Università di Padova - Scuola di Ingegneria

Massimo Guarnieri

Elettrotecnica

Elementi di Elettromagnetismo

Capitolo 1:
Fenomeni di conduzione elettrica e resistori

Metodo di studio

Reti elettriche → quantità estensive (tensioni = attribuite a linee, correnti = attribuite a superfici, oltre che al tempo)

Elettromagnetismo → quantità densitarie, specifiche = attribuite ai punti (oltre che al tempo = campi elettromagnetici)

I diversi aspetti dell’elettromagnetismo richiedono sempre due campi:

- uno strutturalmente associabile alle linee
- uno strutturalmente associabile alle superfici
- I due sono correlati dalle proprietà dei mezzi materiali che occupano lo spazio ove si sviluppano

Campo di conduzione elettrica

Migrazione delle cariche elettriche libere (meno vincolate ad atomi, molecole, reticoli cristallini) nei mezzi materiali

Quantità densitarie coinvolte:

- campo elettrico $\boldsymbol{E}(P,t)$
- densità di corrente $\boldsymbol{J}(P,t)$

Ipotesi semplificativa (non indispensabile) *condizioni quasi-stazionarie*,

- campo di corrente solenoidale ($div\boldsymbol{J}=0$)
- campo elettrico conservativo ($rot\boldsymbol{E}=\mathbf{0}$, e quindi $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_c=-grad\,\phi$).

n.b.: $\boldsymbol{E}_c$ = componente coulombiana (Fisica: $\boldsymbol{E}_{el}$)

ϕ = potenziale elettrico scalare (Fisica: V)

Legge di Ohm

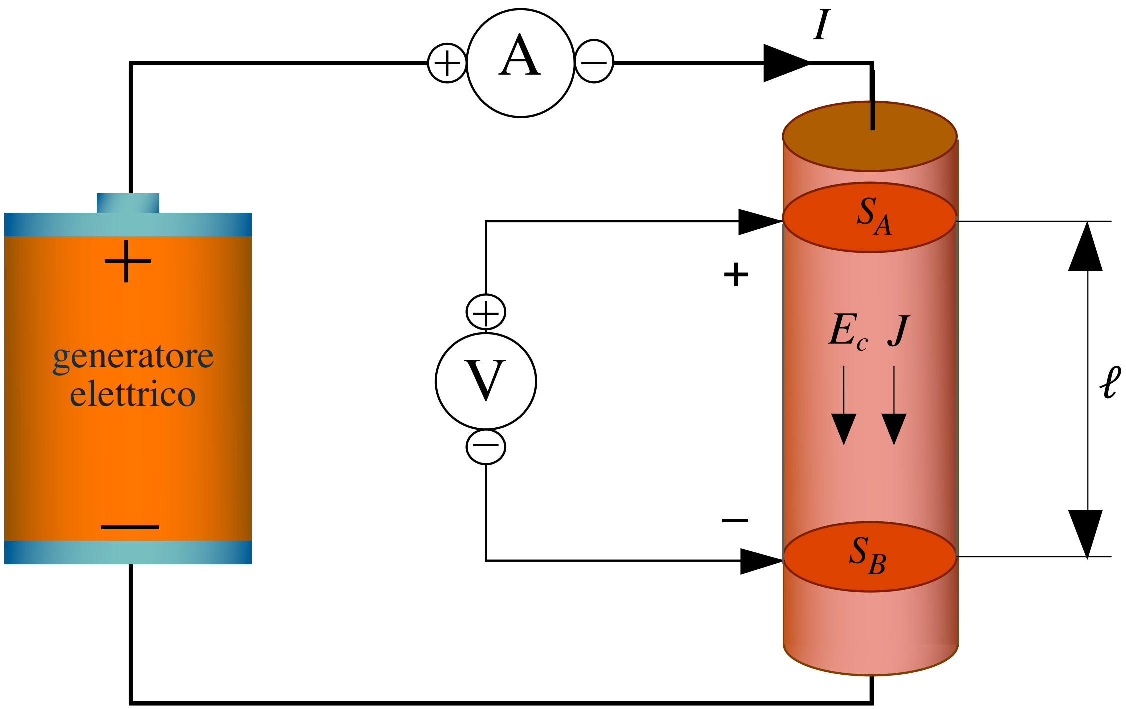
$$v = R\,i \qquad\qquad i = G\,v$$

R = resistenza elettrica

u.m.: *ohm* [Ω] = [V/A]

G = 1/*R* = conduttanza elettrica

u.m.: *siemens* [S] = [A/V]



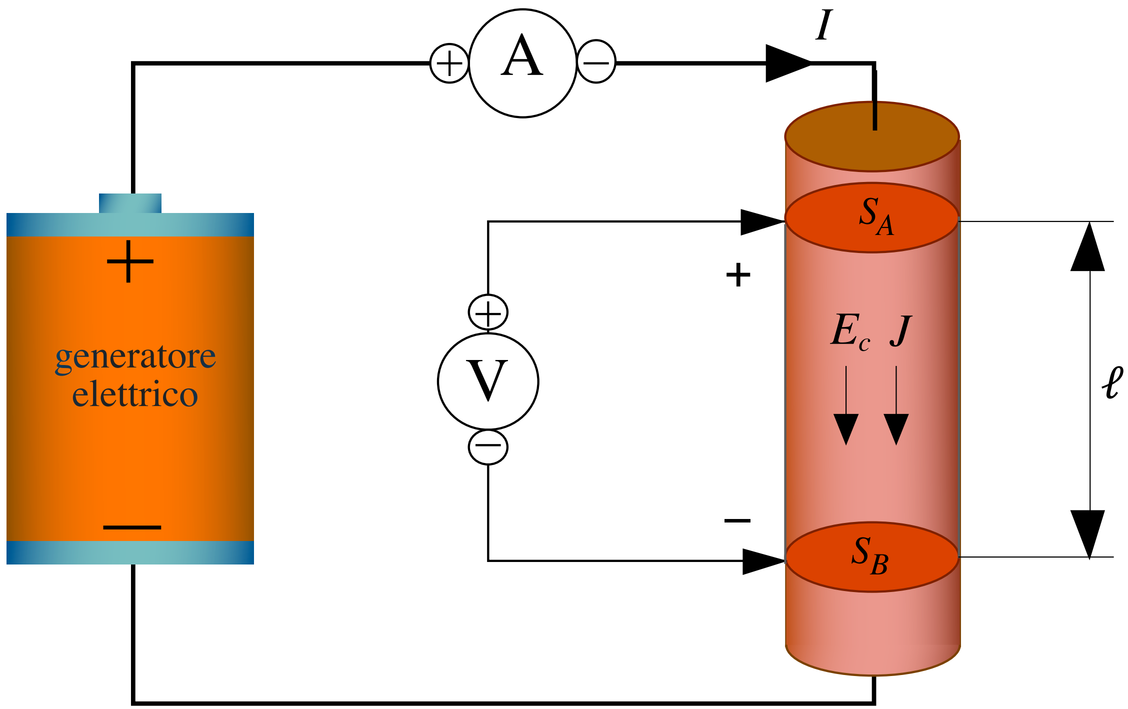
$$R = \rho\frac{\ell}{S} \qquad\qquad G = \gamma\frac{S}{\ell}$$

ρ = resistività – u.m.: *ohm.metro* [Ωm]

γ=1/ρ = conducibilità – u.m.: *siemens/metro* [S/m]

sono caratteristiche del materiale

Effetto Joule



Potenza dissipata in calore

$$p = R\,i^2$$

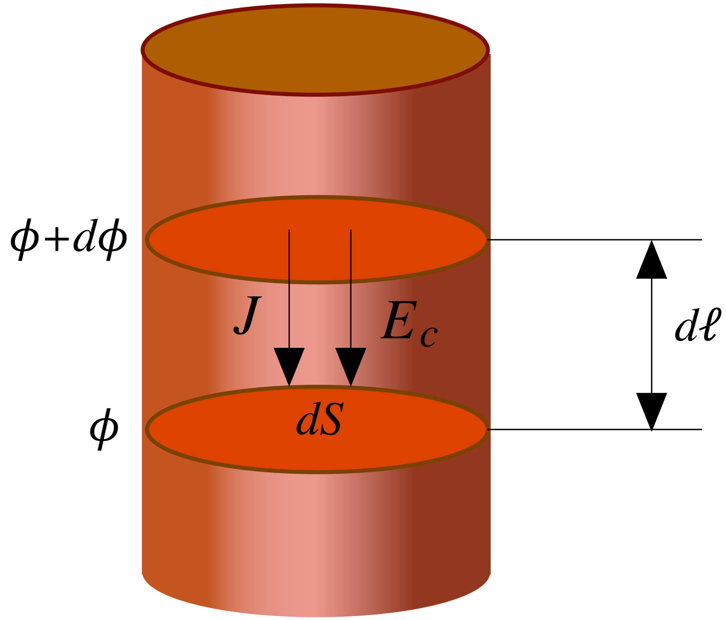
+ legge di Ohm:

$$p = R\,i^2 = v\,i$$

→ *p* dissipata in calore entra nel conduttore in forma elettrica, come prodotto di tensione per corrente

Leggi di Ohm alle grandezze specifiche = relazione costitutiva del campo di corrente

Legge di Ohm su cilindretto infinitesimo:



$$dv = \rho \frac{d\ell}{dS} di \qquad \rightarrow \qquad \frac{dv}{d\ell} = \rho \frac{di}{dS}$$

quantità densitarie (specifiche):

- $E_c = dv/d\ell$ = campo elettrico
- $J = di/dS$ = densità di corrente

generalizzazione in forma vettoriale

→ $$\boldsymbol{E}(P,t) = \rho \boldsymbol{J}(P,t) \qquad \boldsymbol{J}(P,t) = \gamma \boldsymbol{E}(P,t)$$

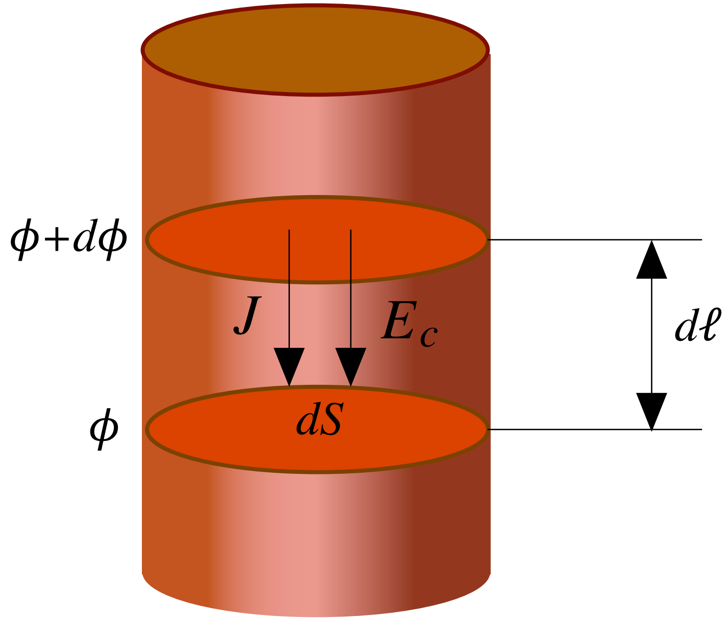
Potenza specifica dissipata

Legge di Joule sul cilindretto infinitesimo:

$$dp = \rho \frac{d\ell}{dS} di^2 = \rho\, d\ell\, dS \left(\frac{di}{dS} \right)^2$$

$d\tau = d\ell dS$ = volumetto:

$$\frac{dp}{d\tau} = \rho \left(\frac{di}{dS} \right)^2 \qquad \rightarrow \qquad P = \rho J^2$$



Resistività dei mezzi

Varia con la temperatura:

$$\rho = \rho_o(1+\alpha\vartheta)$$

ϑ = incremento di temperatura rispetto a ρ_o

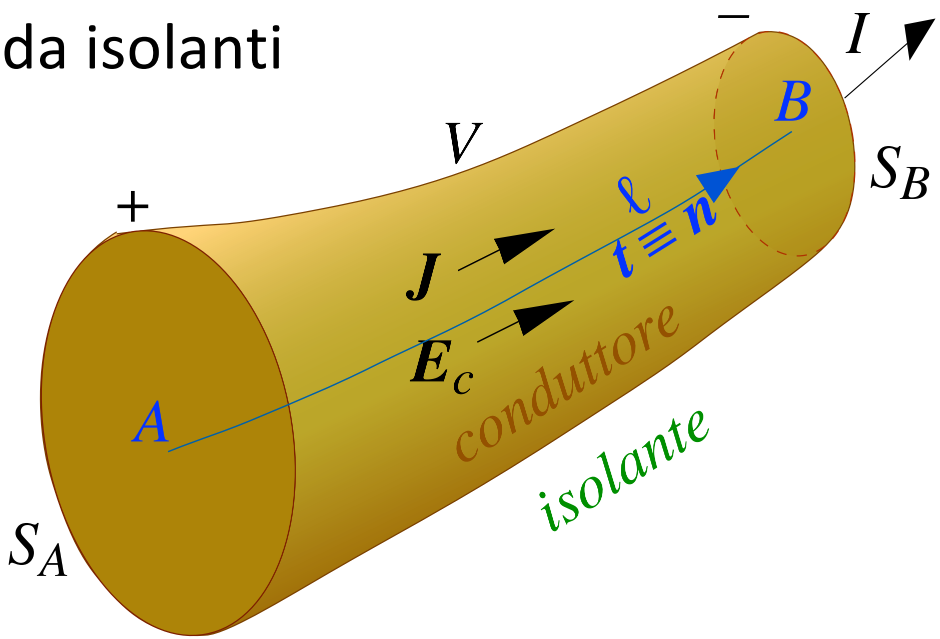
α = coefficiente di temperatura

Classificazione

- superconduttori $\rho = 0$ (a T = 0–30 K e 30-100 K)
- conduttori metallici $\rho = 10^{-8} - 10^{-6}$ Ωm, $\alpha > 0$
- soluzioni elettrolitiche $\rho < 10^{-1}$ Ωm
- semiconduttori $\rho = 10^{-1} - 10^{3}$ Ωm, $\alpha < 0$
- isolanti $\rho = 10^{8} - 10^{15}$ Ωm

Canalizzazione del campo di corrente

Conduttori di forma generica circondati da isolanti



→ ***J*** non può attraversare la superficie laterale

→ corrente nulla attraverso S_ℓ

$$i = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

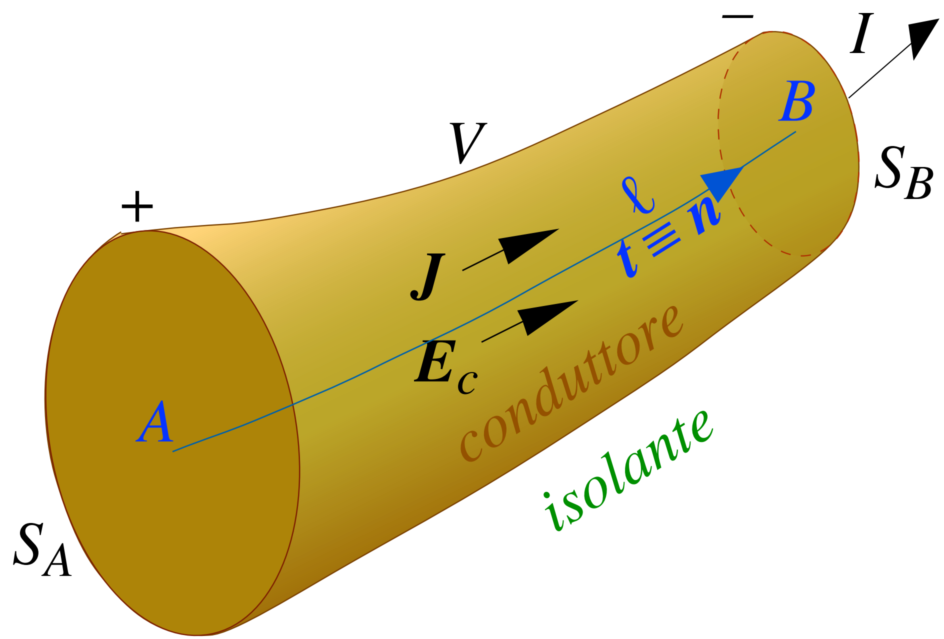
J è canalizzato = ***tubo di flusso di J***

Ipotesi di studio:

1. campo di corrente solenoidale: *div* ***J*** = 0
2. campo elettrico conservativo: *rot* ***E***= **0**

Corrente del tubo di flusso

1.: *div* $\boldsymbol{J} = 0$



→ $$i = \oint_{S_c} \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = 0$$

→ la somma della corrente uscente dalle superfici tappo $S_A + S_B$ è nulla (le correnti uscenti dalle due superfici tappo sono opposte)

→ la corrente entrante attraverso S_A è uguale a quella uscente da S_B

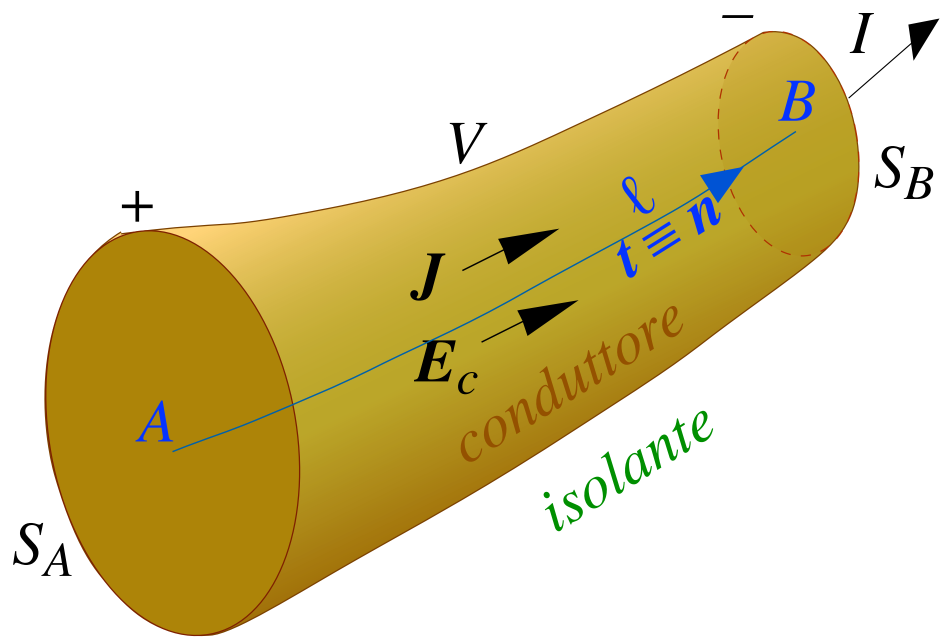
$$i_A = \int_{S_A} \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = i_B = \int_{S_B} \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

Corrente del tubo di flusso

1.: *div* $\boldsymbol{J} = 0$

$$i_A = \int_{S_A} \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = i_B = \int_{S_B} \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

Vale per qualsiasi superfice tappo S_A e S_B



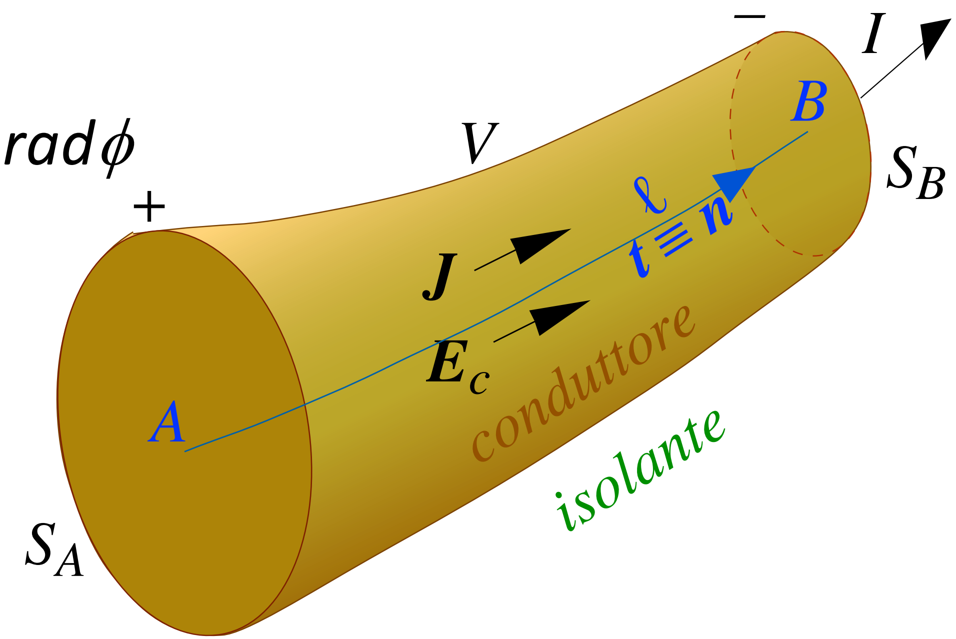
→ $i_A = i_B = i$ è proprietà del tubo di flusso

→ i è la **portata del tubo di flusso** o **corrente del tubo di flusso**

Tensione del tubo di flusso

2.: *rot* $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$

→ $\boldsymbol{E}$ è conservativo nel tubo: $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_c = -grad\,\phi$



→ $$v = \oint_{\ell_c} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{t}\, d\ell$$

ℓ_1 e ℓ_2: due linee aperte che iniziano e termino negli stessi punti, orientante concordemente

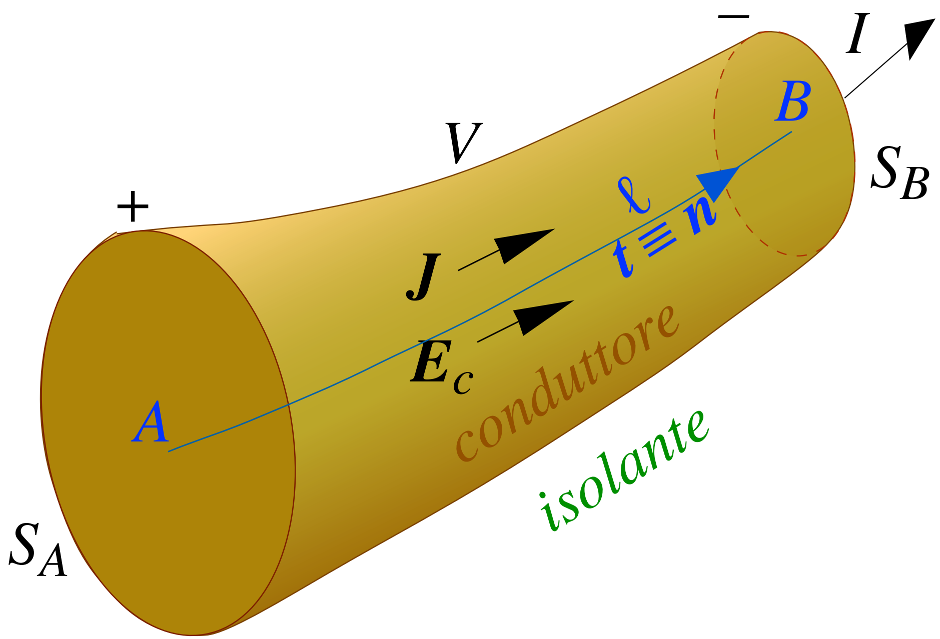
$$v_1 = \int_{\ell_1} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{t}\, d\ell = v_2 = \int_{\ell_2} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{t}\, d\ell = \phi_A - \phi_B$$

→ la tensione dipende solo dagli estremi delle due linee, è una differenza di potenziale

Tensione del tubo di flusso

2.: *rot* $\boldsymbol{E} = \mathbf{0}$

estremi delle linee in A e B di S_A e S_B , scelte ortogonali a $\boldsymbol{E}$ in ogni punto



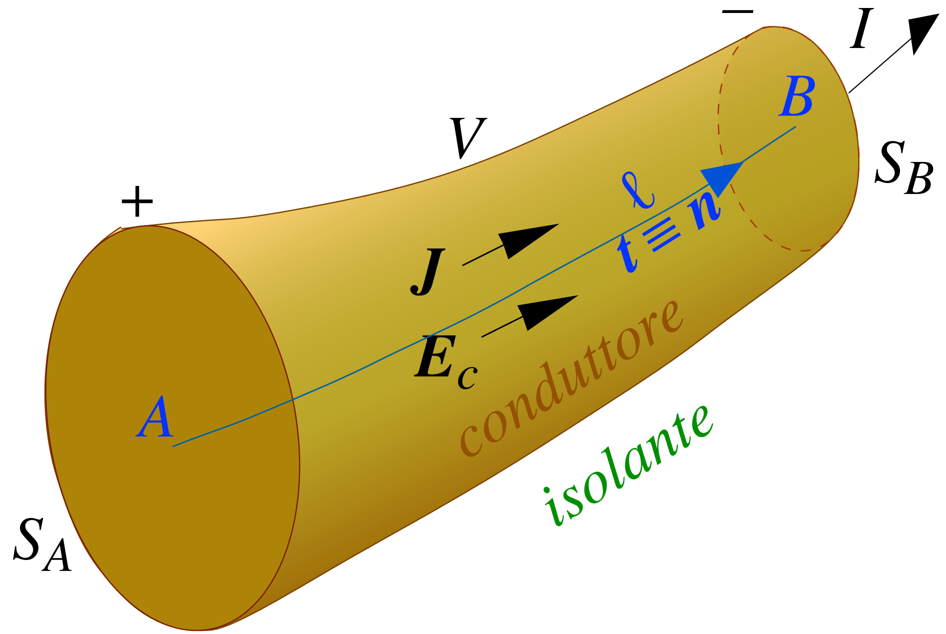
→ S_A e S_B = superfici equipotenziali

→ comunque siano scelti A e B su S_A e S_B : $v = \phi_A - \phi_B$
ha sempre lo stesso valore → è proprietà del tratto di tubo di flusso tra S_A e S_B

→ v è la **tensione del tratto di tubo di flusso**

Resistenza del tratto di tubo di flusso

Da **corrente del tronco tubo di flusso**
e **tensione del tronco di tubo di flusso:**



$$v = R\,i \qquad\qquad i = G\,v$$

R = **resistenza del del tronco di tubo di flusso**
G = **conduttanza del del tronco di tubo di flusso**

Conduttore filiforme curvilieo

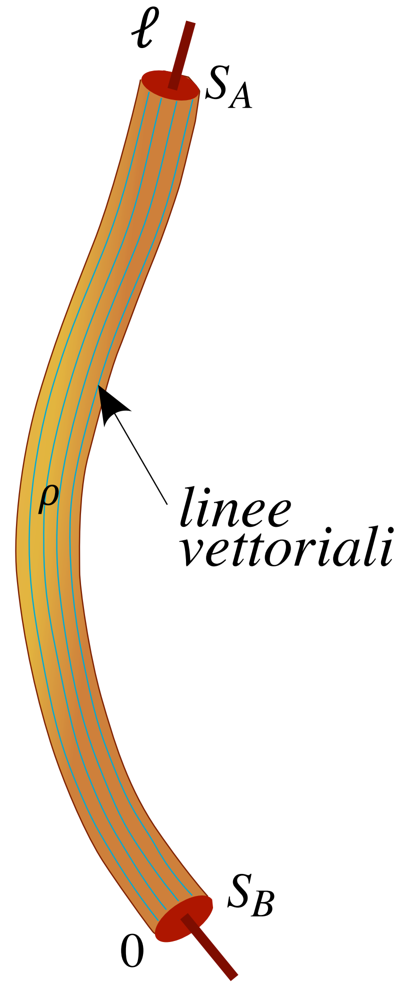
S piccola
→ ***J*** parallelo all'asse e uniforme su *S*

$J = I/S$

$E_c = \rho J$

$V = E_c \ell = \rho J \ell$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\rho J \ell}{JS} = \rho \frac{\ell}{S}$$



Conduttore cilindrico (radiale)

S_A e S_B coassiali ed equipotenziali, con $V=\phi_A-\phi_B>0$

→ ***E*** ed ***J*** radiali

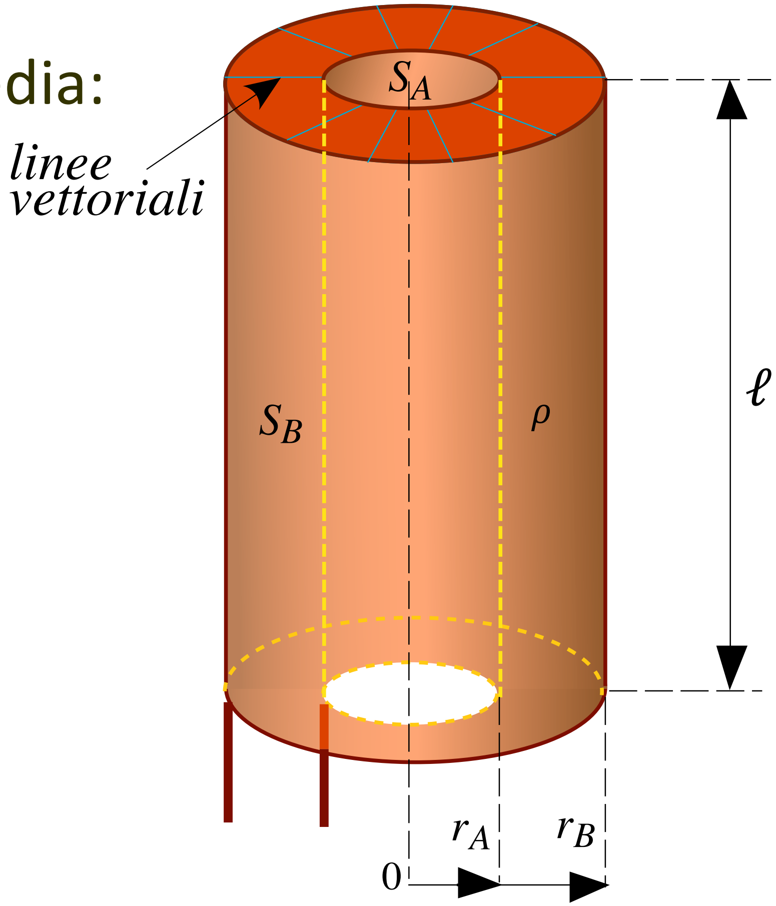
I uniforme su ogni superficie cilindrica intermedia:

$J(r) = I/S = I/2\pi r\ell \qquad r_a \leq r \leq r_b$

$E_c(r) = \rho J = \rho I/2\pi r\ell$

$$V = \int_{r_A}^{r_B} E_c\, dr = \int_{r_A}^{r_B} \frac{\rho\, I}{2\pi\, \ell\, r} dr = \frac{\rho\, I}{2\pi\, \ell} \ln\frac{r_B}{r_A}$$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\rho}{2\pi\, \ell} \ln\frac{r_B}{r_A}$$



Conduttore sferico (radiale)

S_A e S_B concentriche ed equipotenziali, con $V=\phi_A-\phi_B>0$

→ ***E*** ed ***J*** radiali

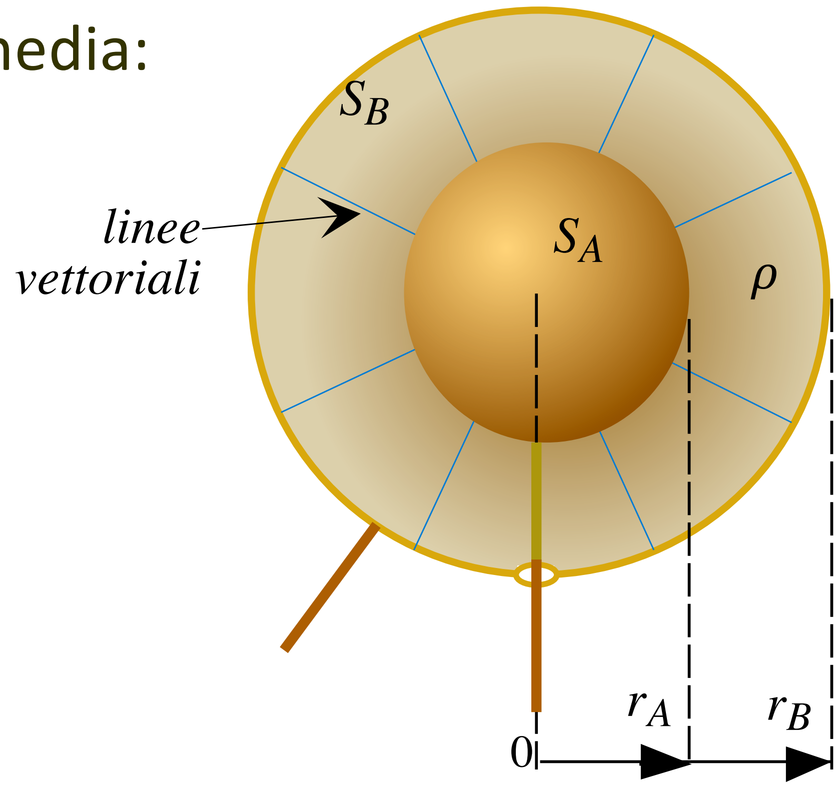
I uniforme su ogni superficie sferica intermedia:

$J(r) = I/S = I/4\pi r^2 \qquad r_a \leq r \leq r_b$

$E_c(r) = \rho J = \rho I/4\pi r^2$

$$V = \int_{r_A}^{r_B} E_c\, dr = \int_{r_A}^{r_B} \frac{\rho\, I}{4\pi\, r^2} dr = \frac{\rho\, I}{4\pi}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

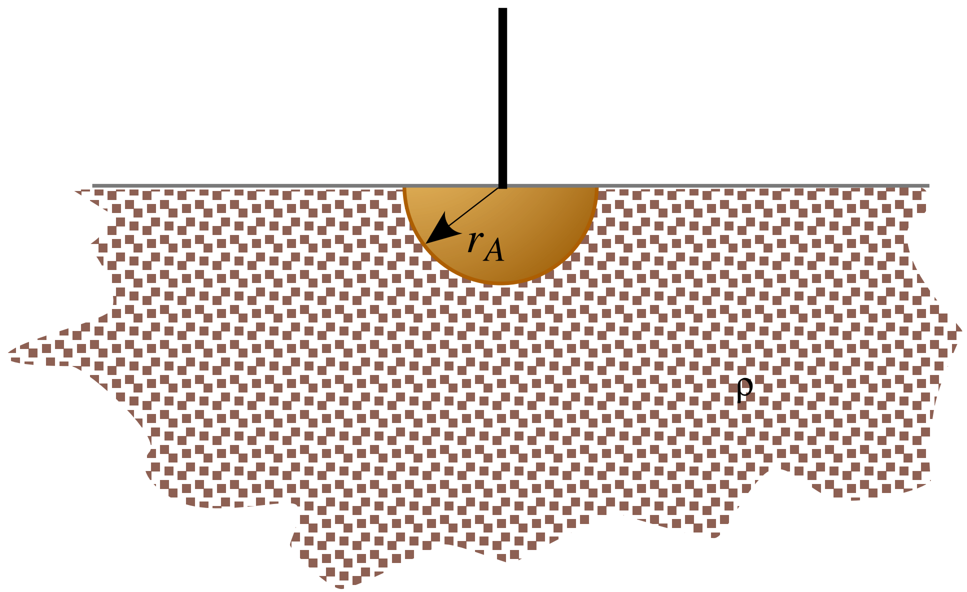


Conduttore emisferico (radiale)

S_A e S_B emisferiche concentriche ed equipotenziali, dimezzate rispetto al conduttore sferico → R raddoppiata

S_B molto lontana da S_A: $r_B \rightarrow \infty$

$$V = \frac{\rho I}{2\pi r_A} \quad , \quad R = \frac{\rho}{2\pi r_A}$$



È il modello semplificato del dispersore di terra, usato in moltissimi impianti elettrici a fini diversi (es. antinfortunistici)

Legge di continuità della corrente

La corrente che fluisce fuori da una superficie chiusa S_c (= carica che esce da S_c nell'unità di tempo) è uguale dalla diminuzione di carica dentro S_c nell'unità di tempo:

$$i_u = -\frac{dq}{dt}$$

È la forma integrale

Espressioni integrali dei due membri:

$$i_u = \oint_{S_c} \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n}_{est}\, dS = \int_\tau div\, \boldsymbol{J}\, d\tau \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\int_\tau \rho_c\, d\tau = \int_\tau \frac{\partial \rho_c}{\partial t} d\tau$$

Forma differenziale (locale) → $$div\, \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$$

È certamente: $div\boldsymbol{J}=0$ in condizioni stazionarie (derivate temporali nulle) … in condizioni variabili in generale non è vero.

Se succede ($\partial\rho_c/\partial t=0$) → *condizioni variabili quasi-stazionarie*