinare il valore di questi due bipoli ideali elementari.

Sintesi serie



Dall'impedenza nota del bipolo:

$$\bar{V} = \dot{Z} \bar{I} = (Z \cos \varphi + j Z \sin \varphi) \bar{I} = (Z_{\Re} + j Z_{\Im}) \bar{I} = Z_{\Re} \bar{I} + j Z_{\Im} \bar{I}$$

serie equivalente (di sintesi) da identificare:

$$\bar{V} = R_s \bar{I} + j X_s \bar{I}$$

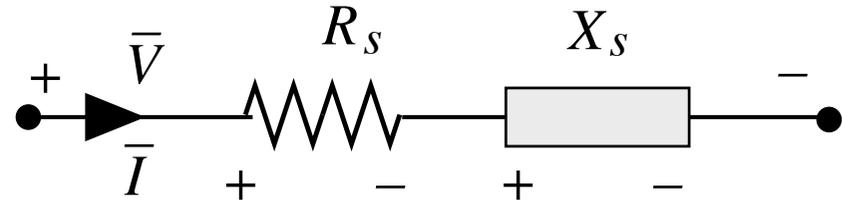
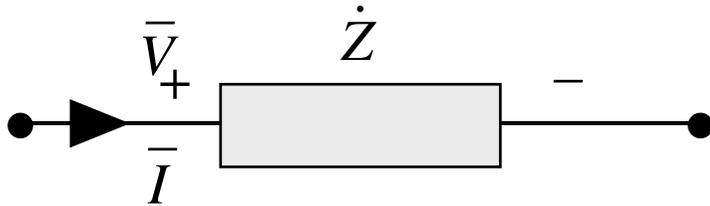
uguagliando parti reali e immaginarie

n.b.: $X_s > 0$: reattanza induttiva

$X_s < 0$: reattanza capacitiva

$$\left\{ \begin{array}{l} R_s = Z_{\Re} = Z \cos \varphi \\ X_s = Z_{\Im} = Z \sin \varphi \end{array} \right.$$

Sintesi serie

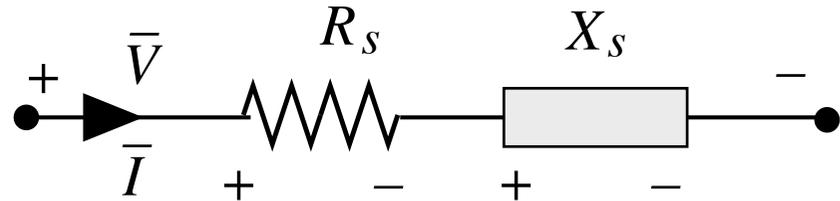
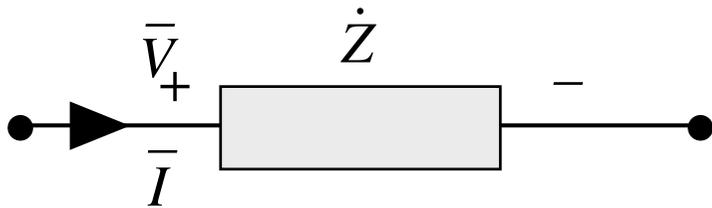


Potenze:

Potenza attiva $P = Z_{\Re} I^2 = R_s I^2$

Potenza reattiva $Q = Z_{\Im} I^2 = X_s I^2$

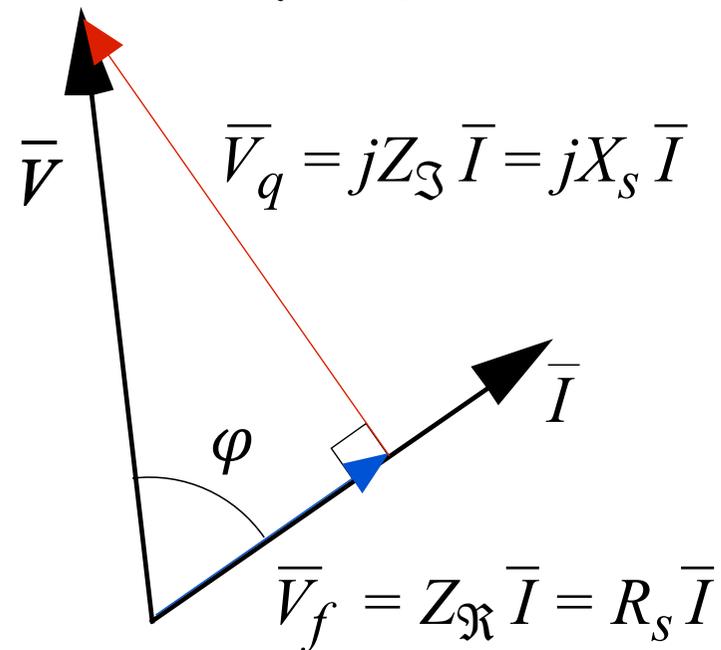
Sintesi serie



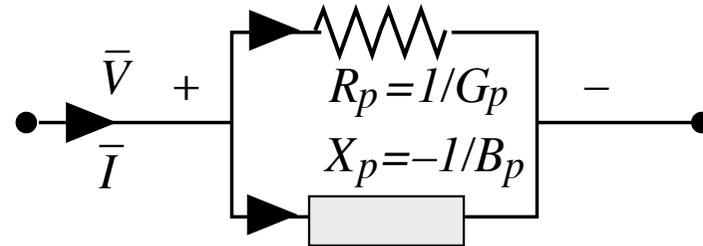
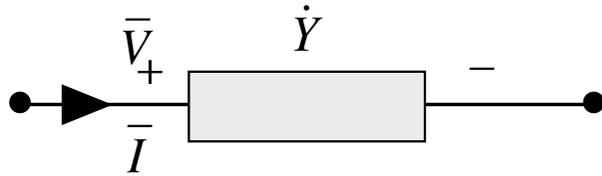
impedenza ohmico-induttiva

$$Z_{\mathcal{S}} = X_s > 0$$

Diagramma fasoriale:
scomposizione della tensione
totale in due addendi,
uno in fase e
uno in quadratura
con la corrente



Sintesi parallelo



Dall'ammettenza nota del bipolo:

$$\bar{I} = \dot{Y} \bar{V} = (Y \cos \varphi' + j Y \sin \varphi') \bar{V} = (Y_{\Re} + j Y_{\Im}) \bar{V} = Y_{\Re} \bar{V} + j Y_{\Im} \bar{V}$$

parallelo equivalente (di sintesi)
da identificare:

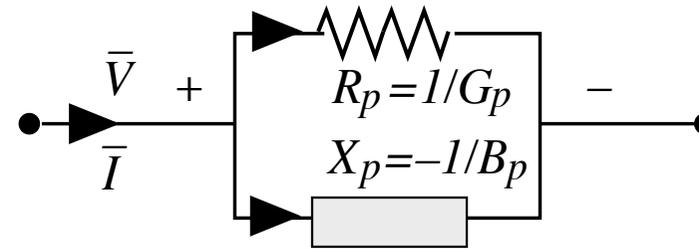
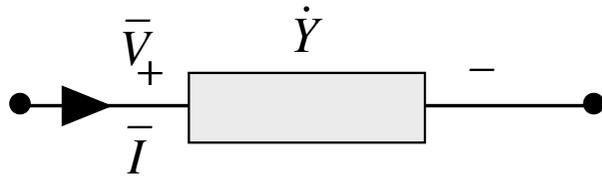
$$\bar{I} = G_p \bar{V} + j B_p \bar{V} = \frac{\bar{V}}{R_p} - j \frac{\bar{V}}{X_p}$$

uguagliando parti reali
e immaginarie

$$\left\{ \begin{array}{l} G_p = Y \cos \varphi' = \frac{\cos \varphi}{Z} \\ B_p = Y \sin \varphi' = \frac{-\sin \varphi}{Z} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} R_p = \frac{Z}{\cos \varphi} \\ X_p = \frac{Z}{\sin \varphi} \end{array} \right.$$

n.b.: $Y_p < 0$: suscettanza induttiva
 $Y_p > 0$: suscettanza capacitiva

Sintesi parallelo



Potenze:

Potenza attiva

$$P = Y_{\Re} V^2 = \frac{V^2}{R_p}$$

Potenza reattiva

$$Q = -Y_{\Im} V^2 = \frac{V^2}{X_p}$$

Sintesi parallelo

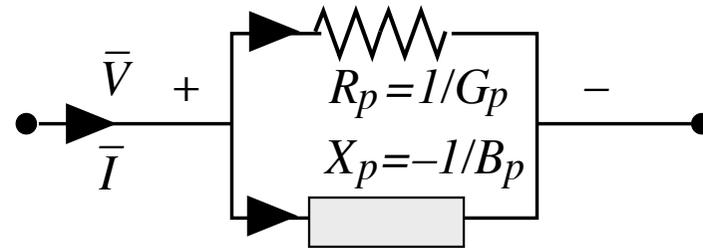
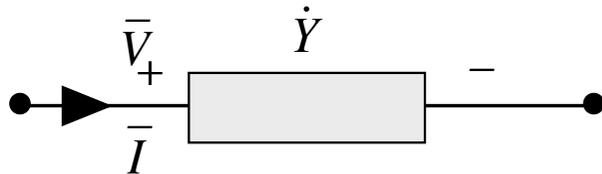
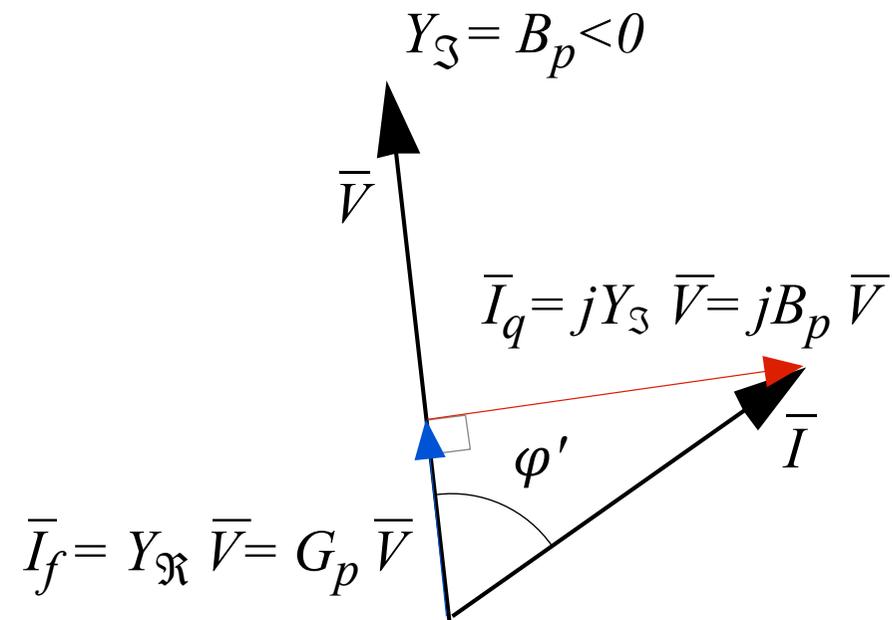


Diagramma fasoriale:
 scomposizione della corrente
 totale in due addendi,
 uno in fase e
 uno in quadratura
 con la tensione

ammettenza ohmico-induttiva



Risposta in frequenza e risonanza

Impedenze ed ammettenze di bipoli passivi dipendono dalla pulsazione $\omega = 2\pi f$ tramite reattanze e suscettanze. Questa dipendenza è evidenziata da specifiche analisi.

Risposta in frequenza: comportamento di impedenze ed ammettenze, in particolare modulo e argomento, per i possibili valori di ω tra i limiti inferiore (0) e superiore (∞)

Risonanza: presenza di massimi e minimi del modulo e di valori notevoli ($0, \pm \pi/2$) dell'argomento.

Si verificano in molte configurazioni di bipoli. Li verifichiamo in due casi fondamentali, $R-L-C$ serie e $R-L-C$ parallelo.

Serie RLC – risposta in frequenza

Impedenza:

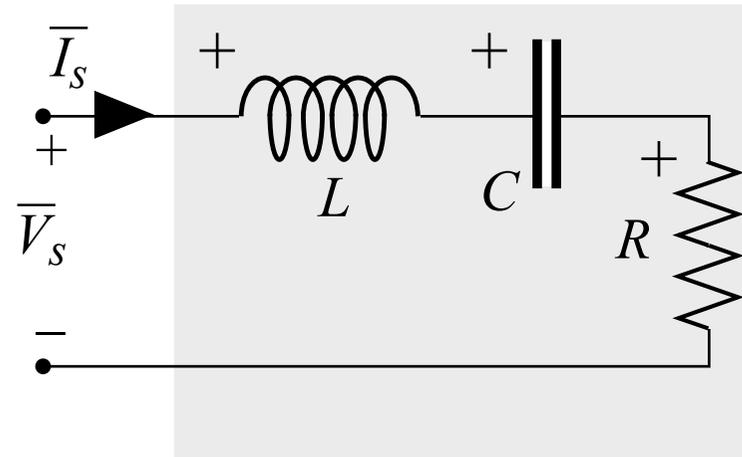
$$\dot{Z}_s(\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

modulo:

$$Z_s(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}\right)^2}$$

argomento:

$$\varphi_s(\omega) = \arctan \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega CR}$$



Serie RLC – risposta in frequenza

Impedenza:

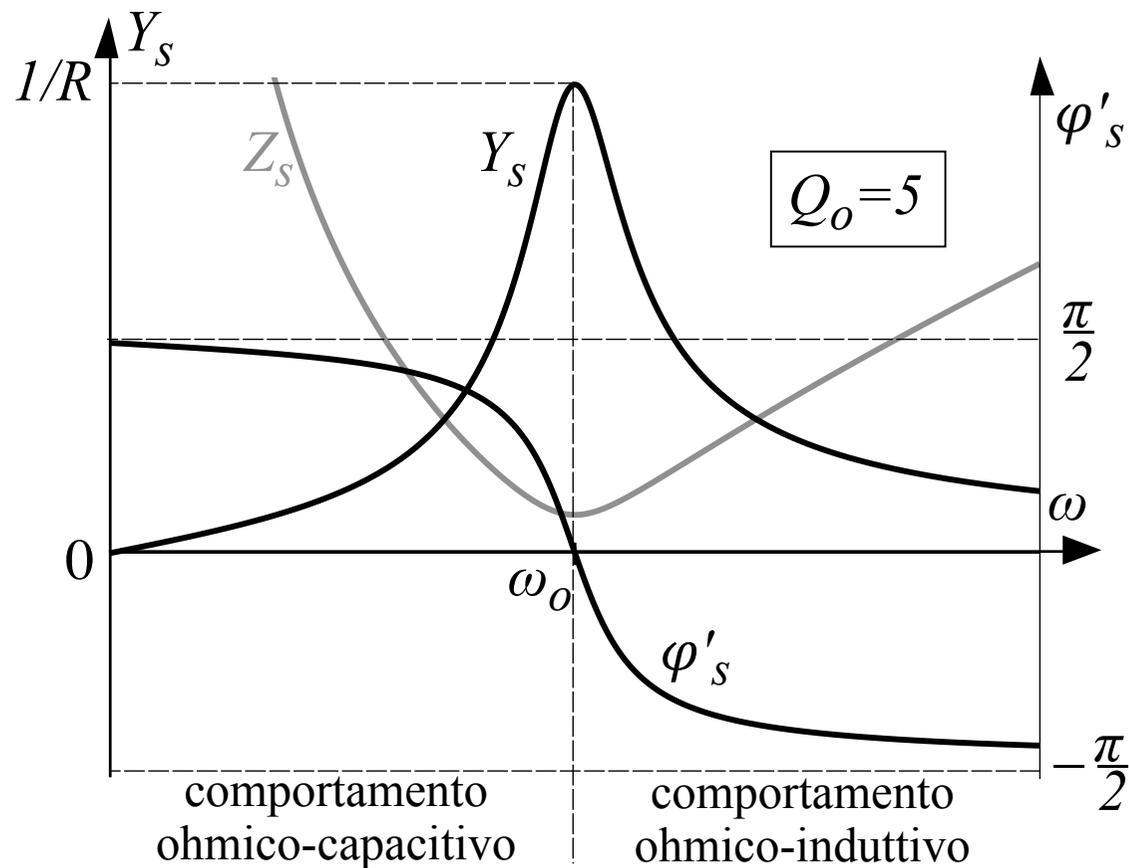
$$\dot{Z}_s(\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

modulo:

$$Z_s(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}\right)^2}$$

argomento:

$$\varphi_s(\omega) = \arctan \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega CR}$$



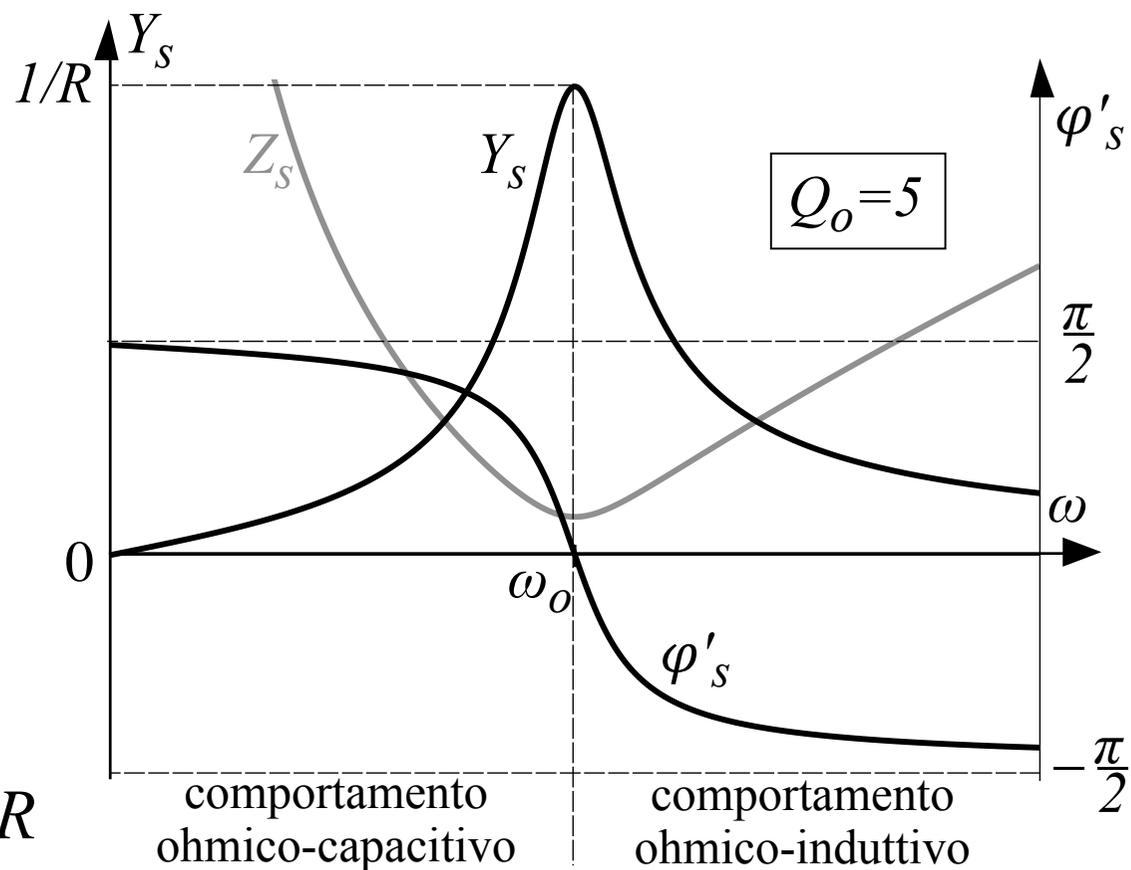
Serie RLC – risposta in frequenza

$$Y_s(\omega) = \left(\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C} \right)^2} \right)^{-1}$$

$$\varphi_s'(\omega) = \arctan \frac{1 - \omega^2 LC}{\omega CR}$$

Pulsazione di risonanza

$$\omega_o \triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \dot{Z}_s(\omega_o) = R$$



Serie RLC – risposta in frequenza

Pulsazione di risonanza

$$\omega_o \triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

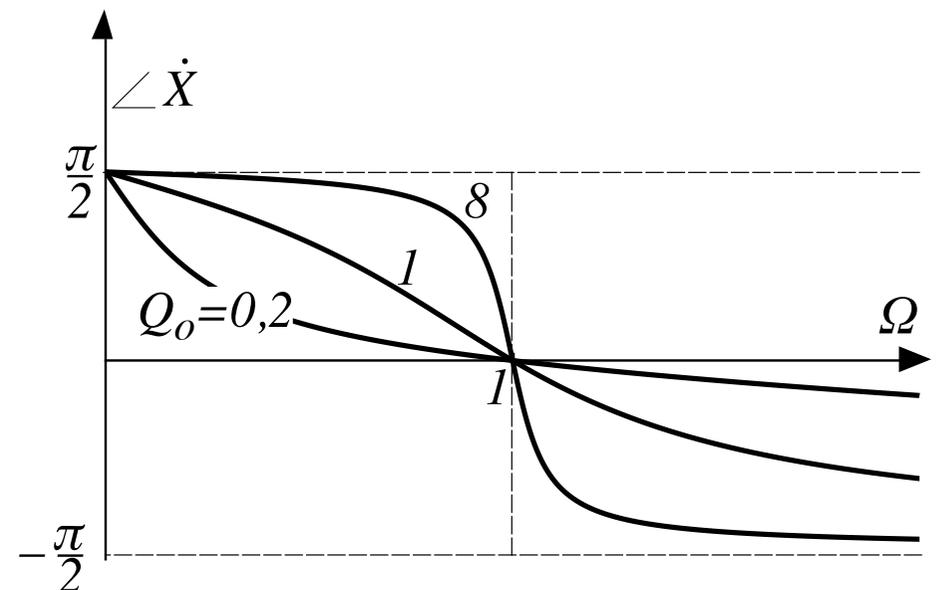
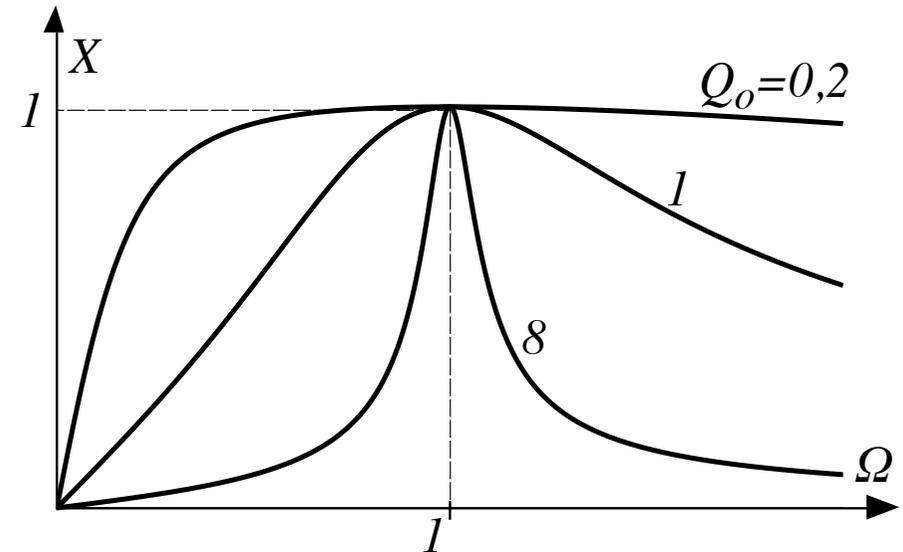
Fattore di merito

$$Q_o \triangleq \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega_o L}{R} = \frac{1}{\omega_o CR}$$

Posto $\Omega = \omega / \omega_o$

$$X(\Omega) = RY_s(\Omega) \text{ e } \angle \dot{X}(\Omega) = \varphi'_s(\Omega)$$

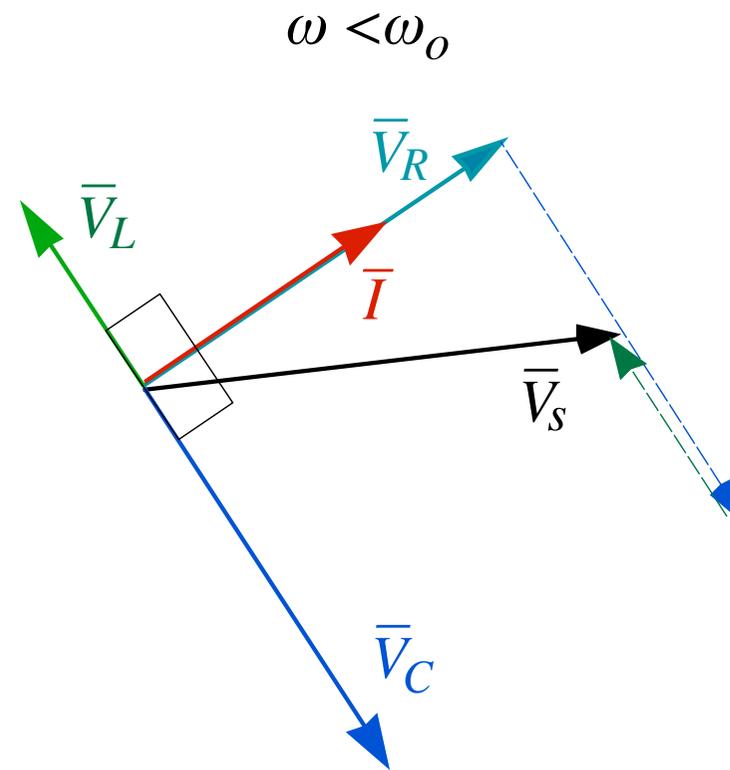
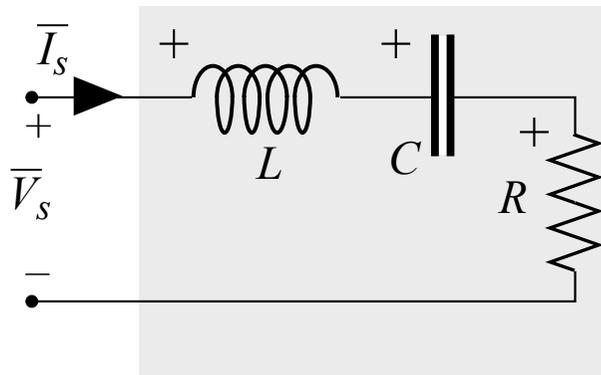
→ curve universali di risonanza



Serie RLC – diagrammi fasoriali

Diagrammi fasoriali

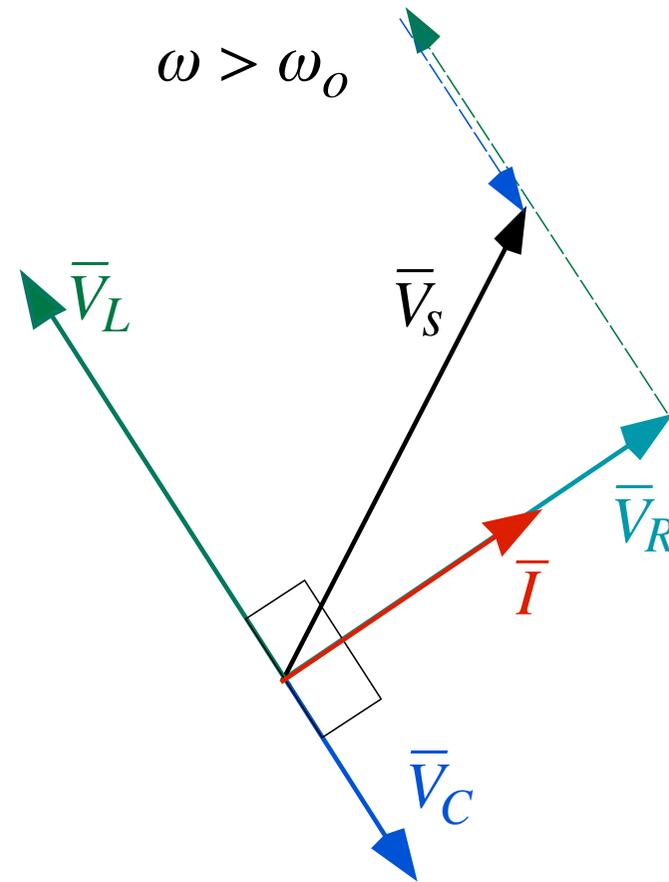
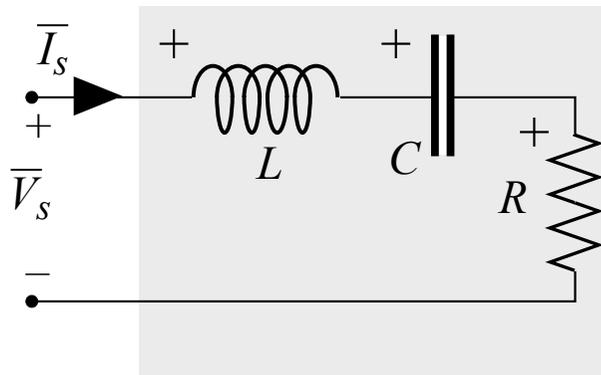
$$\bar{V}_S = \bar{V}_R + \bar{V}_L + \bar{V}_C = R\bar{I} + j\omega L\bar{I} - j\frac{1}{\omega C}\bar{I} = \dot{Z}_s(\omega)\bar{I}$$



Serie RLC – diagrammi fasoriali

Diagrammi fasoriali

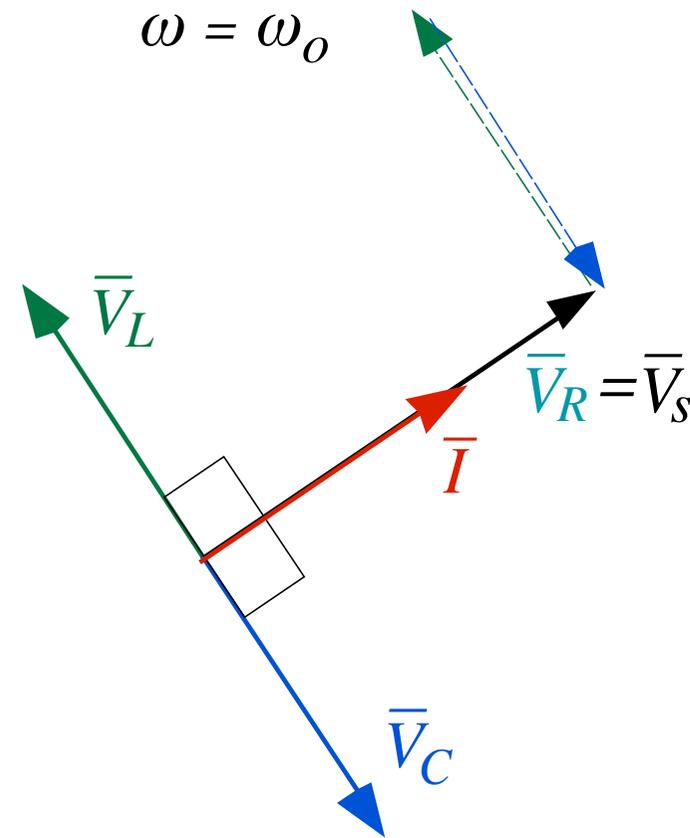
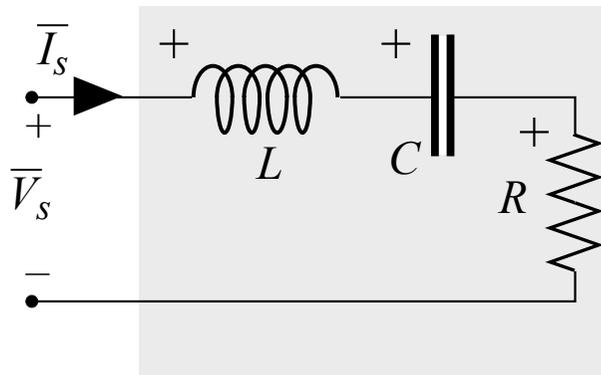
$$\bar{V}_S = \bar{V}_R + \bar{V}_L + \bar{V}_C = R\bar{I} + j\omega L\bar{I} - j\frac{1}{\omega C}\bar{I} = \dot{Z}_s(\omega)\bar{I}$$



Serie RLC – diagrammi fasoriali

Diagrammi fasoriali

$$\bar{V}_s = \bar{V}_R + \bar{V}_L + \bar{V}_C = R\bar{I} + j\omega_o L\bar{I} - j\frac{1}{\omega_o C}\bar{I} = \dot{Z}_s(\omega_o)\bar{I}$$

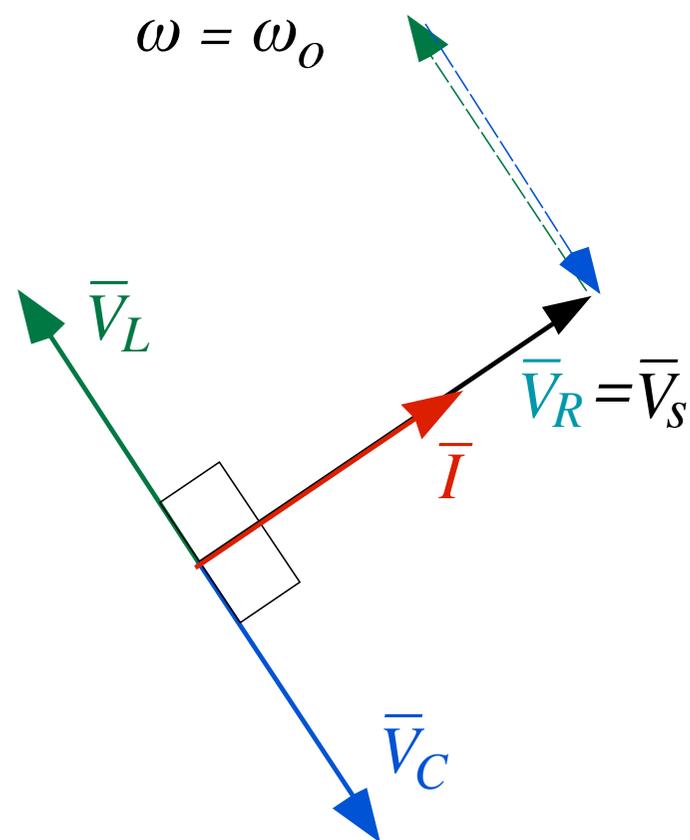
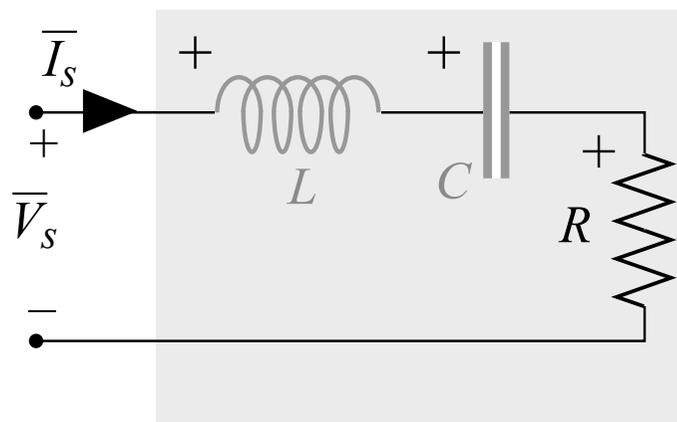


Serie RLC – funzionamento in risonanza

Per $\omega = \omega_0$ la serie di induttore e condensatore equivale ad un cortocircuito ($\omega_0 L - 1/\omega_0 C$) e l'intero circuito equivale al solo resistore, con tensione e corrente in fase:

$$\bar{V}_L = -\bar{V}_C$$

$$V_L = V_C$$

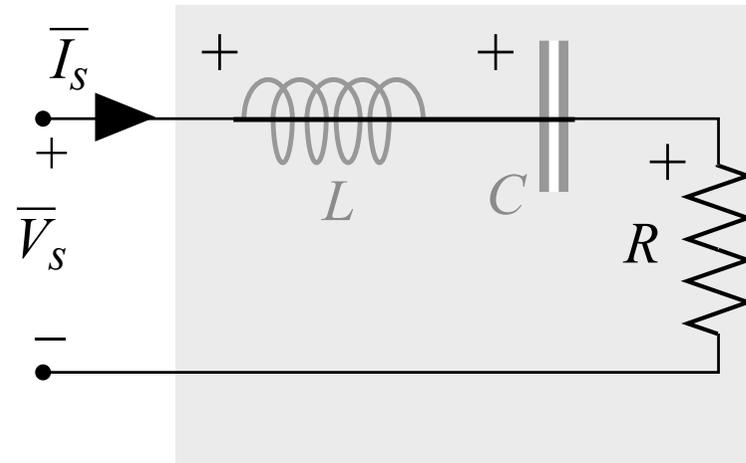


Serie RLC – funzionamento in risonanza

Tensione su L e C

$$Q_o = \frac{\omega_o L I}{R I} = \frac{V_L}{V_R} = \frac{V_L}{V_s} = \frac{V_C}{V_s}$$

$$\rightarrow V_C = V_L = Q_o V_s$$



Se $Q_o > 1$ si ottiene $V_C = V_L > V_s$, vale a dire l'amplificazione dei valori efficaci di tensione:

- utile nei sistemi di segnale
- pericolosa in quelli di potenza

n.b.: non viola il teorema di non amplificazione, che riguarda i valori istantanei e non i valori efficaci!

Serie RLC – funzionamento in risonanza

Potenze ed energie

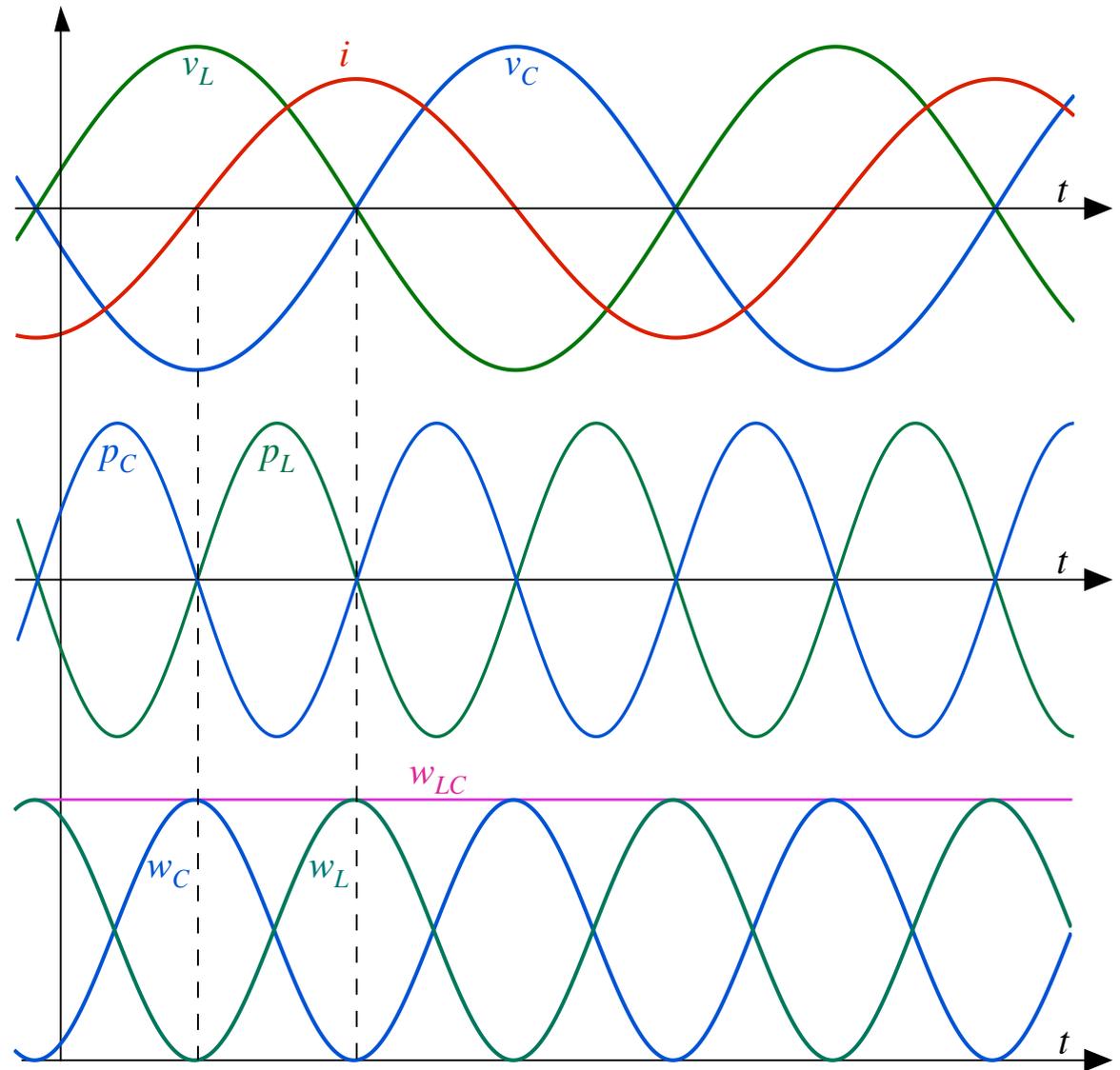
$$Q_L = \omega_o L I^2 = (1/\omega_o C) I^2 = -Q_C$$

$$v_{LC}(t) = v_L(t) + v_C(t) = 0$$

$$i_L(t) = i_C(t) = i(t)$$

$$p_L(t) + p_C(t) = 0$$

$$\begin{aligned} w_L(t) + w_C(t) &= Li^2/2 + Cv_C^2/2 = \\ &= \text{cost} = L I_M^2/2 \end{aligned}$$



Parallelo RLC – risposta in frequenza

Ammettenza:

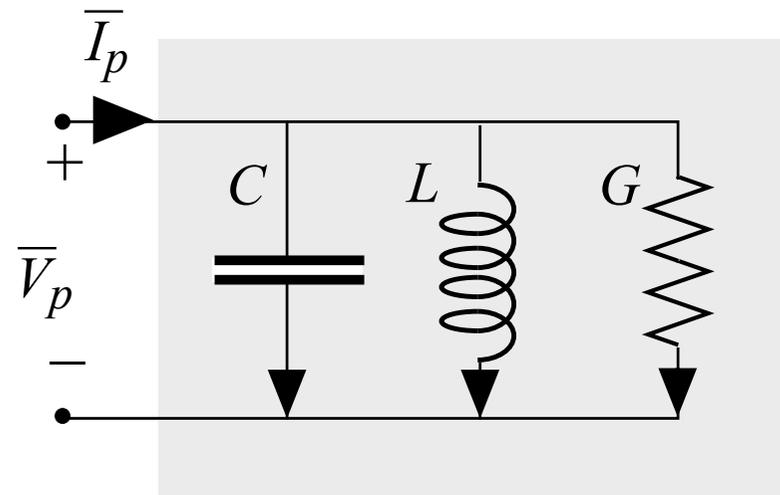
$$\dot{Y}_p(\omega) = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

modulo:

$$Y_p(\omega) = \sqrt{G^2 + \left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega L}\right)^2}$$

argomento:

$$\varphi'_p(\omega) = \arctan \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega LG}$$



Parallelo RLC – risposta in frequenza

Ammettenza:

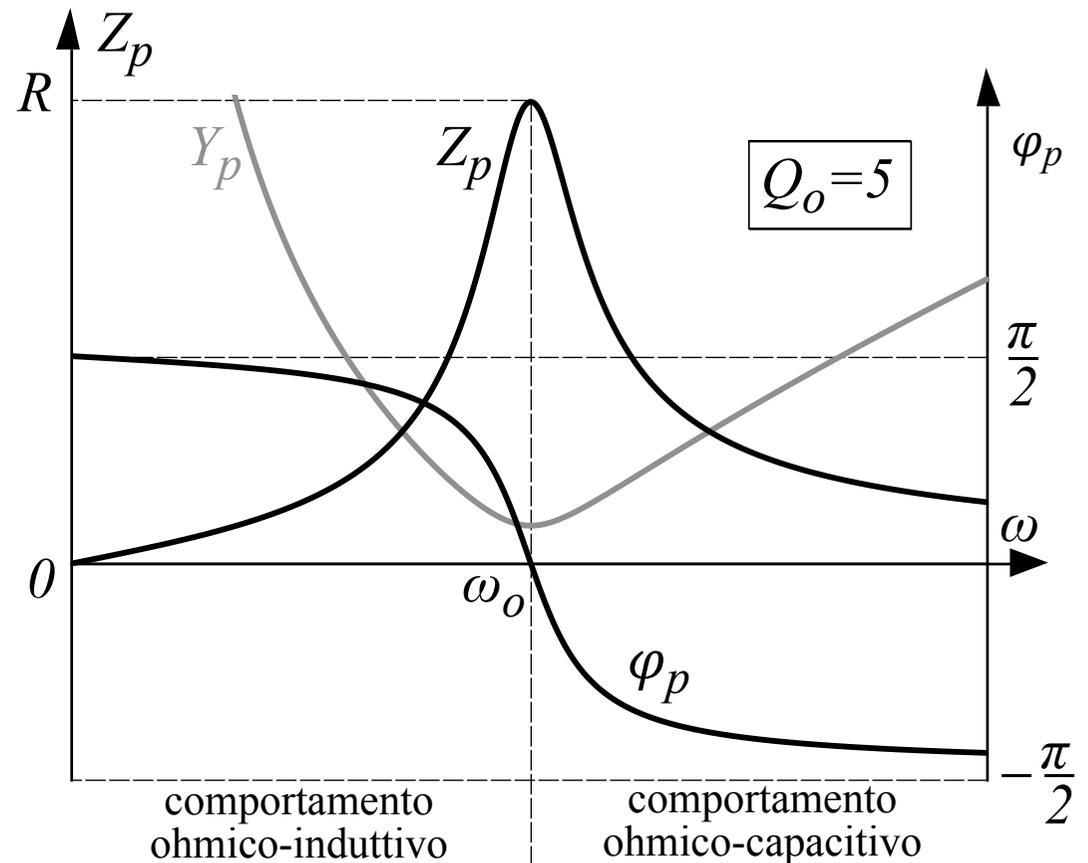
$$\dot{Y}_p(\omega) = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

modulo:

$$Y_p(\omega) = \sqrt{G^2 + \left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega L}\right)^2}$$

argomento:

$$\varphi'_p(\omega) = \arctan \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega LG}$$



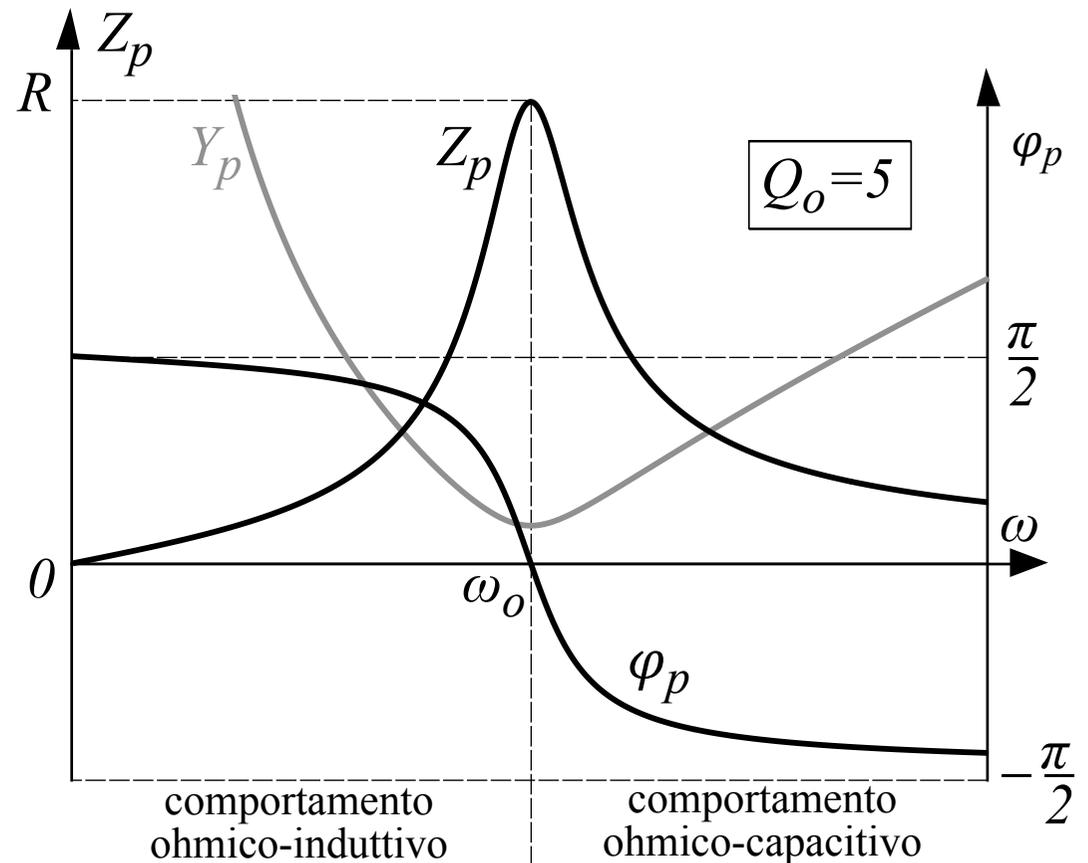
Parallelo RLC – risposta in frequenza

$$Z_p(\omega) = \left(\sqrt{G^2 + \left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega L} \right)^2} \right)^{-1}$$

$$\varphi_p(\omega) = \arctan \frac{1 - \omega^2 LC}{\omega LG}$$

Pulsazione di risonanza
(o antirisonanza)

$$\omega_o \triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \dot{Y}_p(\omega_o) = G$$



Parallelo RLC – risposta in frequenza

Pulsazione di risonanza (antirisonanza)

$$\omega_o \triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

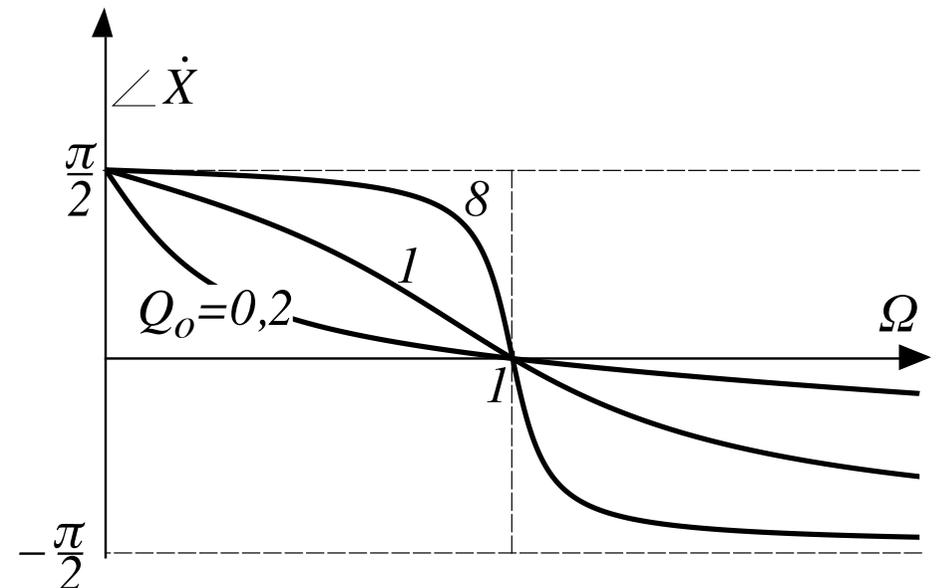
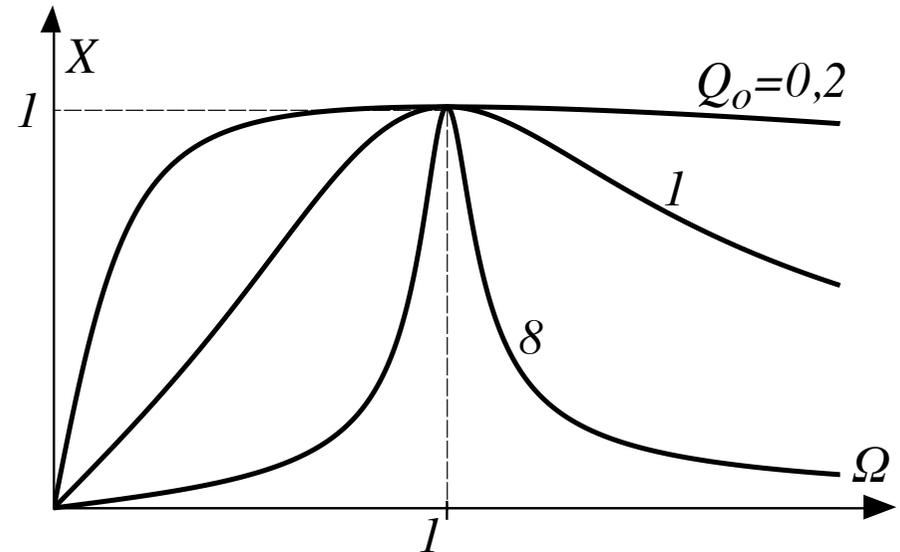
Fattore di merito

$$Q_o' \triangleq \frac{1}{G} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{\omega_o C}{G} = \frac{1}{\omega_o LG}$$

Posto $\Omega = \omega / \omega_o$

$$X(\Omega) = GZ_p(\Omega) \text{ e } \angle \dot{X}(\Omega) = \varphi_p(\Omega)$$

→ curve universali di risonanza

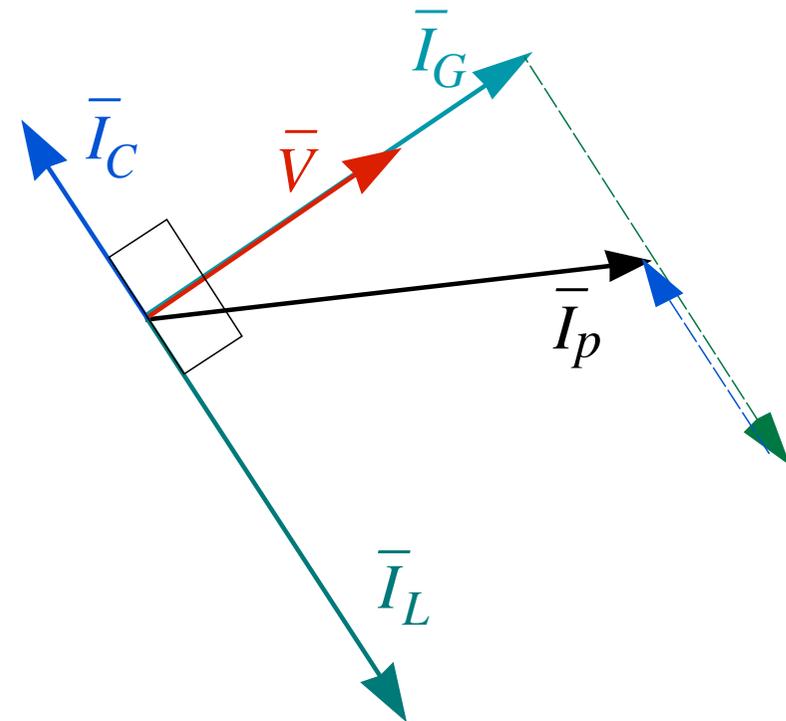
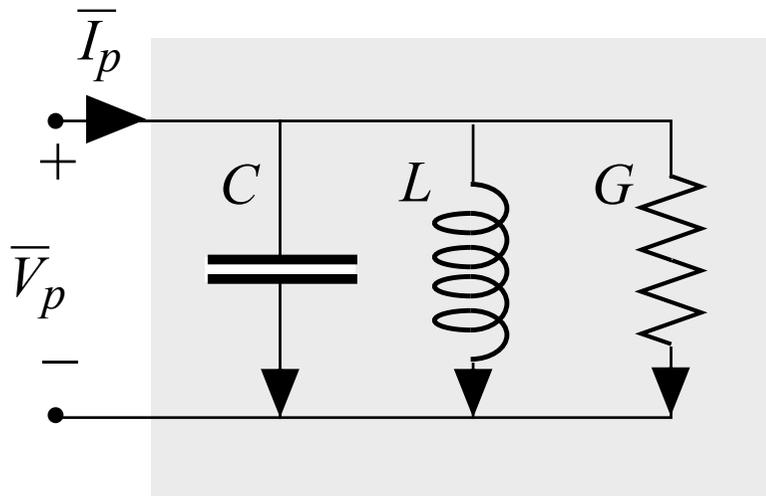


Parallelo RLC – diagrammi fasoriali

Diagrammi fasoriali

$$\bar{I}_p = \bar{I}_R + \bar{I}_L + \bar{I}_C = G\bar{V} + j\omega C\bar{V} - j\frac{1}{\omega L}\bar{V} = \dot{Y}_p(\omega)\bar{V}$$

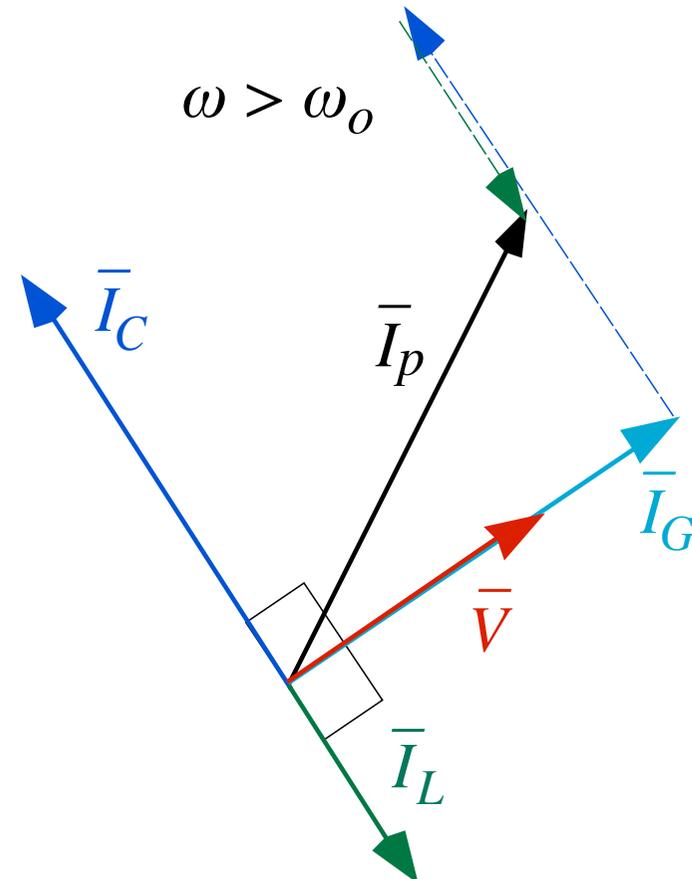
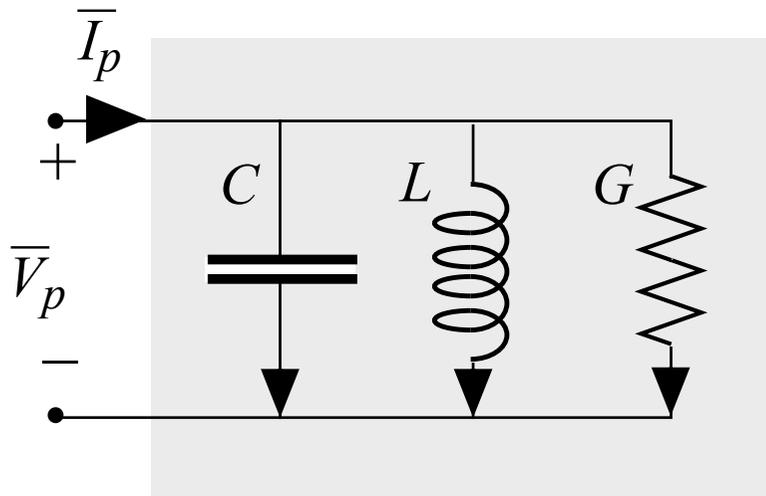
$$\omega < \omega_o$$



Parallelo RLC – diagrammi fasoriali

Diagrammi fasoriali

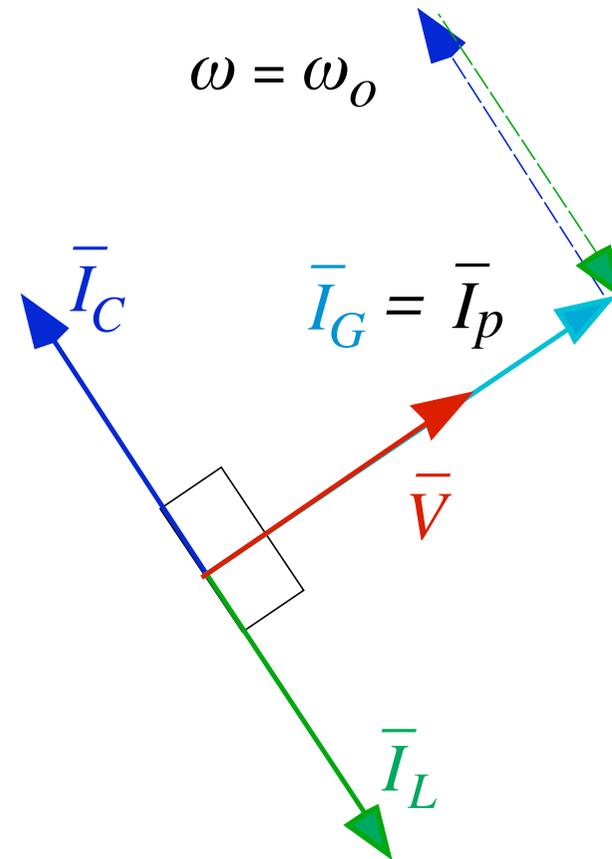
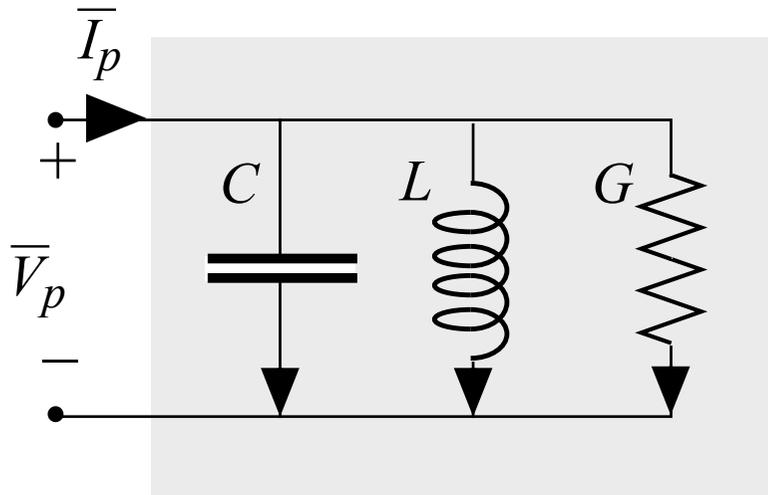
$$\bar{I}_p = \bar{I}_R + \bar{I}_L + \bar{I}_C = G\bar{V} + j\omega C\bar{V} - j\frac{1}{\omega L}\bar{V} = \dot{Y}_p(\omega)\bar{V}$$



Parallelo RLC – diagrammi fasoriali

Diagrammi fasoriali

$$\bar{I}_p = \bar{I}_R + \bar{I}_L + \bar{I}_C = G\bar{V} + j\omega_o C\bar{V} - j\frac{1}{\omega_o L}\bar{V} = \dot{Y}_p(\omega_o) \bar{V}$$

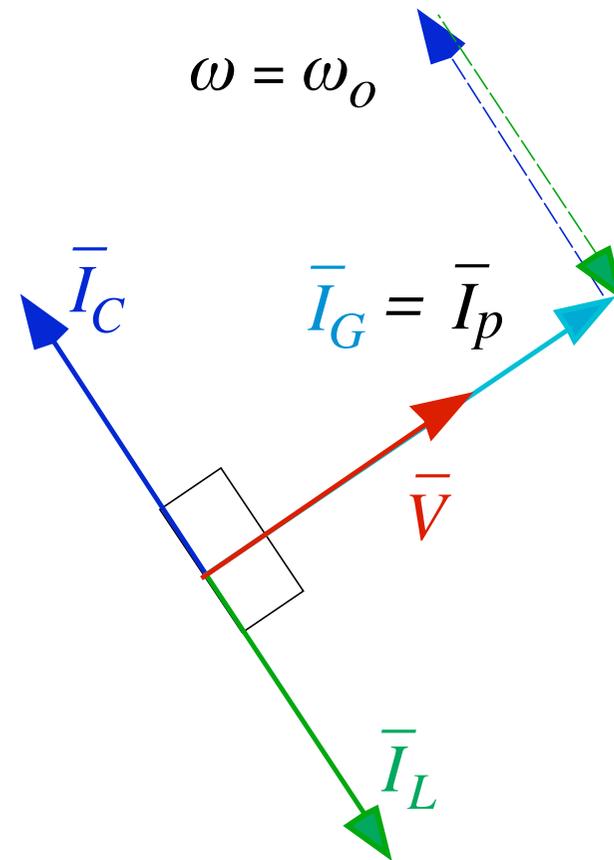
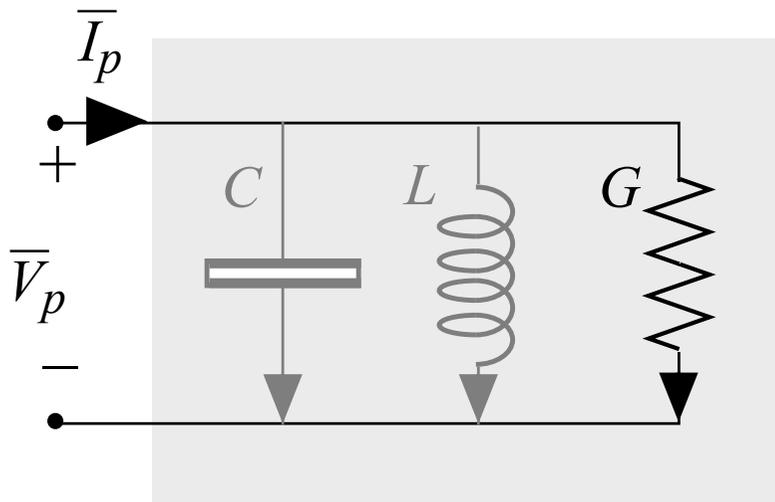


Parallelo RLC – funzionamento in risonanza

Per $\omega = \omega_0$ il parallelo di induttore e condensatore equivale ad un circuito aperto ($\omega_0 C - 1/\omega_0 L$) e l'intero circuito equivale al solo resistore, con tensione e corrente in fase:

$$\bar{I}_L = -\bar{I}_C$$

$$I_L = I_C$$

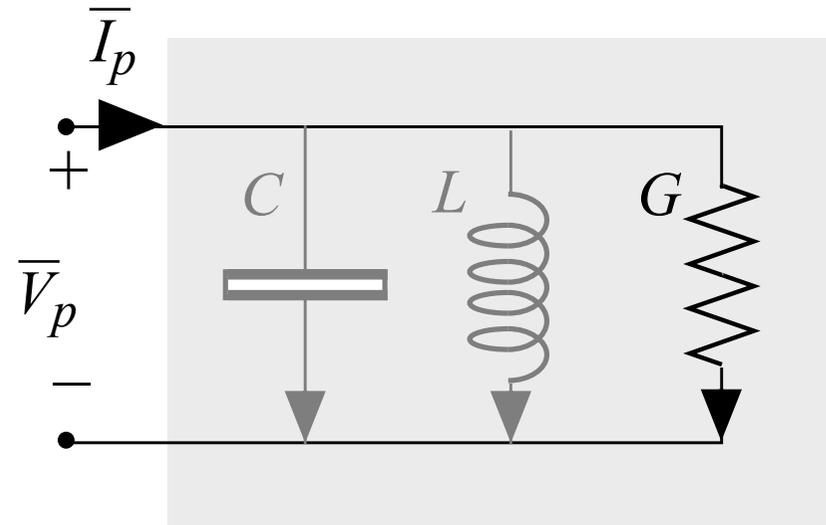


Parallelo RLC – funzionamento in risonanza

Corrente su L e C

$$Q_o' = \frac{\omega_o CV}{GV} = \frac{I_C}{I_G} = \frac{I_C}{I_p} = \frac{I_L}{I_p}$$

$$\rightarrow I_C = I_L = Q_o' I_p$$



Se $Q_o' > 1$ si ottiene $I_C = I_L > I_p$, vale a dire l'amplificazione dei valori efficaci di corrente:

- utile nei sistemi di segnale
- pericolosa in quelli di potenza

n.b.: non viola il teorema di non amplificazione, che riguarda i valori istantanei e non i valori efficaci!

Parallelo RLC – funzionamento in risonanza

Potenze ed energie

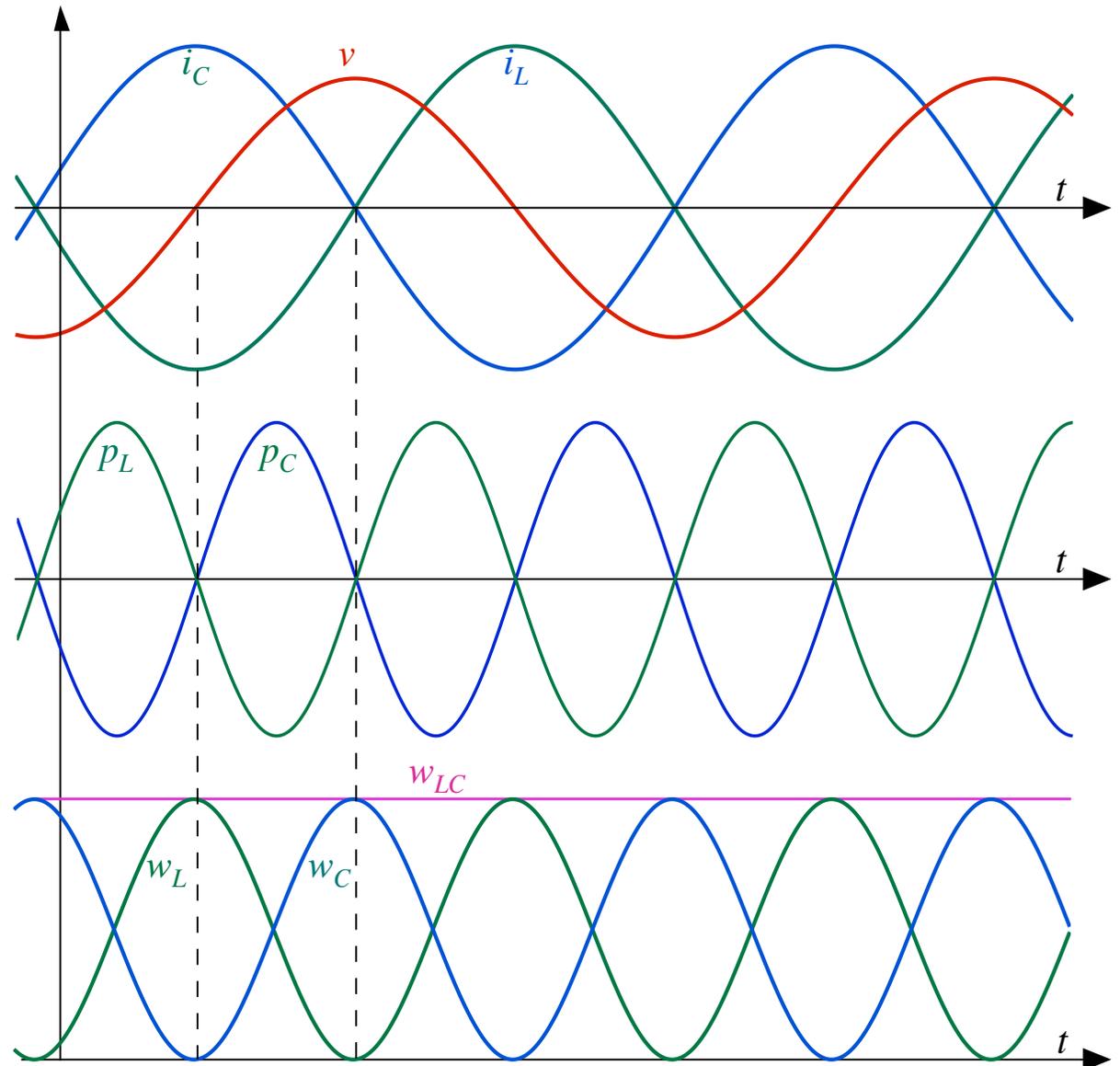
$$Q_L = V^2 / \omega_o L = V^2 \omega_o C = -Q_C$$

$$i_{LC}(t) = i_L(t) + i_C(t) = 0$$

$$v_L(t) = v_C(t) = v(t)$$

$$p_L(t) + p_C(t) = 0$$

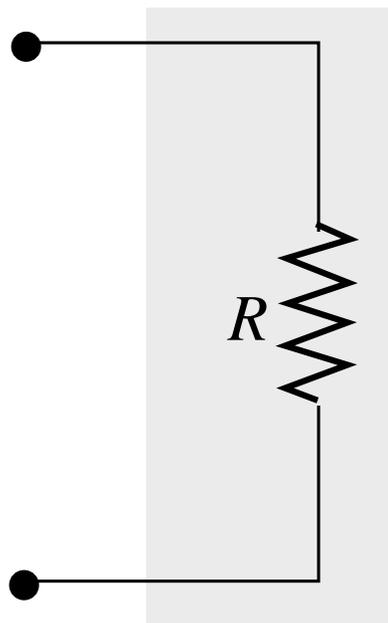
$$\begin{aligned} w_L(t) + w_C(t) &= Li^2/2 + Cv_C^2/2 = \\ &= \text{cost} = C V_M^2/2 \end{aligned}$$



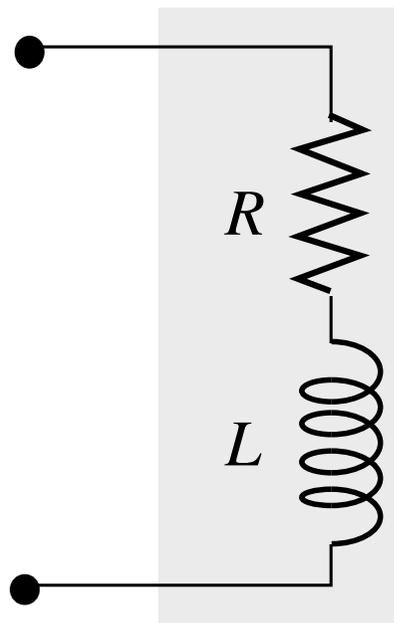
Comportamento in f di resistori

Effetti parassiti di cui si tiene con schemi comprendenti anche altri bipoli:

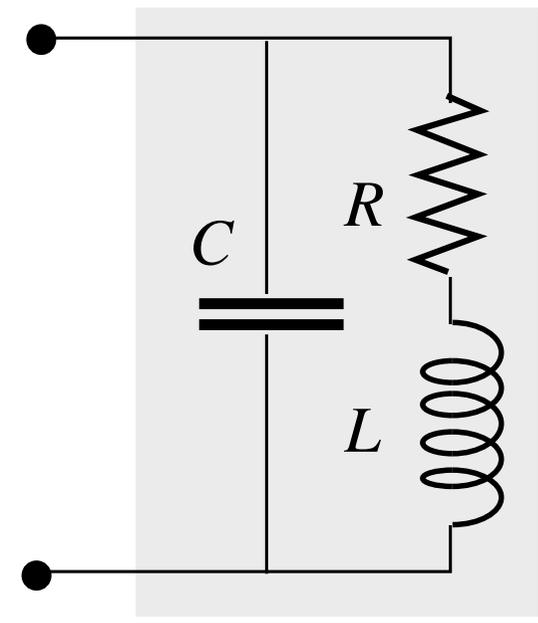
- induttivi (magnetici) a media f (quando ωL è confrontabile con R)
- capacitivi (dielettrici) ad alta f (quando ωC è confrontabile con G)



$$f < f_1$$



$$f_1 < f < f_2$$

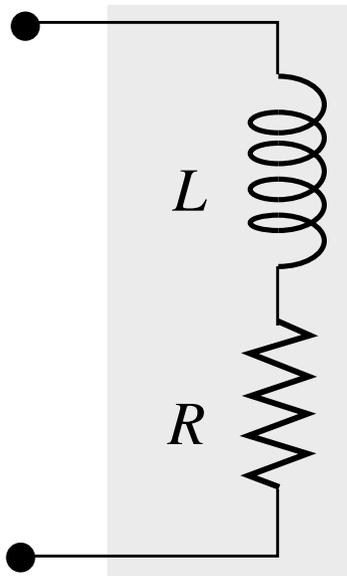


$$f > f_2$$

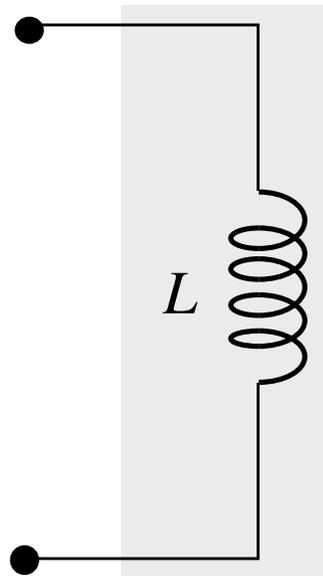
Comportamento in f di induttori

Effetti parassiti di cui si tiene conto con schemi comprendenti anche altri bipoli:

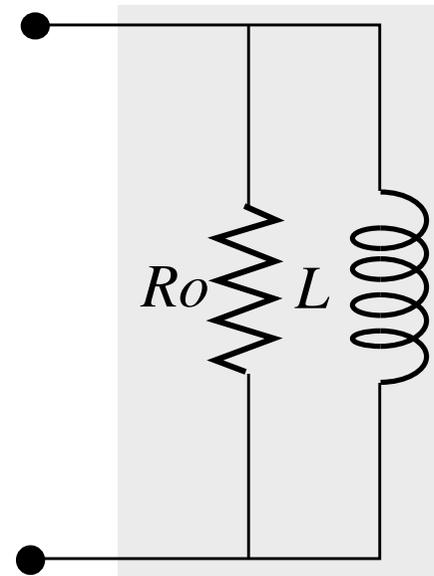
- resistivi a bassa f (nel dielettrico, quando R è confrontabile ωL)
- capacitivi (dielettrici) ad alta f (quando ωC è confrontabile con $1/\omega L$)
- effetti dissipativi nell'eventuale nucleo ferromagnetico (isteresi e correnti parassite)



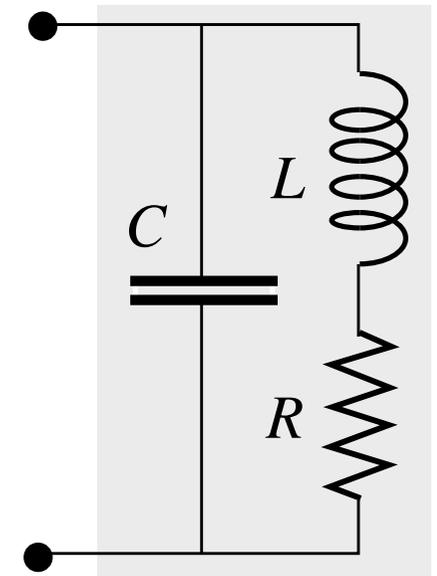
$$f < f_1$$



$$f_1 < f < f_2$$



$$f_1 < f < f_2$$

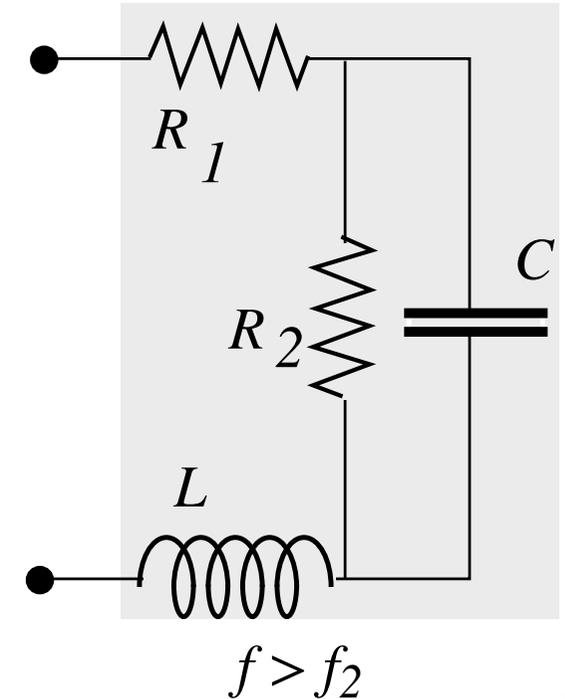
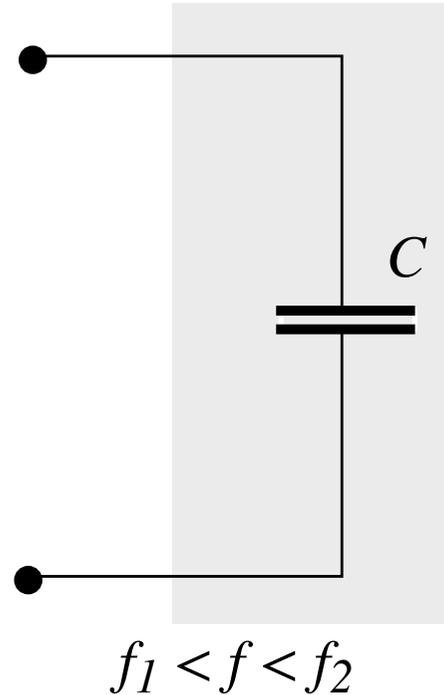
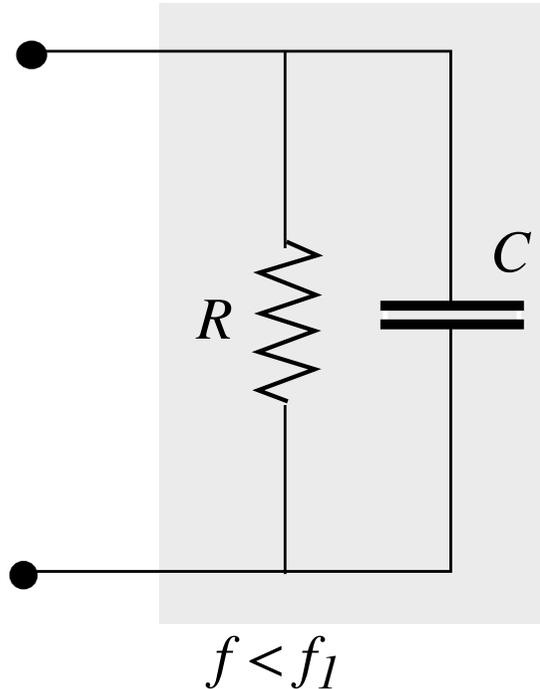


$$f > f_2$$

Comportamento in f di condensatori

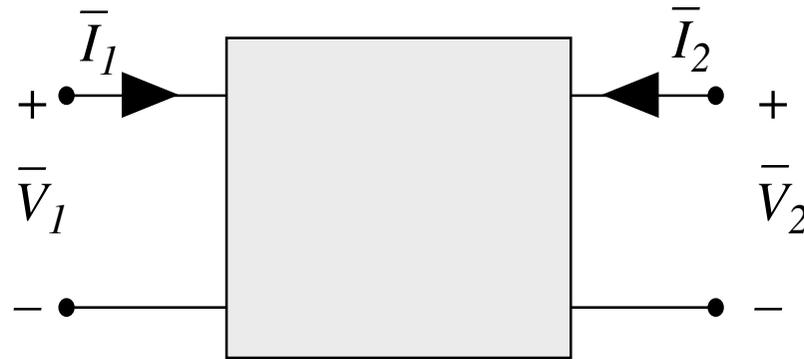
Effetti parassiti di cui si tiene conto con schemi comprendenti anche altri bipoli:

- resistivi a bassa f (nel dielettrico, quando G è confrontabile ωC)
- resistivi (nelle armature) e induttivi (magnetici) ad alta f (quando R e ωL sono confrontabili con $1/\omega C$)
- inoltre effetti dissipativi in certi dielettrici (isteresi) ad alta f



Doppi bipoli adinamici simbolici

Le equazioni nel dominio del tempo si riscrivono direttamente sui fasori.



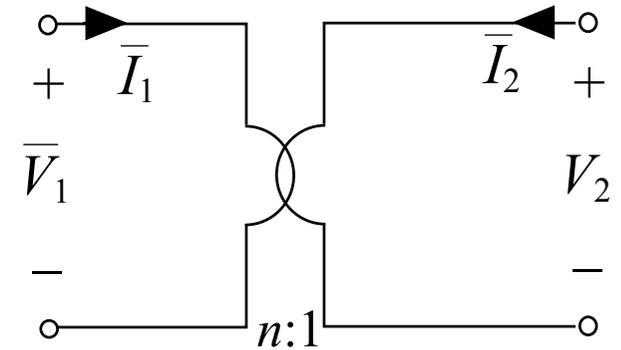
Esempio: Rappresentazione controllata in corrente:

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = R_{11} \bar{I}_1 + R_{12} \bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 = R_{21} \bar{I}_1 + R_{22} \bar{I}_2 \end{cases} \quad \dot{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$$

Doppi bipoli adinamici simbolici

Trasformatore ideale ($n > 0$):

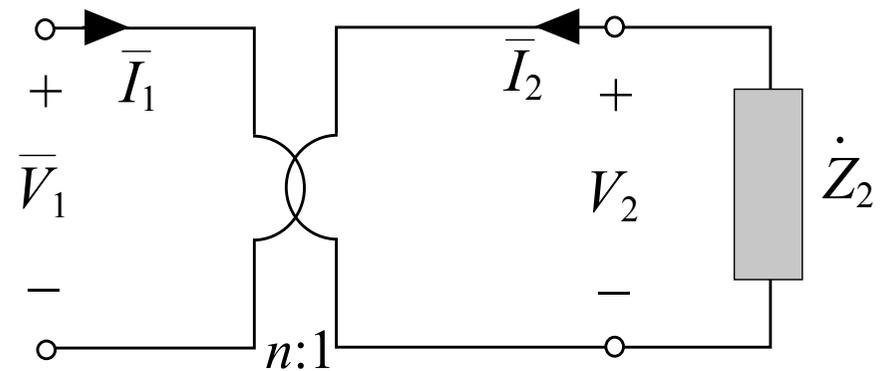
$$\begin{cases} \bar{V}_1 = n\bar{V}_2 \\ \bar{I}_1 = -\bar{I}_2 / n \end{cases} \quad \left(\text{v.e.} \begin{cases} V_1 = nV_2 \\ I_1 = I_2 / n \end{cases} \right)$$



$$\begin{cases} P_1 + P_2 = \Re(\dot{S}) = 0 \\ Q_1 + Q_2 = \Im(\dot{S}) = 0 \end{cases} \rightarrow \text{è trasparente alle potenze attive e reattive}$$

Trasferimento di impedenza:

$$\dot{Z}_{1eq} = \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = \frac{n\bar{V}_2}{-\frac{1}{n}\bar{I}_2} = -n^2 \frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_2} = n^2 \dot{Z}_2$$



Doppi bipolo induttivo simbolico

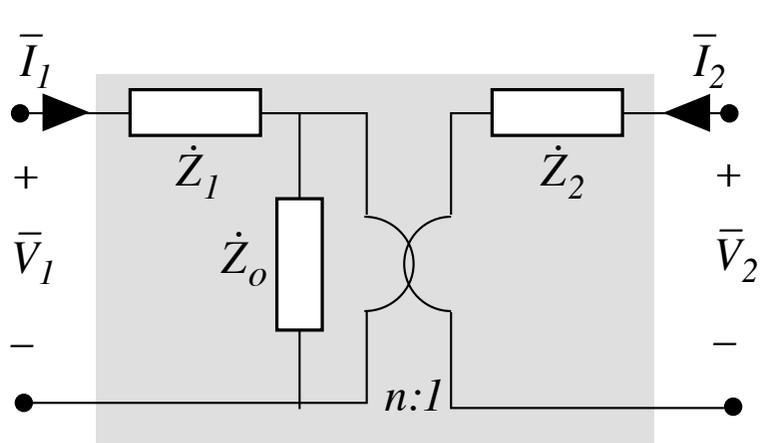
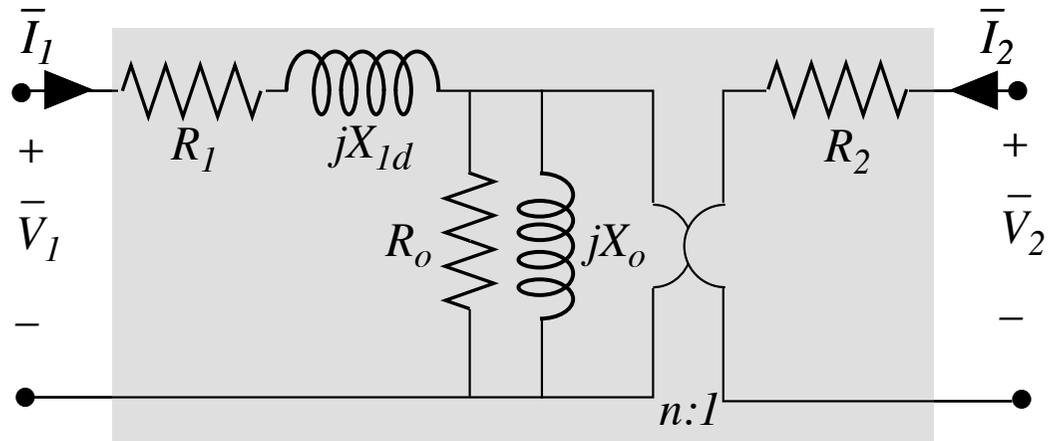
Equazioni del doppio bipolo induttivo:

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = j\omega L_1 \bar{I}_1 + j\omega M \bar{I}_2 = jX_{L1} \bar{I}_1 + jX_M \bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 = j\omega M \bar{I}_1 + j\omega L_2 \bar{I}_2 = jX_M \bar{I}_1 + jX_{L2} \bar{I}_2 \end{cases} \quad \dot{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} jX_{L1} & jX_M \\ jX_M & jX_{L2} \end{bmatrix}$$

Generalizzazione per qualsiasi doppio bipolo simbolico:

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = \dot{Z}_{11} \bar{I}_1 + \dot{Z}_{12} \bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 = \dot{Z}_{21} \bar{I}_1 + \dot{Z}_{22} \bar{I}_2 \end{cases} \quad \dot{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{11} & \dot{Z}_{12} \\ \dot{Z}_{21} & \dot{Z}_{22} \end{bmatrix}$$

Sintesi del trasformatore reale simbolico



$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Z}_1 = R_1 + jX_{L1d} \\ \dot{Z}_2 = R_2 \\ \dot{Z}_o = \frac{jX_o R_o}{R_o + jX_o} \end{array} \right.$$

Sintesi semplificata del trasformatore reale simbolico

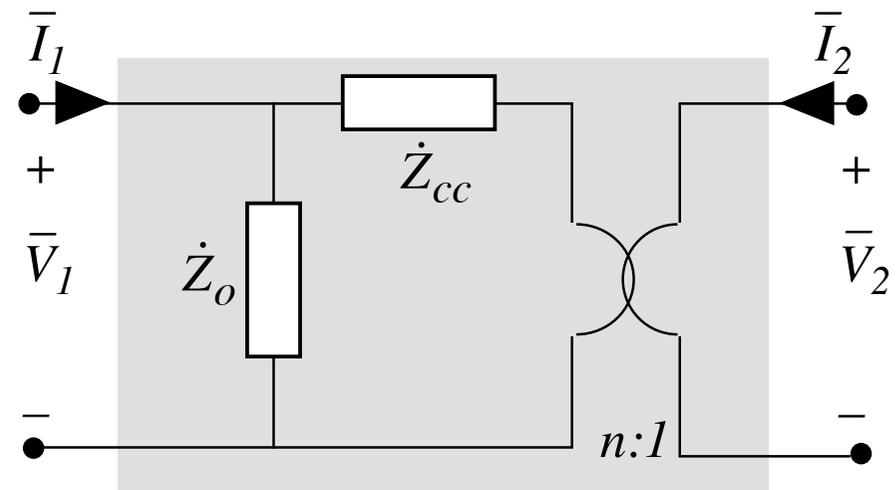
- \dot{Z}_2 può essere spostata prima del trasformatore ideale moltiplicandola n^2 (trasferimento di impedenza)
- Nei trasformatori di potenza è sempre $Z_1 \ll Z_o \rightarrow$ possono essere scambiate di posizione introducendo un errore piccolo
- \dot{Z}_1 e \dot{Z}_2 in serie possono essere sostituite con l'impedenza equivalente

Così si ottiene ...

\dot{Z}_o impedenza a vuoto

\dot{Z}_{cc} impedenza di cortocircuito

entrambe misurabili con due
misure «semplici»



Schema per comportamento in alta frequenza

