Università di Padova - Scuola di Ingegneria

Massimo Guarnieri

Elettrotecnica

Capitolo 21
Complementi sulle reti in regime variabile aperiodico

Trasformata di Laplace

La *trasformata di Laplace* è uno strumento matematico alla base di un procedimento molto potente di analisi dei sistemi dinamici e in particolare delle reti elettriche.

- È in grado di fornire, con un unico algoritmo molto compatto, le uscite complete di: **addendi discontinui ed impulsivi** nell'istante iniziale e **integrale particolare** ed **integrale dell'omogenea** della risposta continua successiva.
- Può essere pericolosa, perché non permette verifiche intermedie.
- Noi qui ne facciamo un uso parziale, funzionale alle nostre esigenze.
- Verrà trattata in modo più esteso in Controlli Automatici.

Trasformata di Laplace - definizione

$a(t)$ = funzione reale per $t \geq 0$

$s = \sigma + j\omega$ = variabile complessa

$$A(s) = \mathcal{L}\left[a(t)\right] \triangleq \int_{0^-}^{+\infty} a(t) e^{-st}\, dt$$

ove (valori di s) l'integrale converge

$A(s)$ = trasformata di Laplace (o Laplace-trasformata o L-trasformata) di $a(t)$

s = pulsazione complessa

$$a(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[A(s)\right] \triangleq \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma^* - j\infty}^{\sigma^* + j\infty} A(s) e^{st}\, ds$$

$a(t)$ = anti-trasformata di Laplace (o anti-Laplace-trasformata o anti-L-trasformata) di $A(s)$

σ^* = ascissa reale a destra delle eventuali singolarità di $A(s)$

Trasformata di Laplace - proprietà

La L-trasformata è lineare:

$$\begin{cases} c(t) = a(t) + b(t) & \Leftrightarrow & C(s) = A(s) + B(s) \\ c(t) = k\, a(t) & \Leftrightarrow & C(s) = k\, A(s) \end{cases}$$

Inoltre: $$c(t) = \frac{d\,a(t)}{dt} \qquad \Leftrightarrow \qquad C(s) = s\,A(s) - a(0^-)$$

se $a(0^-)=0$ → $C(s) = sA(s)$.

Se $a(t)$ e le derivate inferiori sono nulle in $t=0^-$:

$$c(t) = \frac{d^i\,a(t)}{dt^i} \qquad \Leftrightarrow \qquad C(s) = s^i\,A(s)$$

Rete operatoriale

Equazioni di rete alle L-trasformate:

sono algebriche e lineari in campo complesso

$$\left\{\begin{array}{r} \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{i}=\mathbf{0} \\ \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{v}=\mathbf{0} \\ v-R\,i=0 \\ \boldsymbol{v}-\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{i}=0 \\ C\,dv/dt-i=0 \\ v-L\,di/dt=0 \\ \boldsymbol{v}-\boldsymbol{L}\,d\boldsymbol{i}/dt=0 \\ v=e(t) \\ i=j(t) \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{r} \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{I}(s)=\mathbf{0} \\ \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{V}(s)=\mathbf{0} \\ V(s)-R\,I(s)=0 \\ \boldsymbol{V}(s)-\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{I}(s)=\mathbf{0} \\ sC\,V(s)-I(s)=0 \\ V(s)-sL\,I(s)=0 \\ \boldsymbol{V}(s)-s\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{I}(s)=\mathbf{0} \\ V(s)=E(s) \\ I(s)=J(s) \end{array}\right.$$

Rete operatoriale

→ La rete operatoriale è lineare in campo complesso

Bipoli passivi – impedenza operatoriale e ammettenza operatoriale:

$$V(s)=Z(s)\,I(s) \quad , \qquad I(s)=Y(s)\,V(s) \quad , \qquad Y(s)=\frac{1}{Z(s)}$$

Per resistore, induttore e condensatore:

$$Z_R(s)=R \qquad Z_L(s)=s\,L \qquad Z_C(s)=\frac{1}{s\,C}$$

$$Y_R(s)=G=\frac{1}{R} \qquad Y_L(s)=\frac{1}{s\,L} \qquad Y_C(s)=s\,C$$

sono funzioni complesse della pulsazione complessa s

si ottengono dai parametri del regime sinusoidale sostituendo $0+j\omega$ (ove $\omega = 2\pi f$ è fissato) con $s = \sigma + j\omega$ (con σ e ω variabili)

Rete operatoriale

Anche in questo caso valgono i metodi di analisi basati sull'algebra lineare complessa:

- serie e paralleli di impedenze ed ammettenze generalizzate presentano impedenze ed ammettenze generalizzate equivalenti $Z_s(s), Y_s(s)$ e $Y_p(s), Z_p(s)$ valutabili con le modalità usuali
- partitori di tensione e di corrente presentano rapporti di partizione $\rho_v(s)$ e $\rho_i(s)$ valutabili con le modalità usuali
- sono applicabili i metodi delle correnti cicliche, dei potenziali ai nodi e della sovrapposizione degli effetti
- sono applicabili i teoremi di Thévenin e di Norton
- è applicabile il teorema di sostituzione

n.b.: $Z_s(s), Y_s(s), Y_p(s), Z_p(s), \rho_v(s)$ e $\rho_i(s)$ sono funzioni complesse di variabile complessa

Funzione di trasferimento

Elaborando le equazioni di rete operatoriale → relazione tra un'uscita ed un ingresso:

$$Y(s) = H(s)\,X(s)$$

$H(s)$ = **funzione di trasferimento** = rapporto tra le L-trasformate di uscita (effetto) e ingresso (causa):

$$H(s) \triangleq \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Funzione complessa di variabile complessa.

Per $s^* = 0 + j\omega^* = j\omega^*$ → funz. di trasferimento del regime sinusoidale a $f = \omega^*/2\pi$

Per $s^* = 0 + j0 = 0$ → funz. di trasferimento del regime stazionario

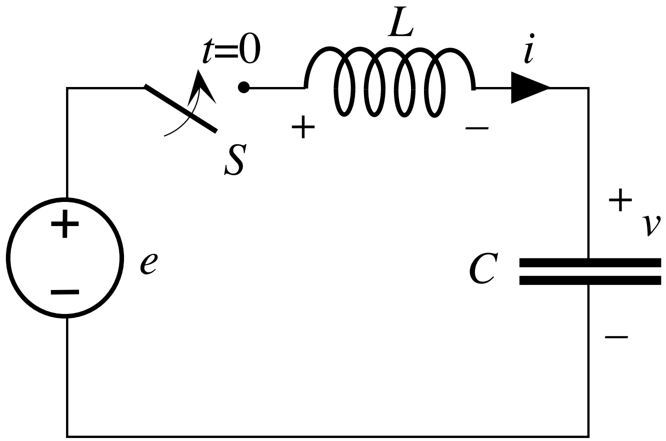
Funzione di trasferimento

L-trasformata di $\delta_o(t)$: $\mathcal{L}[\delta_o(t)]=1$

→ L-trasformata della *risposta impulsiva* $y_\delta(t)$ all'ingresso impulsivo di ampiezza unitaria $x(t)=1\,\delta_o(t)$

$$H(s) = \mathcal{L}[y_\delta(t)] = Y_\delta(s)$$

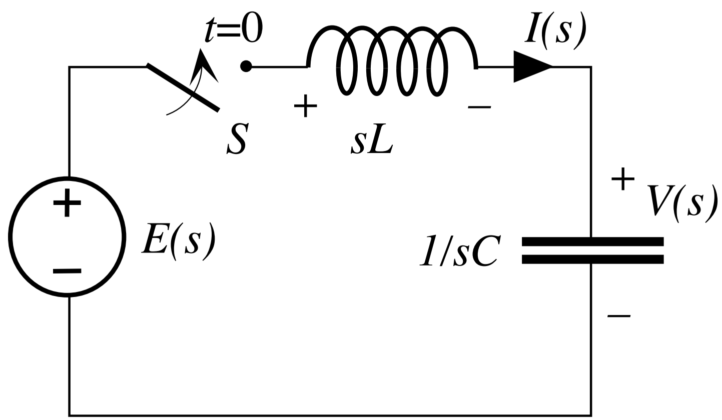
Oscillatore L-C



Rete in *t*

$\rightarrow$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



Rete operatoriale $\rightarrow$

$$I(s) = \frac{E(s)}{sL + \frac{1}{sC}} = \frac{sC}{LCs^2 + 1} E(s) = \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{\omega_o\, s}{s^2 + \omega_o^{\,2}} E(s)$$

$$H_{ie}(s) = Y_s(s) = \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{\omega_o\, s}{s^2 + \omega_o^{\,2}}$$

$$V(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{sL + \frac{1}{sC}} E(s) = \frac{1}{LCs^2 + 1} E(s) = \frac{\omega_o^{\,2}}{s^2 + \omega_o^{\,2}} E(s)$$

$$H_{ve}(s) = \rho_v(s) = \frac{\omega_o^{\,2}}{s^2 + \omega_o^{\,2}}$$

sono le due funzioni di trasferimento, per corrente di L e tensione di C

Deduzione dell'integrale particolare con *H(s)*

Determinata $H(s)$, imponendo alla variabile complessa s il valore di pulsazione proprio dell'ingresso $X(s^*)$, si ottiene $H(s^*)$ da cui si ricava l'integrale particolare → $Y_p=H(s^*)X(s^*)$.

Esempio: oscillatore LC

Ingr. sinusoidale: $s^* = j\omega^*$

(in forma fasoriale)

$$\bar{Y}_p = H(j\omega)\,\bar{X} = \left[\left|H(j\omega)\right| X\right] e^{j[\varphi(j\omega)+\chi]}$$

$$I(j\omega) = \bar{I} = \frac{\bar{E}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega C}{-\omega^2 LC + 1}\bar{E}$$

$$V(j\omega) = \bar{V} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} E(s) = \frac{1}{-\omega^2 LC + 1}\bar{E}$$

Ingr. stazionario: $s^* = 0$

(grandezze costanti)

$$Y_p = H(0)\,X = \left[\left|H(0)\right| X\right]$$

$$I = \frac{0C}{0LC+1}E = 0$$

$$V = \frac{1}{0LC+1}E = E$$

Deduzione dell'equazione differenziale da *H(s)*

Una volta determinata, $H(s)$ può essere espressa come rapporto polinomiale:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} X(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} X(s)$$

moltiplicazione per $D(s)$:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i s^i Y(s) = \sum_{i=0}^{m} b_i s^i X(s)$$

anti-trasformazione nel tempo

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i x}{dt^i}$$

è l'equazione differenziale D(x)

Deduzione dell'equazione caratteristica da *H(s)*

Dalle equivalenze

$$Y(s)=\frac{N(s)}{D(s)}X(s)=\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i\, s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i\, s^i}X(s) \quad \rightarrow \quad \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i}=\sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i x}{dt^i}$$

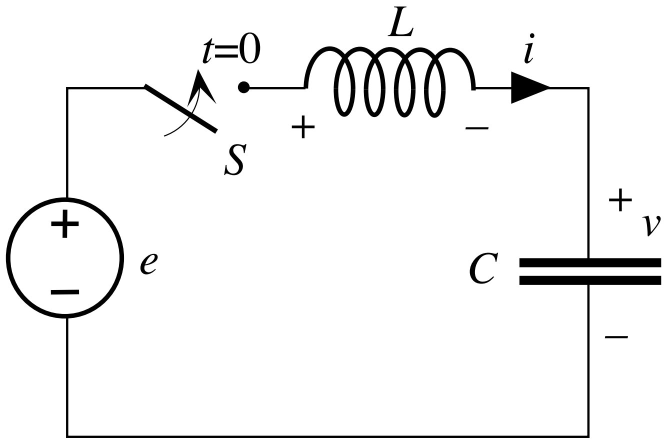
Discende che $D(s)$ è il polinomio caratteristico e $D(s)$=0 l'equazione caratteristica dell'omogenea associata,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, s^i = 0$$

le cui radici costituiscono le pulsazioni generalizzate naturali della rete (che definiscono i modi naturali dell'integrale dell'omogenea associata).

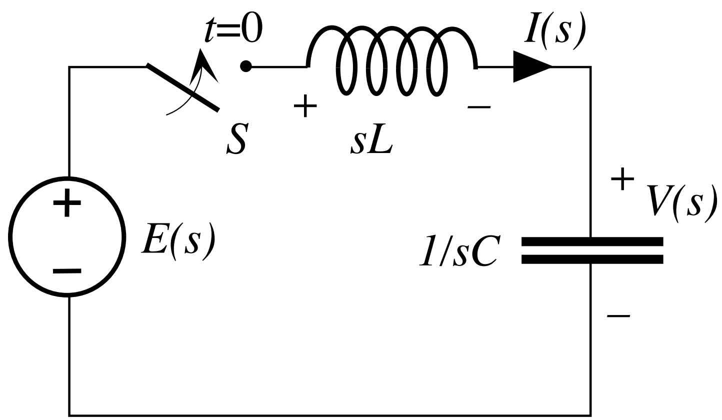
n.b.: alcune funzioni di trasferimento possono mancare di qualche modo naturale dell'integrale complessivo dell'omogena associata, se l'ingresso non è in grado di "eccitare" la relativa pulsazione generalizzata

Oscillatore L-C



Rete in *t*

$\rightarrow$



Rete operatoriale $\rightarrow$

$$I(s) = \frac{sC}{LCs^2+1}E(s) \quad \rightarrow \quad \left(LCs^2+1\right)I(s) = sC\,E(s) \quad \rightarrow \quad LC\frac{d^2 i}{dt^2} + i = C\frac{de}{dt}$$

$$V(s) = \frac{1}{LCs^2+1}E(s) \quad \rightarrow \quad \left(LCs^2+1\right)V(s) = E(s) \quad \rightarrow \quad LC\frac{d^2 v}{dt^2} + v = e$$

Il denominatore delle funzioni di trasferimento posto =0 fornisce l'equazione caratteristica $LCs^2+1=0$

Poli e zeri di *H(s)*

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} X(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} X(s)$$

Il numeratore $N(s)$, di grado m, ha m radici complesse z_i = **zeri** di $H(s)$

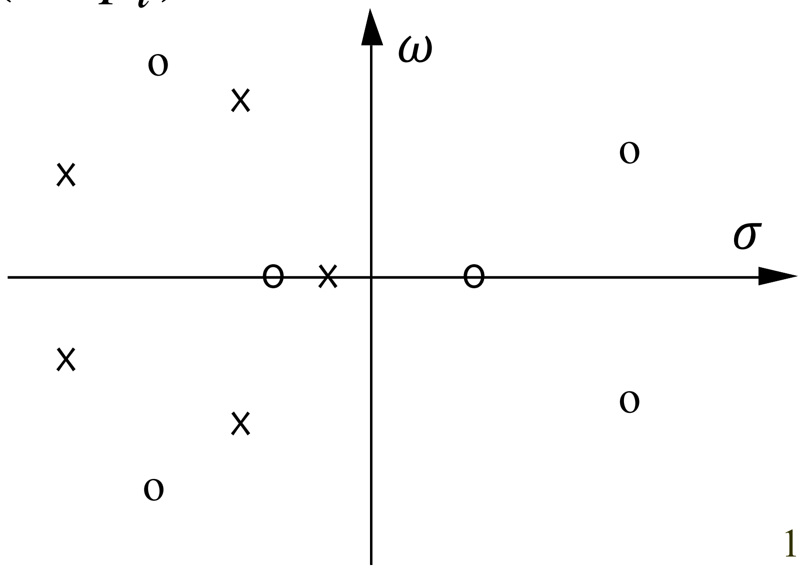
Il denominatore $D(s)$, di grado n, ha n radici complesse p_i = **poli** di $H(s)$

Con essi $H(s)$ può essere fattorizzata:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m}{a_n} \frac{\prod_{i=1}^{m} (s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s - p_i)}$$

La mappa di zeri e, specialmente, dei poli identifica il tipo di risposta:

Ad esempio in rete assolutamente stabile i poli stanno tutti a sinistra dell'asse immaginario



Reti singolari

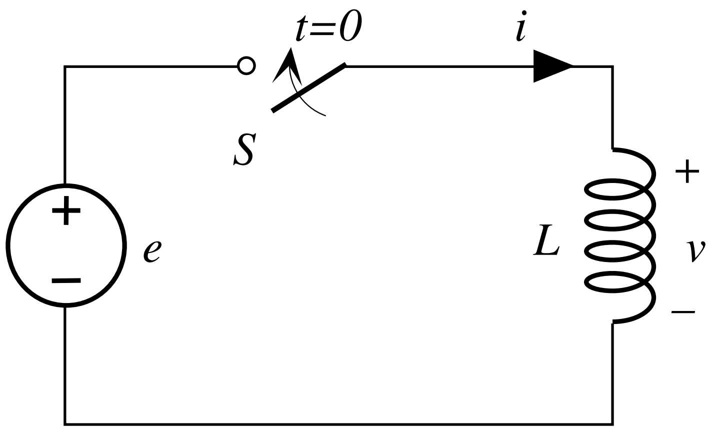
$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_m}{a_n}\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

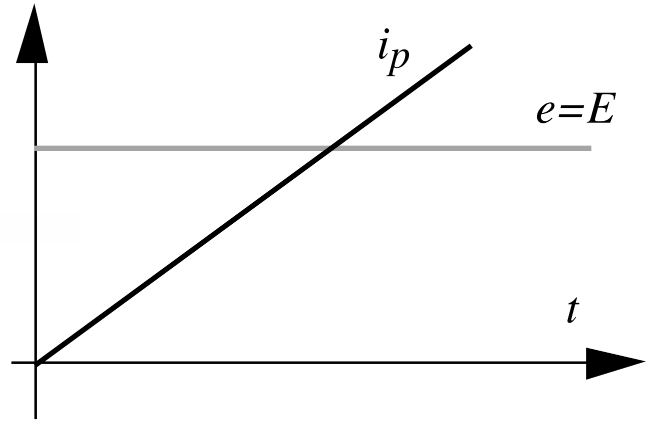
Se la pulsazione s^* dell'ingresso $X(s^*)$ coincide con un polo p_i nell'integrale particolare si ha $H(s^*) \rightarrow \infty$ e $Y_p=H(s^*)X(s^*) \rightarrow \infty$

$\rightarrow$ l'integrale particolare sincrono con l'ingresso non esiste $\rightarrow$ la rete è singolare rispetto a quell'ingresso (il regime è impossibile). Esiste però un integrale particolare y_p con elongazione a rampa nel tempo.

ingresso	$x(t)$	s^* **di** $x(t)$	p_i **di** $H(s)$	$y_p(t)$
costante	X	$0+j0$	$0+j0$	tK
sinusoidale	$X_M sen(\omega t+\chi)$	$j\omega$	$\pm j\omega$	$tKsen(\omega t+\gamma)$

Esempio





$$I_p(s) = \frac{1}{sL}E(s) = \frac{1}{L}\frac{1}{(s-0)}E(s)$$ → non esiste soluzione costante ($s^*=0$)

ma esiste → $i_p = K\,t$

anti-trasformazione → e.d.o.: $L\dfrac{di}{dt} = E$ → $i_p = K\,t$