Università di Padova - Scuola di Ingegneria

Massimo Guarnieri

Elettrotecnica

Capitolo 18

Reti in regime periodico generico

Reti in regime periodico generico

Sono reti nelle quali le grandezze elettriche sono periodiche di ugual periodo T ed hanno forma generica, non sinusoidale.

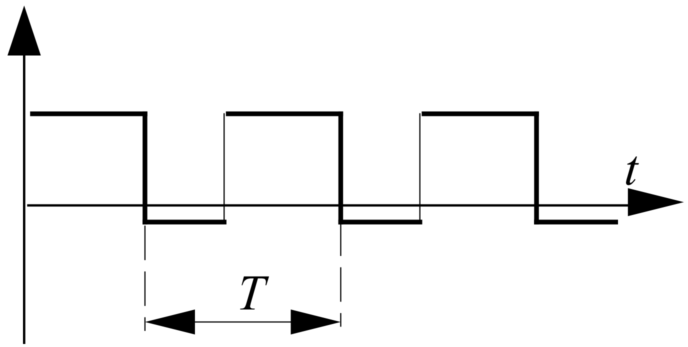
Tali grandezze non hanno forma simile tra loro, ma sono distorte, o deformate, le une rispetto alle altre, a differenza di quanto avviene in regime sinusoidale (questo è uno dei motivi che rende «speciali» le grandezze ed il regime sinusoidali)

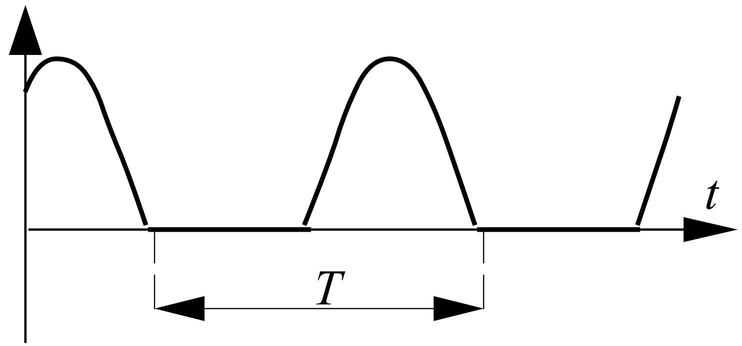
Esaminiamo l'analisi nel "*dominio della frequenza*", che ricorre alla rappresentazione in serie di Fourier delle funzioni periodiche ed è applicabile alle reti di m-bipoli passivi ideali con generatori periodici non sinusoidali.

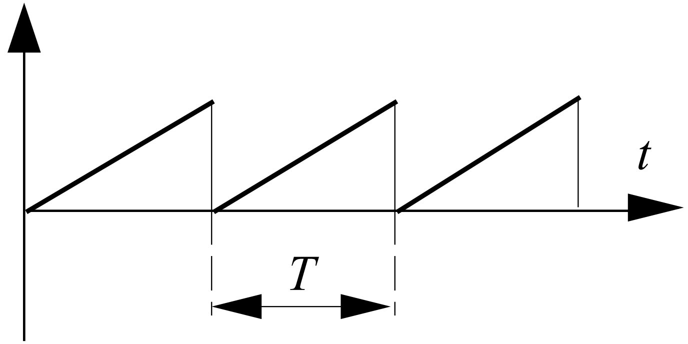
Funzioni periodiche di interesse pratico

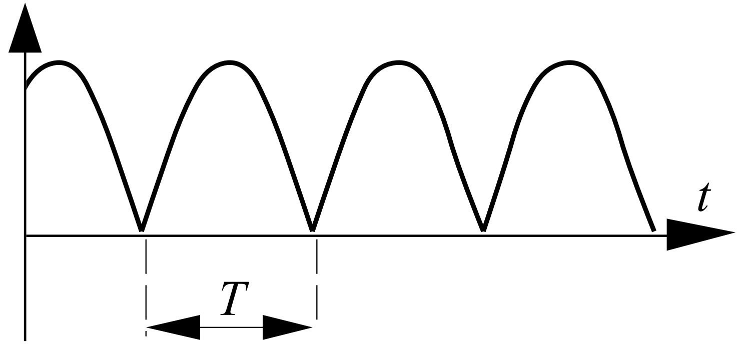
Sono le funzioni periodiche continue a tratti.

Esempi:









Serie di Fourier

Una funzione periodica $a(t)$ continua a tratti essere sviluppata in serie di Fourier, ossia espressa da tale serie:

$$a(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{Mn}\, sen(n\omega t + \alpha_n) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)$$

- A_0 è una costante che costituisce il *valore medio* (gli addendi sinusoidali non contribuiscono al valore medio);
- $a_n(t) = A_{Mn}\, sen(n\omega\, t + \alpha_n)$ $n=1$, ... sono le *armoniche:* sinusoidi con pulsazione $\omega_n = n\omega$, *ampiezza* A_{Mn} e *fase iniziale* α_n.

armoniche:

- $n=1$ → *armonica fondamentale* o *onda fondamentale* $a_1(t)$
- $n>1$ → *armoniche superiori* o semplicemente *armoniche* $a_n(t)$

coefficienti di Fourier: A_0, A_{Mn}

Analisi armonica

In molti casi la funzione periodica $a(t)$ è nota direttamente mediante la sua serie di Fourier: i valori di A_0, A_{Mn} e α_n sono noti a priori.

In altri casi è nota l'espressione analitica di $a(t)$ e non A_0, A_{Mn} e α_n. L'analisi armonica consiste nel determinare A_0, A_{Mn} e α_n:

$$
\begin{cases}
A_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_T a(t)\,dt \\[2ex]
A_{Mn} = \dfrac{2}{T}\sqrt{\left(\displaystyle\int_T a(t)\,sen\,(n\omega t)\,dt\right)^2 + \left(\displaystyle\int_T a(t)\cos(n\omega t)\,dt\right)^2} \\[2ex]
\alpha_n = arctg\dfrac{\displaystyle\int_T a(t)\cos(n\omega t)\,dt}{\displaystyle\int_T a(t)\,sen\,(n\omega t)\,dt}
\end{cases}
$$

n.b.: sono implementati in molti software e strumenti di misura

Analisi armonica

Simmetrie

- $a(t)$ alternata → $A_0 = 0$
- $a(t)$ pari $[a(t)=a(-t)]$ → $\alpha_n = \pm\pi/2$ (solo armoniche in coseno)
- $a(t)$ dispari $[a(t)=-a(-t)]$ → $A_0 = 0$ e $\alpha_n = 0$, (solo armoniche in seno)
- $a(t)$ antisimmetrica $[a(t)=-a(t+T/2)]$ → $A_0 = 0$, $A_{M2n} = 0$ (solo armoniche dispari)

Troncamento

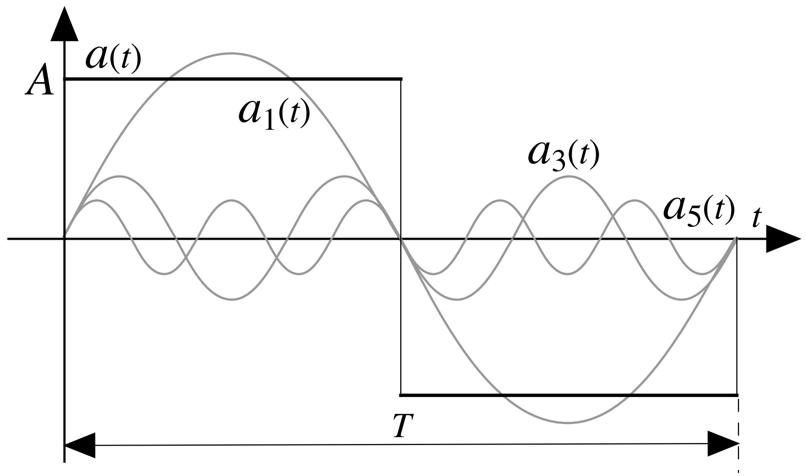
Riducendo la serie alla somma finita dei primi k termini si introduce un errore che diminuisce al crescere di k (perché la serie converge).

Nelle funzioni periodiche di interesse pratico bastano pochi termini per avere un errore piccolo ed un'approssimazione accettabile

Esempio

Onda quadra alternata

$$a(t) = \begin{cases} A & per \quad 0 \le t < T/2 \\ -A & per \quad T/2 \le t < T \end{cases}$$



serie di Fourier

$$a(t) = \frac{4A}{\pi}\left\{ \frac{sen\omega t}{1} + \frac{sen3\omega t}{3} + \frac{sen5\omega t}{5} + \cdots \frac{sen\, n\omega t}{n} \cdots \right\}$$

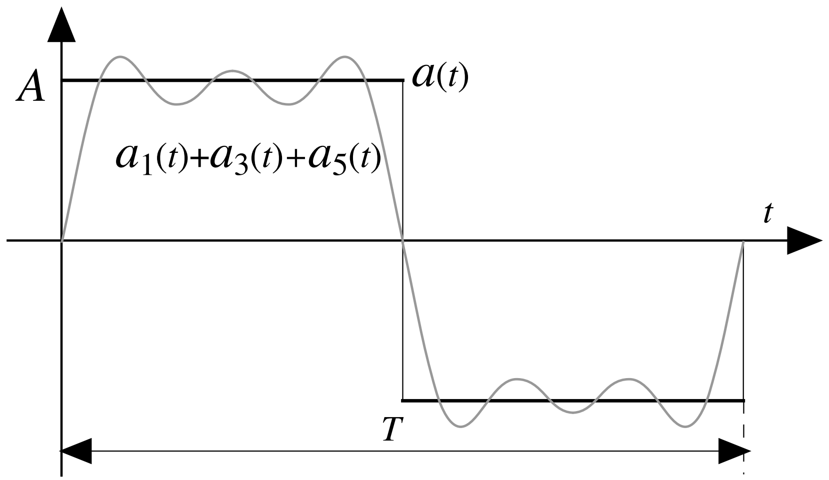
simmetrie

a(*t*) dispari e antisimmetrica

→ armoniche seni di ordine dispari

troncamento

prime tre armoniche 1 – 3 – 5



Valore efficace

Definizione (già nota):

$$A \triangleq \sqrt{\frac{1}{T}\int_T a(t)^2\, dt}$$

Uguaglianza di Parseval

$$A = \sqrt{A_0{}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n{}^2}$$

ove A_n sono i valori efficaci delle armoniche: $A_n = A_{Mn} / \sqrt{2}$

n.b.: discende dalla ortogonalità delle funzioni $sen(n\omega\, t + \alpha_n)$ quadrato sommabili in *T*

Bipoli in regime periodico

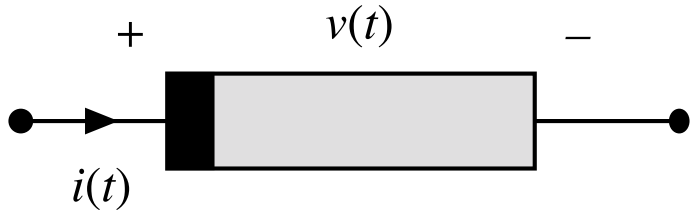
- Se una tensione (o una corrente) *periodica non sinusoidale* è applicata ad un *bipolo lineare*, la corrente (o la tensione) risulta periodica di ugual periodo ma di diversa forma

- Se una tensione (o una corrente) *sinusoidale* è applicata ad un *bipolo non lineare*, la corrente (o la tensione) risulta periodica di ugual periodo ma non sinusoidale.

- Lo studio "*nel dominio della frequenza*", che fa uso della serie di Fourier, a rigore si applica nel primo caso (perché richiede la linearità e la sovrapposizione degli effetti)
- Ma analisi in frequenza si effettuano anche nel secondo caso

Bipoli in regime periodico

Tensione e corrente



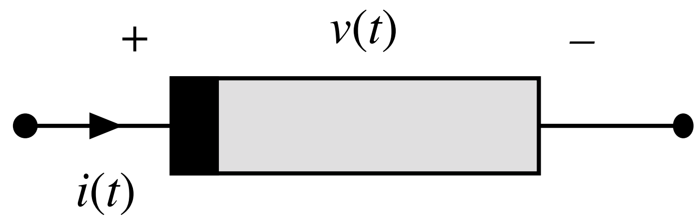
$$\begin{cases} v(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} V_n \, sen(n\omega t + \alpha_n) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \\ i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} I_n \, sen(n\omega t + \beta_n) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} i_n(t) \end{cases}$$

con $\quad V_{Mn} = \sqrt{2}\, V_n \qquad I_{Mn} = \sqrt{2}\, I_n$

valori efficaci $\quad \begin{cases} V = \sqrt{V_0^{\,2} + \sum_{n=1}^{\infty} V_n^{\,2}} \\ I = \sqrt{I_0^{\,2} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^{\,2}} \end{cases}$

Potenza in regime periodico

Potenza istantanea: $p(t)=v(t)i(t)$



Potenza attiva

definizione (nota): $$P \triangleq \frac{1}{T}\int_T p(t)\,dt$$

espressione (teorema di Parseval):

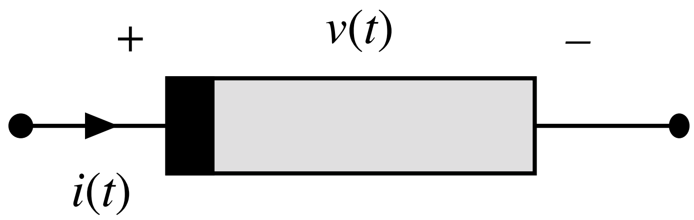
$$P = V_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n cos\varphi_n = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n$$

dove: $P_n = V_n I_n cos\varphi_n$ = potenza attiva di *n*-esima armonica

$\varphi_n = \alpha_n - \beta_n$ = sfasamento di *n*-esima armonica

$cos\ \varphi_n = cos(\alpha_n - \beta_n)$ = fattore di potenza di *n*-esima armonica

Potenza in regime periodico



Potenza apparente

definizione: $S \triangleq V\,I$

espressione: $S = \sqrt{\left(V_0^{\,2} + \sum_{n=1}^{\infty} V_n^{\,2}\right)\left(I_0^{\,2} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^{\,2}\right)}$

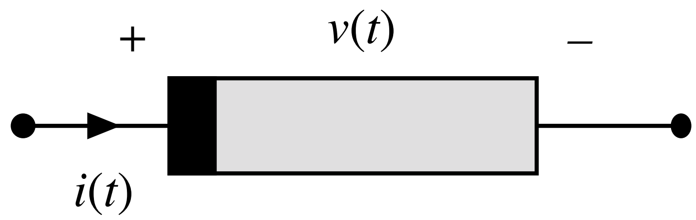
Fattore di potenza $cosfi \triangleq \dfrac{P}{S}$

senza significato trigonometrico.

Anche in questo caso la situazione ideale si ha se $P = S$, ovvero $cosfi = 1$

Potenza in regime periodico

Potenza reattiva



definizione: $Q \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n sen\ \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n$

P e Q non bilanciano S con la quadratura pitagorica: $S^2 > P^2 + Q^2$

Potenza deformante

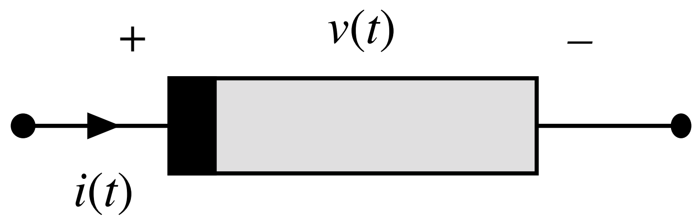
definizione:

$$D \triangleq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \left[V_n^2 I_m^2 + V_m^2 I_n^2 - 2 V_n V_m I_n I_m \cos\left(\varphi_n - \varphi_m\right) \right]}$$

Potenza non-attiva: $N^2 \triangleq Q^2 + D^2$

Potenza in regime periodico

Quadratura delle potenze:



$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2$$

$$S^2 = P^2 + N^2$$

Per ottenere la condizione ideale $P = S$ serve:

$$N^2 = 0 \quad \text{ossia} \quad Q^2 = 0 \quad D^2 = 0$$

in particolare è $D^2 = 0$ se:

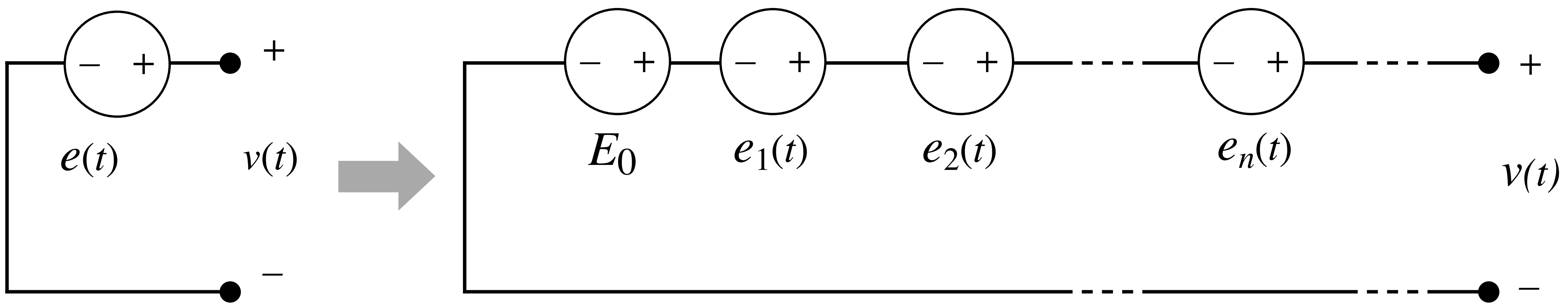
$$\frac{V_n}{V_m} = \frac{I_n}{I_m} \quad , \quad \varphi_n = \varphi_m \quad \forall n, m$$

avviene se i contenuti armonici sono uguali = se $v(t)$ e $i(t)$ non sono reciprocamente deformate

Generatori ideali periodici (ingressi)

Generatore ideale di tensione periodica:

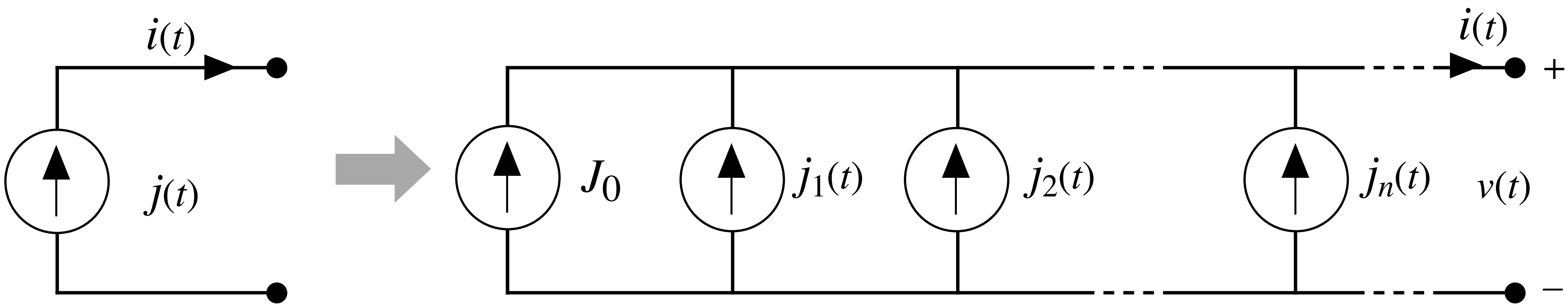
$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}\, E_n\, sen(n\omega t + \alpha_{en}) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e_n(t)$$



Generatori ideali periodici (ingressi)

Generatore ideale di corrente periodica:

$$j(t) = J_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}\, J_n\, sen(n\omega t + \beta_{jn}) = J_0 + \sum_{n=1}^{\infty} j_n(t)$$



Analisi delle reti in regime periodico

Consideriamo reti lineari in regime periodico:

- generatori che imprimono grandezze periodiche non sinusoidali
- bipoli e doppi bipoli passivi lineari (R – L – C – DBA – DBI ideali)

Tensioni e correnti incognite (uscite):

$$\begin{cases} v(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} V_n \, sen(n\omega t + \alpha_n) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \\ i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} I_n \, sen(n\omega t + \beta_n) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} i_n(t) \end{cases}$$

Analisi alle armoniche

Avendo assunto la rete lineare → sovrapposizione degli effetti:

agiscono di volta in volta gli addendi impressi di pari armonica:

n=0 (addendi costanti), n = 1, n = 2, …

Analisi alle armoniche

Grandezze impresse costanti (*n*=0)

L'azione contemporanea delle grandezze impresse costanti E_0 e J_0 produce gli addendi costanti V_0 e I_0 delle tensioni e correnti incognite. Esse corrispondono alle soluzioni di regime stazionario e si determinano con i metodi di analisi propri delle reti in tale regime.

Gli induttori equivalgono a cortocircuiti ed i condensatori a circuiti aperti e quindi solo i resistori definiscono il rapporto tra tensioni e correnti dei bipoli passivi:

$$R = \frac{V_0}{I_0} \quad , \qquad G = \frac{I_0}{V_0}$$

Analisi alle armoniche

Grandezze impresse armoniche (*n*≥1)

L'azione contemporanea delle grandezze impresse sinusoidali isofrequenziali $e_n(t)$ e $j_n(t)$ produce le corrispondenti armoniche $v_n(t)$ e $i_n(t)$ delle tensioni e correnti incognite.

Esse corrispondono alla soluzione di regime sinusoidale a pulsazione ω_n e l'analisi è eseguita con i metodi delle reti in regime sinusoidale (calcolo simbolico).

I resistori presentano sempre il medesimo valore di resistenza R, gli induttori e i condensatori presentano reattanze che dipendono da n:

$X_{Ln}=n\omega L$

$X_{Cn}= -1/n\omega C$

Analisi alle armoniche

Grandezze impresse armoniche (*n*≥1)

A causa dei diversi valori assunti dalle reattanze nelle analisi alle diverse pulsazioni ω_n ogni bipolo passivo della rete presenta impedenza:

$$\dot{Z}_n = \frac{\overline{V}_n}{\overline{I}_n} = Z_n \, e^{j\varphi_n}$$

Ovvero: al variare di dell'ordine di armonica n variano le impedenze sia nel modulo $Z_n = V_n / I_n$ che nell'argomento $\varphi_n = \alpha_n - \beta_n$.

Forma delle uscite - deformazione

In ogni lato la relazione tensione-corrente cambia con n.
Ad esempio per i bipoli passivi è:

$$\begin{cases} Z_n \neq Z_m \quad \Rightarrow \quad \dfrac{V_{Mn}}{V_{Mm}} \neq \dfrac{I_{Mn}}{I_{Mm}} \\ \varphi_n \neq \varphi_m \quad \Rightarrow \quad \alpha_n - \alpha_m \neq \beta_n - \beta_m \end{cases}$$

→ tensioni e correnti non presentano gli stessi contenuti armonici, ovvero, *le loro forme d'onda sono deformate (hanno forme diverse)*

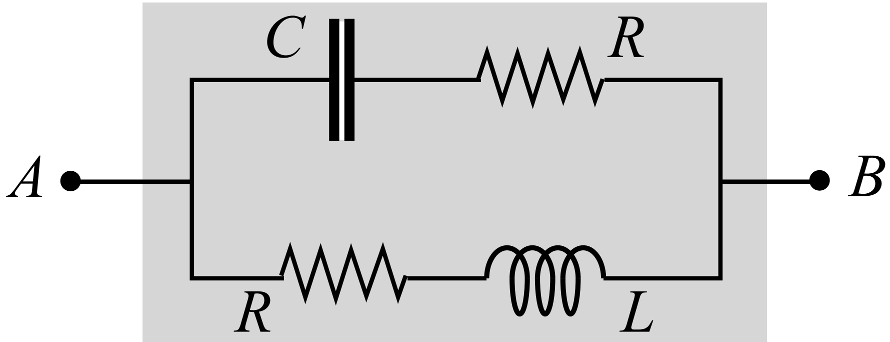
→ in generale una *rete lineare con generatori periodici non sinusoidali deforma le tensioni e correnti*.

Se gli elementi passivi di una rete sono tutti resistori, le impedenze sono indipendenti da ω_n → non deformano.

Forma delle uscite - deformazione

Oltre alle reti di resistori, esistono anche particolari reti reattive che **non deformano** grazie alla loro struttura.

Esempio:



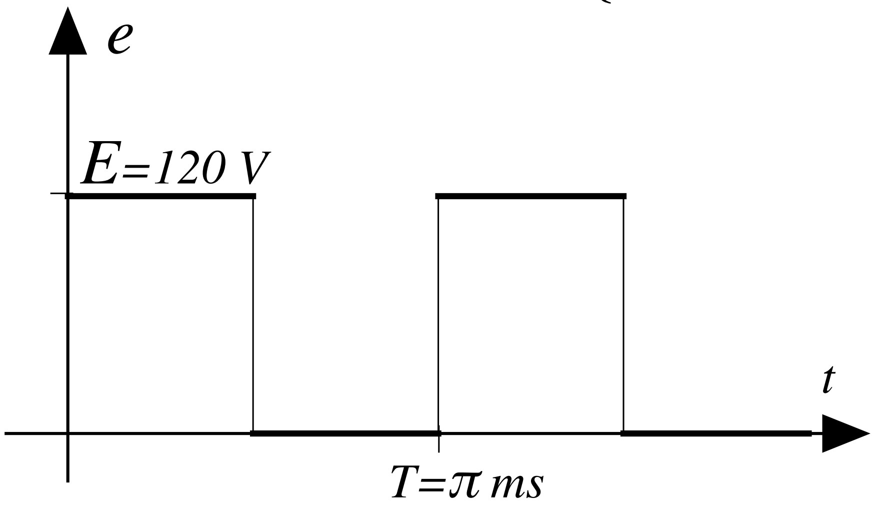
Se $R^2 = L/C$

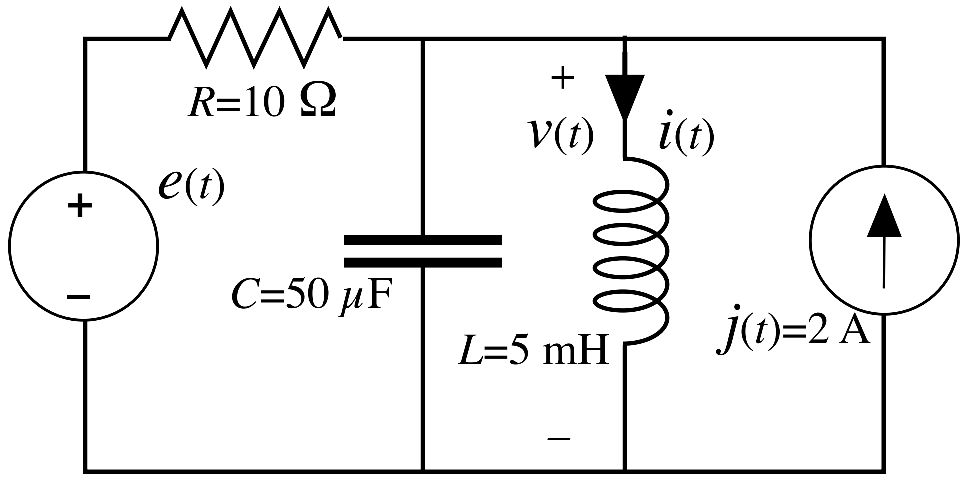
$$\dot{Z}_{tot}(n) = \frac{\left(R - j\frac{1}{\omega_n C}\right)\left(R + j\omega_n L\right)}{\left(R - j\frac{1}{\omega_n C}\right) + \left(R + j\omega_n L\right)} = R\frac{RC\omega_n\left(1 + \frac{L}{C\,R^2}\right) + j\left(LC\omega_n^2 - 1\right)}{RC\omega_n 2 + j\left(LC\omega_n^2 - 1\right)} = R$$

→ l'impedenza tra A e B vale R a qualsiasi pulsazione

Analisi di rete in regime periodico

$$j(t) = J = 2 \;\; \text{A} \qquad e(t) = \begin{cases} E & 0 \le t < T/2 \\ 0 & T/2 \le t < T \end{cases}$$





$v(t)$? $i(t)$?

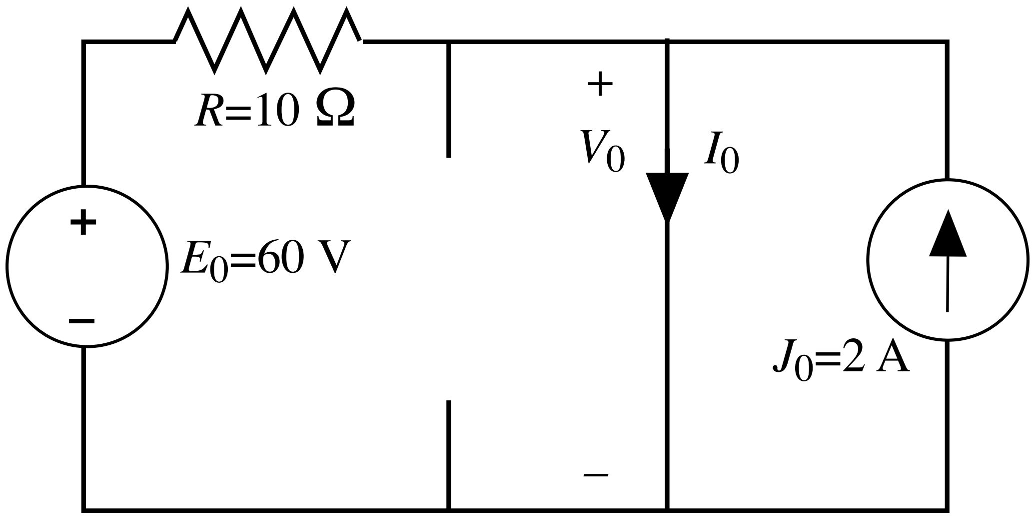
Serie di Fourier di $e(t)$ troncata alla 5^ armonica:

$$e(t) = 60 + \frac{240}{\pi} sen\, 2000t + \frac{80}{\pi} sen\, 6000t + \frac{48}{\pi} sen\, 10000t$$

Addendi costanti

Ingressi:

E_0=60 V e J_0=2 A.



Induttanza = cc

Condensatore = aperto

Analisi in stazionario:

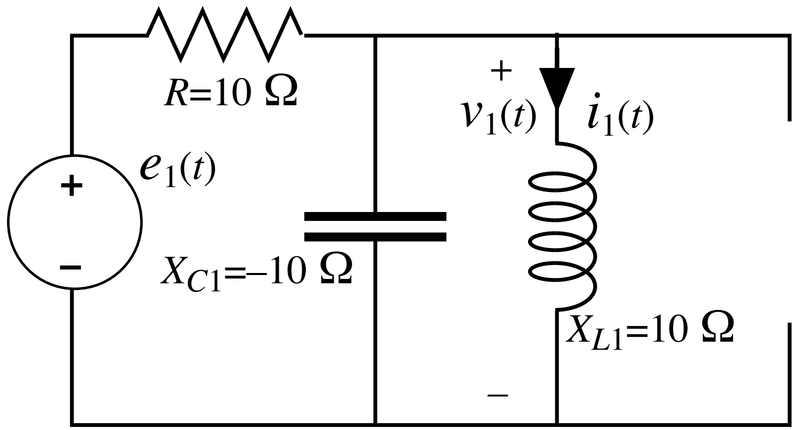
$$V_0 = 0 \text{ V} \qquad , \qquad I_0 = \frac{E_0}{R} + J_0 = 8 \text{ A}$$

Armonica 1

Ingresso:

$e_1(t)=(240/\pi)sen2000t$ V

$$\bar{E}_1 = \frac{240}{\sqrt{2}\pi}$$



Induttanza e condensatore antirisonanti:

$$X_{C1} = -\frac{1}{\omega C} = -10 \quad \Omega$$

$$X_{L1} = \omega L = 10 \quad \Omega$$

Analisi fasoriale: $\bar{V}_1 = \bar{E}_1 = \dfrac{240}{\sqrt{2}\pi}$, $\bar{I}_1 = \dfrac{\bar{V}_1}{jX_{L1}} = -j\dfrac{24}{\sqrt{2}\pi} = \dfrac{24}{\sqrt{2}\pi}e^{-j\pi/2}$

Sinusoidi: $v_1(t) = \dfrac{240}{\pi} sen 2000t \quad$ V, $\quad i_1(t) = \dfrac{24}{\pi} sen\left(2000t - \dfrac{\pi}{2}\right) \quad$ A

Armonica 3

Ingresso:

$e_3(t)=(80/\pi)sen6000t$ V

$$\bar{E}_3 = \frac{80}{\sqrt{2}\pi}$$

$$X_{C3} = -\frac{1}{3\omega C} = -10/3 \quad \Omega$$

$$X_{L3} = 3\omega L = 30 \quad \Omega$$

$$\dot{Z}_{p3} = \frac{jX_{L3}\, jX_{C3}}{jX_{L3} + jX_{C3}} = j\frac{X_{L3}X_{C3}}{X_{L3} + X_{C3}} = -j3{,}75$$

Analisi fasoriale:

$$\begin{cases} \bar{V}_3 = \bar{E}_3 \dfrac{\dot{Z}_{p3}}{R + \dot{Z}_{p3}} = \dfrac{80}{\sqrt{2}\pi} \dfrac{-j3{,}75}{10 - j3{,}75} = \dfrac{240}{\sqrt{2}\pi 73}(3 - j8) \cong \dfrac{28{,}1}{\sqrt{2}\pi} e^{-j1{,}21} \\ \bar{I}_3 = \dfrac{\bar{V}_3}{jX_{L3}} = \dfrac{240}{\sqrt{2}\pi 73} \dfrac{3 - j8}{j30} = \dfrac{8}{\sqrt{2}\pi 73}(-8 - j3) \cong \dfrac{0{,}936}{\sqrt{2}\pi} e^{-j2{,}78} \end{cases}$$

Sinusoidi: $v_3(t) = \dfrac{28{,}1}{\pi} sen(6000t - 1{,}21) \quad \text{V}, \qquad i_3(t) = \dfrac{0{,}936}{\pi} sen(6000t - 2{,}78) \quad \text{A}$

Armonica 5

Ingresso:

$e_5(t)=(48/\pi)sen10000t$ V

$$\bar{E}_5 = \frac{48}{\sqrt{2}\pi}$$

$$X_{C5} = -\frac{1}{5\omega C} = -2 \quad \Omega$$

$$X_{L5} = 5\omega L = 50 \quad \Omega$$

$$\dot{Z}_{p5} = \frac{jX_{L5}jX_{C5}}{jX_{L5} + jX_{C5}} = j\frac{X_{L5}X_{C5}}{X_{L5} + X_{C5}} = -j\frac{25}{12} = -j2{,}083$$

Analisi fasoriale:

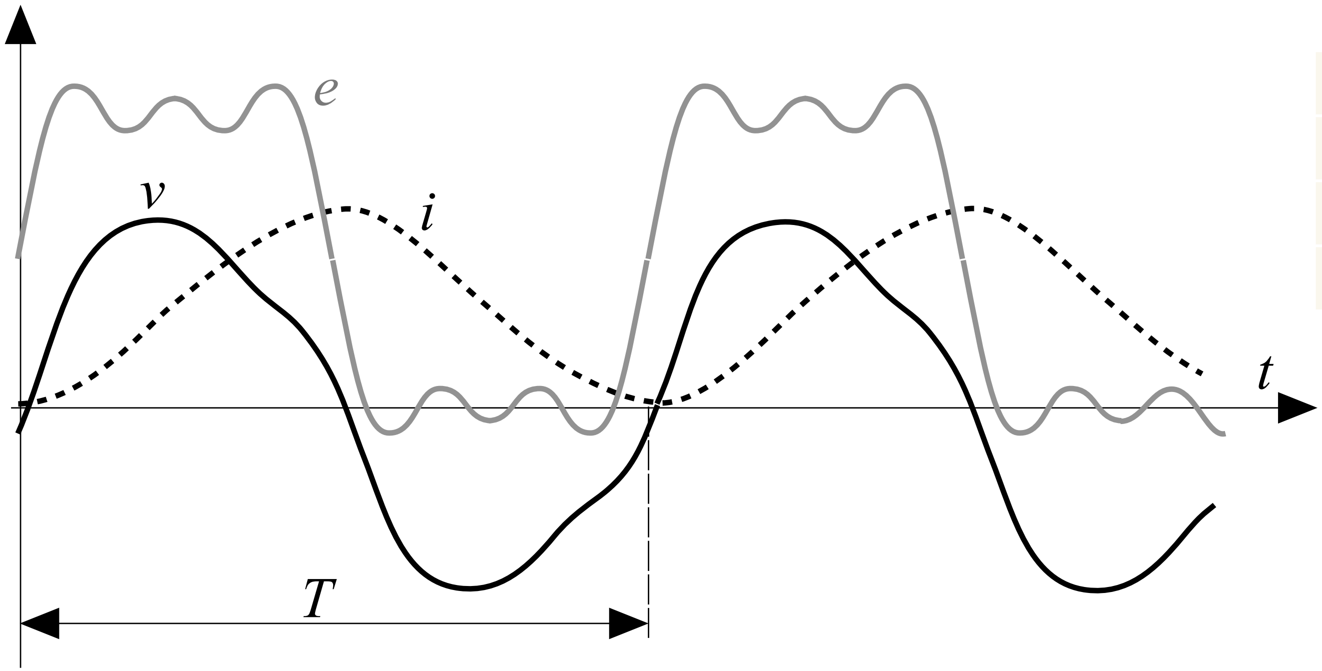
$$\begin{cases} \bar{V}_5 = \bar{E}_5 \dfrac{\dot{Z}_{p5}}{R + \dot{Z}_{p5}} = \dfrac{48}{\sqrt{2}\pi} \dfrac{-j\frac{25}{12}}{10 - j\frac{25}{12}} = \dfrac{240}{\sqrt{2}\pi 601}(5 - j24) \cong \dfrac{9{,}79}{\sqrt{2}\pi} e^{-j1{,}36} \\ \bar{I}_5 = \dfrac{\bar{V}_5}{jX_{L5}} = \dfrac{240}{\sqrt{2}\pi 601} \dfrac{5 - j24}{j50} = \dfrac{24}{\sqrt{2}\pi 3005}(-24 - j5) \cong \dfrac{0{,}196}{\sqrt{2}\pi} e^{-j2{,}93} \end{cases}$$

Sinusoidi:

$$v_5(t) = \frac{9{,}79}{\pi} sen(10000t - 1{,}36) \quad \text{V}, \quad i_5(t) = \frac{0{,}196}{\pi} sen(10000t - 2{,}93) \quad \text{A}$$

Uscite complete

$$\begin{cases} v(t) = \dfrac{240}{\pi} sen 2000t + \dfrac{28,1}{\pi} sen(6000t - 1,21) + \dfrac{9,79}{\pi} sen(10000t - 1,36) \text{ V} \\ i(t) = 8 + \dfrac{24}{\pi} sen\left(2000t - \dfrac{\pi}{2}\right) + \dfrac{0,936}{\pi} sen(6000t - 2,78) + \dfrac{0,196}{\pi} sen(10000t - 2,93) \text{ A} \end{cases}$$



	I arm.	III arm.	V arm.
e(t)	100 %	33 %	20 %
v(t)	100 %	11,7 %	4,1 %
i(t)	100 %	3,9 %	0,8 %

Valori efficaci e potenze

$$\begin{cases} V = \sqrt{{V_0}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} {V_n}^2} \\ I = \sqrt{{I_0}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} {I_n}^2} \end{cases}$$

$\rightarrow$

$$V = \sqrt{\left(\frac{240}{\sqrt{2}\pi}\right)^2 + \left(\frac{28,1}{\sqrt{2}\pi}\right)^2 + \left(\frac{9,79}{\sqrt{2}\pi}\right)^2} = 54,43 \quad \text{V}$$

$$I = \sqrt{8^2 + \left(\frac{24}{\sqrt{2}\pi}\right)^2 + \left(\frac{0,936}{\sqrt{2}\pi}\right)^2 + \left(\frac{0,196}{\sqrt{2}\pi}\right)^2} = 9,655 \quad \text{A}$$

$$S \triangleq V I$$

$$P = V_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n cos\varphi_n = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n$$

$$Q \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n sen\ \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n$$

$$D \triangleq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \left[V_n^2 I_m^2 + V_m^2 I_n^2 - 2 V_n V_m I_n I_m \cos(\varphi_n - \varphi_m) \right]}$$

$\rightarrow$

$$S = 525,6 \quad \text{VA}$$

$$P = 0 \quad \text{W}$$

$$Q = 293,2 \quad \text{VAR}$$

$$D = 436,16 \quad \text{VA}$$