

Università di Padova - Scuola di Ingegneria

Massimo Guarnieri

Elettrotecnica

Elementi di Elettromagnetismo

Capitolo 3:

Fenomeni magnetici ed induttori

Campo magnetico

Riguarda gli effetti e le interazioni delle correnti elettriche.

Quantità densitarie coinvolte:

- campo magnetico $\mathbf{H}(P,t)$ – correlato alle linee
- induzione magnetica $\mathbf{B}(P,t)$ – correlato alle superfici

Ipotesi semplificativa (non indispensabile) *condizioni quasi-stazionarie*:
campo di corrente solenoidale ($\text{div } \mathbf{J}=0$).

Relazione costitutiva del campo magnetico

$$\mathbf{B}(P,t) = \mu \mathbf{H}(P,t)$$

μ = **permeabilità magnetica** – u.m. henry/metro [H/m]=[Vs/Am]

→ u.m. di \mathbf{H} : ampere/metro [A/m]

n.b.: u.m. di \mathbf{B} = tesla [T] = [Vs/m²]

μ = proprietà del mezzo

mezzo uniforme (μ = costante magnetica)

- omogeneo: μ non varia con P
- lineare: μ non varia con l'intensità di \mathbf{H}
- isotropo: μ non varia con la direzione di \mathbf{H}

Espressioni di H in mezzo uniforme

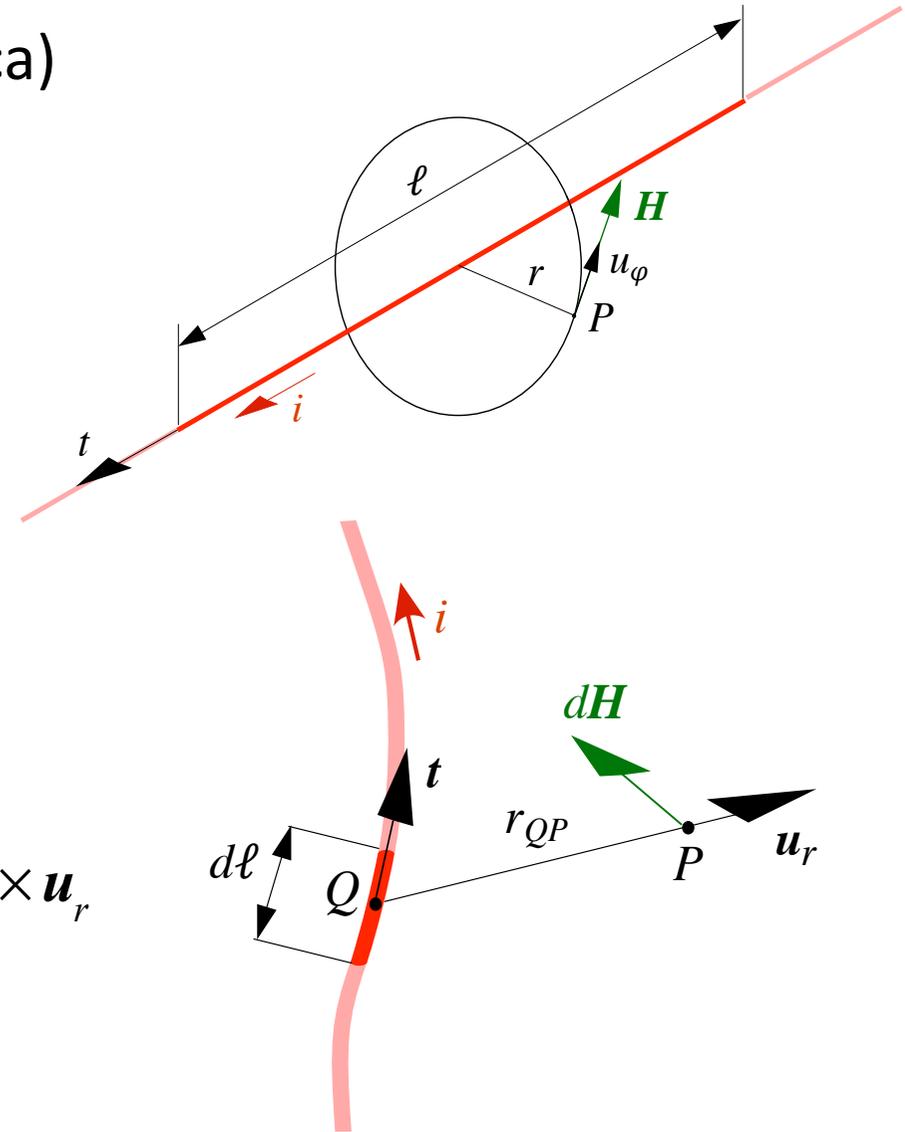
Desunte dalle espressioni di \mathbf{B} (note da Fisica)

- corrente filiforme rettilinea
 - Legge di Biot-Savart

$$\mathbf{B}(P) = \frac{\mu}{2\pi} \frac{i}{r} \mathbf{u}_\varphi \quad \rightarrow \quad \mathbf{H}(P) = \frac{1}{2\pi} \frac{i}{r} \mathbf{u}_\varphi$$

- tratto infinitesimo di corrente filiforme
 - Prima legge elementare di Laplace

$$d\mathbf{B}(P) = \frac{\mu i d\ell}{4\pi r_{QP}^2} \mathbf{t} \times \mathbf{u}_r \quad \rightarrow \quad d\mathbf{H}(P) = \frac{i d\ell}{4\pi r_{QP}^2} \mathbf{t} \times \mathbf{u}_r$$

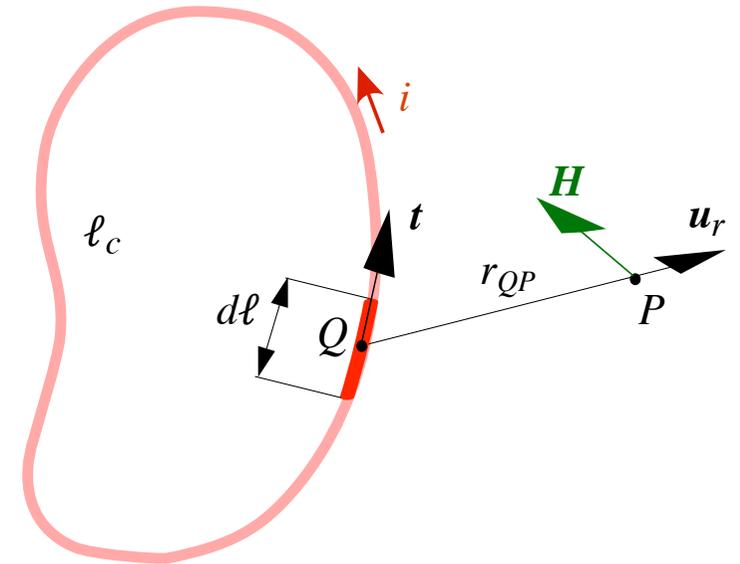


Espressioni di H in mezzo uniforme

Desunte dalle espressioni di B (note da Fisica)

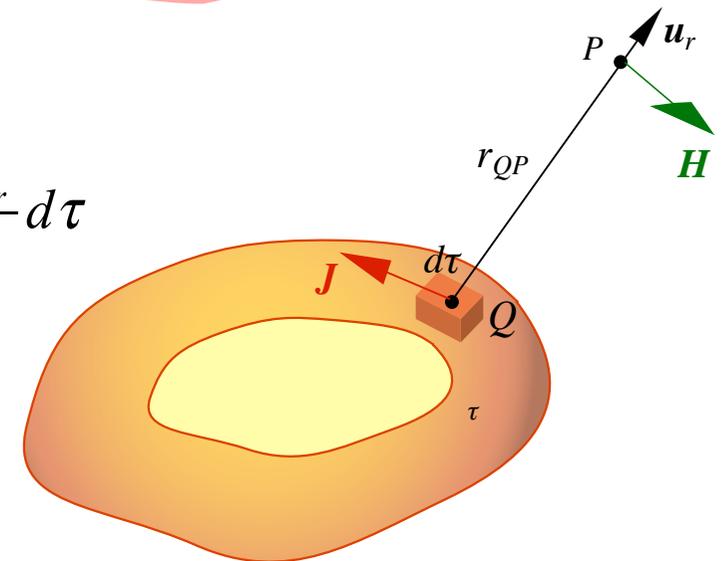
- corrente filiforme generica
- Legge di Ampère-Laplace

$$B(P) = \frac{\mu i}{4\pi} \oint_{\ell_c} \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{u}_r}{r_{QP}^2} d\ell \quad \rightarrow \quad H(P) = \frac{i}{4\pi} \oint_{\ell_c} \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{u}_r}{r_{QP}^2} d\ell$$



- distribuzione volumica generica di corrente

$$B(P) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}(Q) \times \mathbf{u}_r}{r_{QP}^2} d\tau \quad \rightarrow \quad H(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}(Q) \times \mathbf{u}_r}{r_{QP}^2} d\tau$$



→ In tutti i casi H non dipende da μ
(uniforme), ma solo dalla distribuzione
della corrente elettrica

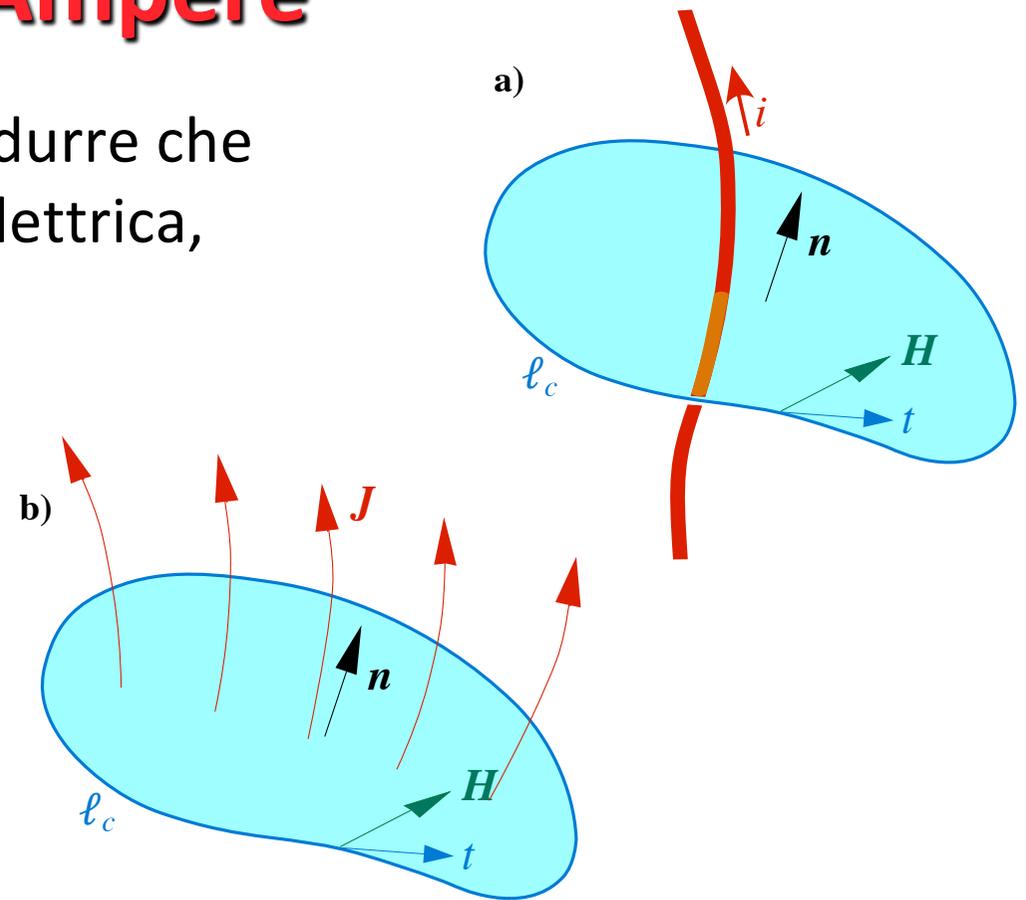
Legge di Ampère

Dalle precedenti espressioni si può dedurre che comunque sia distribuita la corrente elettrica, data una linea chiusa ℓ_c , vale sempre:

$$\oint_{\ell_c} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} \, d\ell = i$$

= la circuitazione di \mathbf{H} lungo una linea chiusa ℓ_c è uguale alla corrente elettrica i concatenata da ℓ_c (a prescindere da μ)

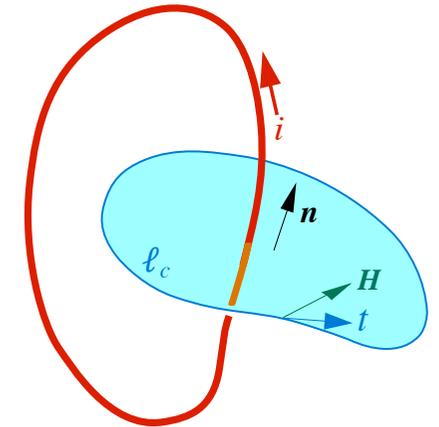
Questa è la **forma integrale della legge di Ampère**



Legge di Ampère

$$\oint_{\ell_c} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} d\ell = i$$

Non deve dipendere da S orlata da ℓ_c su cui si valuta i
→ i deve essere solenoidale: $\text{div } \mathbf{J} = 0$



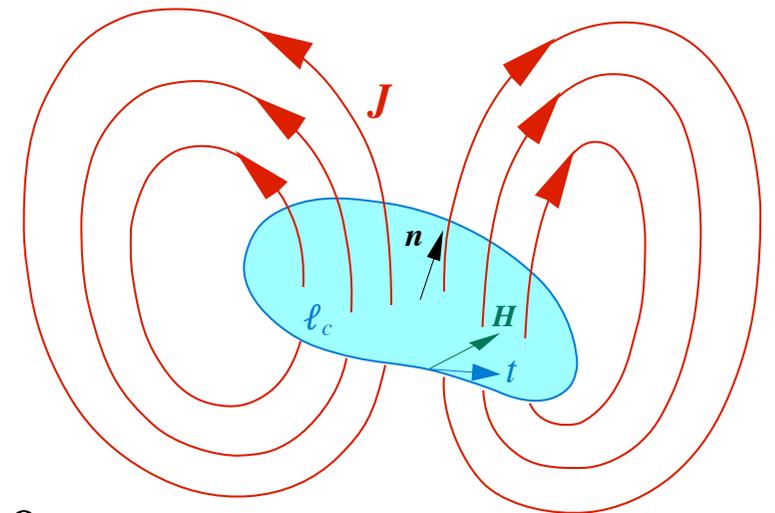
Espressioni integrali dei due membri
(teorema di Stokes):

$$\oint_{\ell_c} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} d\ell = \int_S \text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS \quad \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS$$

Forma differenziale (locale) → $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$

→ le linee vettoriali di \mathbf{H} hanno vortici ove $\mathbf{J} \neq 0$

La legge di Ampère è la **proprietà fondamentale** di \mathbf{H} e vale sempre, anche in mezzi **non uniformi**: ne è la definizione



Proprietà di H e di B

La circuitazione di B lungo una linea chiusa è uguale μi solo se il mezzo è uniforme.

Tale proprietà **non vale se il mezzo non è uniforme** oppure se il campo occupa **mezzi con permeabilità magnetiche diverse**.

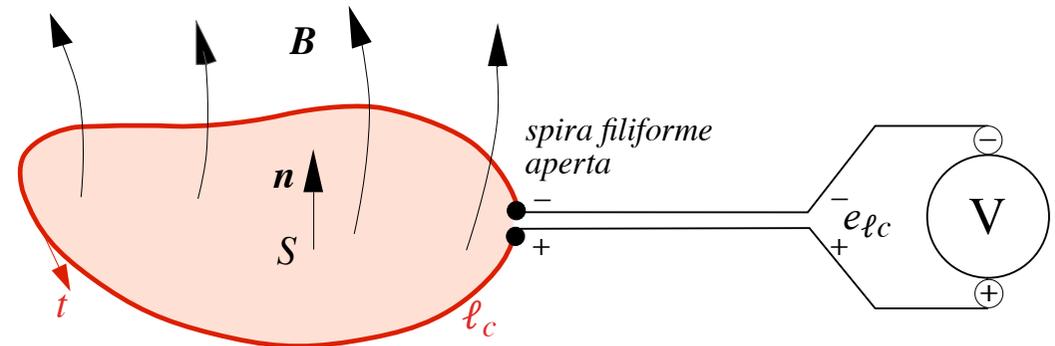
Quindi:

- Le proprietà di H sono connesse ai suoi integrali di linea e al suo rotore, ma non ai suoi integrali di superficie e alla sua divergenza.
- Le proprietà di B sono connesse ai suoi integrali di superficie e alla sua divergenza, ma non ai suoi integrali di linea e al suo rotore.

Proprietà di B – legge di Faraday-Neumann

Spira conduttrice quasi chiusa (ℓ_c) sottoposta a B , con B o S che variano
→ appare forza elettromotrice (fem) lungo ℓ_c misurata dal voltmetro

$$e_{\ell_c}(t) = -\frac{d\varphi_c(t)}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$$



φ_c = flusso di induzione

Questa è la forma integrale della legge di Faraday-Neumann

n.b.:

- S = superficie aperta orlata da ℓ_c
- vettori \mathbf{n} di S e \mathbf{t} di ℓ_c associati dalla regola destrorsa
- + e - della fem e \mathbf{t} associati dalla convenzione dei generatori

Proprietà di B – legge di Faraday-Neumann

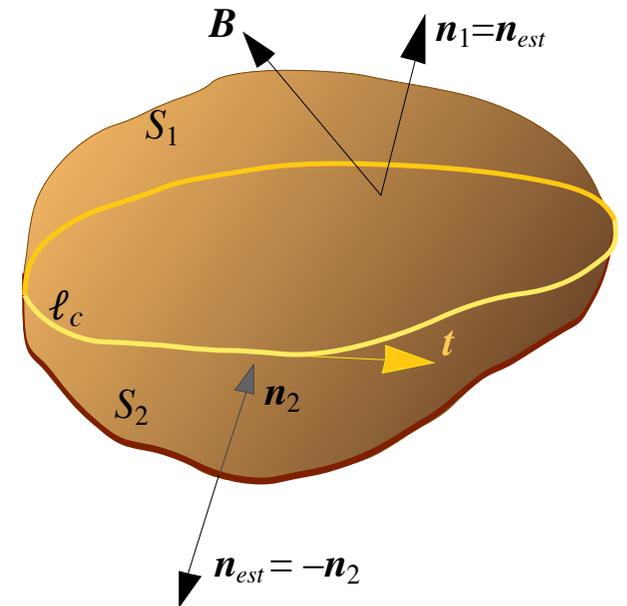
$$e_{\ell_c}(t) = -\frac{d\varphi_c(t)}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$$

Flusso di induzione

$$\varphi(t) \triangleq \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$$

deve avere stesso valore su ogni S orlata da ℓ_c
come S_1 e S_2 con \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 equiversi
(entrambi associati a \mathbf{t} dalla regola destrogira)

$$\rightarrow \varphi_1 = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_1 dS = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_2 dS = \varphi_2$$



Proprietà di \mathbf{B} – legge di Faraday-Neumann

$$\oint_{S_c} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_{est} dS = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_1 dS - \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_2 dS = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$\rightarrow \oint_{S_c} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_{est} dS = 0$$

proprietà fondamentale di \mathbf{B} – forma integrale

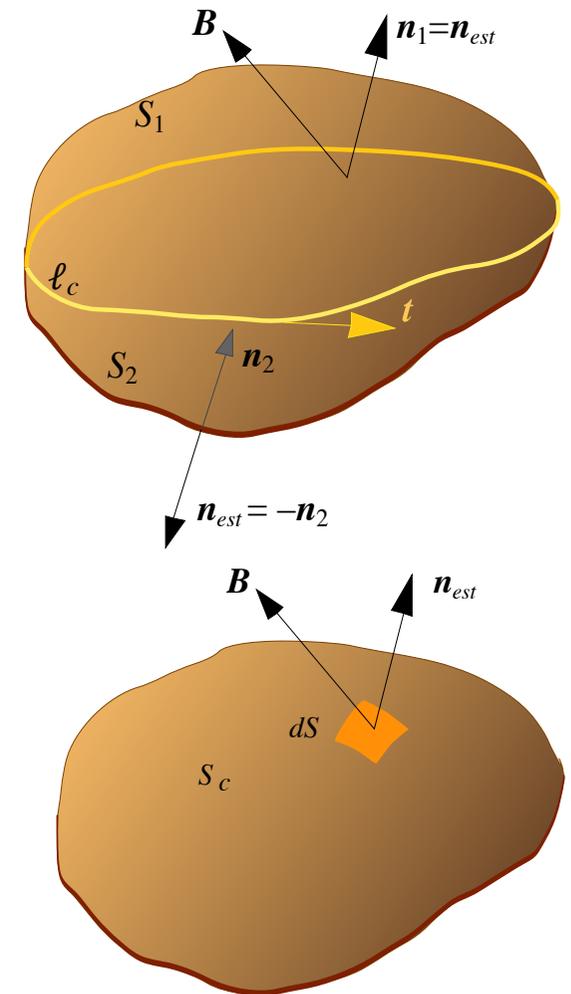
Teorema della divergenza:

$$\oint_{S_c} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_{est} dS = \int_{\tau} \text{div} \mathbf{B} d\tau$$

forma differenziale (locale) $\rightarrow \text{div} \mathbf{B} = 0$

$\rightarrow \mathbf{B}$ è privo di sorgenti e pozzi

Per \mathbf{H} vale solo in mezzo uniforme, altrimenti \mathbf{H} ha sorgenti e pozzi



Potenziale vettore \mathbf{A}

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

\mathbf{A} = potenziale vettore – u.m. [Tm]=[Vs/m]

Flusso di induzione + Teorema di Stokes

$$\varphi(t) = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\ell_c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} d\ell$$

→ Il flusso di induzione attraverso una superficie aperta è la circuitazione di \mathbf{A} lungo il suo orlo

versori \mathbf{n} di S e \mathbf{t} di ℓ_c associati dalla regola destrogira

Espressioni di A in mezzo uniforme

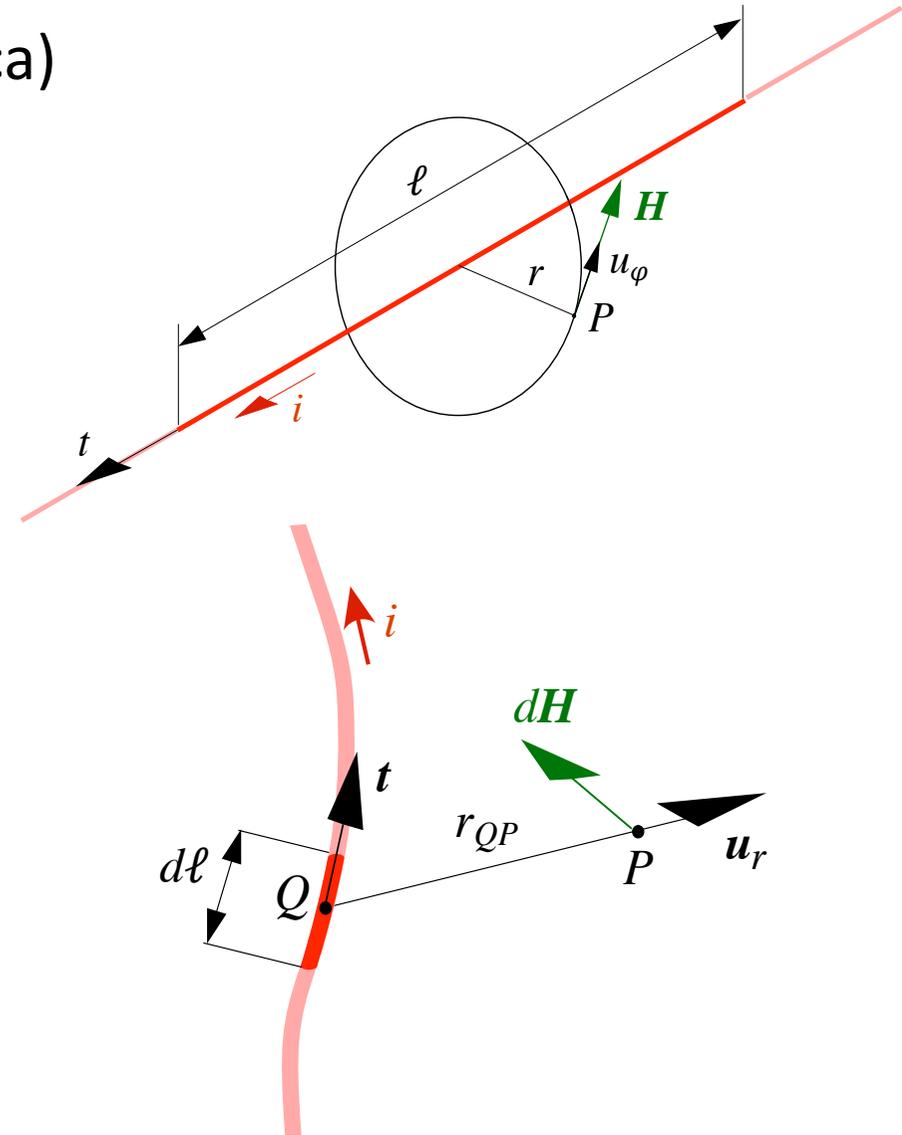
Desunte dalle espressioni di B (note da Fisica)

- corrente filiforme rettilinea

$$A(P) = \frac{\mu i t}{4\pi} \int_{\ell} \frac{1}{r_{QP}} d\ell$$

- tratto infinitesimo di corrente filiforme

$$dA(P) = \frac{\mu i t(Q)}{4\pi r_{QP}} d\ell$$



Espressioni di A in mezzo uniforme

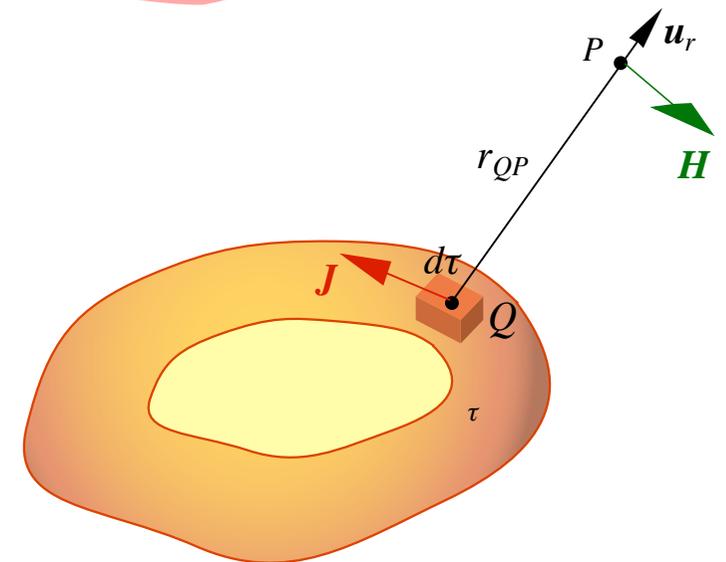
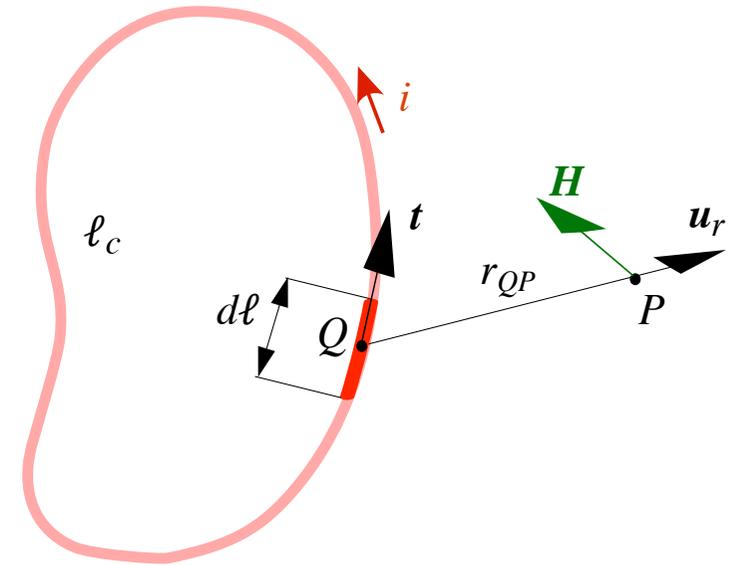
Desunte dalle espressioni di \mathbf{B} (note da Fisica)

- corrette filiformi generica

$$A(P) = \frac{\mu i}{4\pi} \int_{\ell} \frac{\mathbf{t}(Q)}{r_{QP}} d\ell$$

- distribuzione volumica generica di corrente

$$A(P) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}(Q)}{r_{QP}} d\tau$$



Analisi della legge di Faraday-Neumann

$$e_{\ell_c}(t) = -\frac{d\varphi_c(t)}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$$

$$e_{\ell_c}(t) = -\left. \frac{\partial \varphi_c(t)}{\partial t} \right|_{\ell_c=\text{cost}} - \left. \frac{\partial \varphi_c(t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{B}=\text{cost}} = e_t(t) + e_m(t)$$

• fem trasformatrice $e_t(t) = -\left. \frac{\partial \varphi_c(t)}{\partial t} \right|_{\ell_c=\text{cost}} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS$

• fem mozionale $e_m(t) = -\left. \frac{\partial \varphi_c(t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{B}=\text{cost}} = \oint_{\ell_c} (\mathbf{v}_\ell \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{t} d\ell$

$$e_{\ell_c}(t) = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS + \oint_{\ell_c} (\mathbf{v}_\ell \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{t} d\ell$$

FEM trasformatorica – campo elettrico indotto

- Campo elettrico indotto E_i (teorema di Stokes)

$$e_t(t) = \oint_{\ell_c} \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{t} d\ell \rightarrow \oint_{\ell_c} \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{t} d\ell = \int_S \text{rot } \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{n} dS$$

$$1) \quad e_t(t): \quad \int_S \text{rot } \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{n} dS = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS$$

→ Forma differenziale della legge di induzione $\text{rot } \mathbf{E}_i = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

$$2) \quad e_t(t): \quad \oint_{\ell_c} \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{t} d\ell = - \frac{\partial}{\partial t} \oint_{\ell_c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} d\ell = - \oint_{\ell_c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{t} d\ell$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{E}_i = - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Campo elettrico totale

Somma dei campi coulombiano e indotto

$$\mathbf{E}(P,t) = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_i$$

In funzione dei potenziali:

$$\mathbf{E}(P,t) = -\text{grad } \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

È la grandezza che compare nelle equazioni di Maxwell.

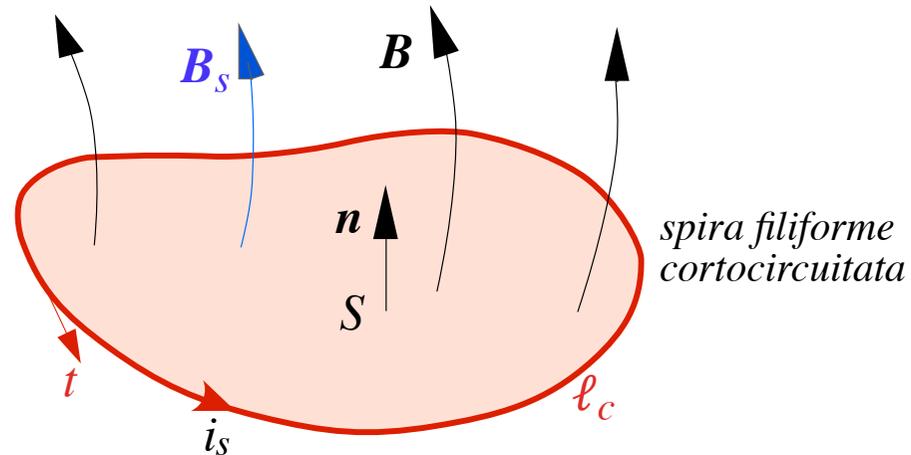
Applicando il rotore si ottiene la **seconda equazione di Maxwell**:

$$\text{rot } \mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{E}_i = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Legge di Lenz

Legge di Faraday-Neumann: materializzando ℓ_c con una spira sottile chiusa, se \mathbf{B} diminuisce in modulo la derivata di φ_c è negativa $\rightarrow e_{\ell_c}$ è positiva \rightarrow genera nella spira una corrente i positiva rispetto a \mathbf{t} \rightarrow questa corrente produce un campo \mathbf{B}_s con verso associato a \mathbf{t} della regola destrorsa \rightarrow il suo flusso contrasta la diminuzione di \mathbf{B}

$$e_{\ell_c}(t) = -\frac{d\varphi_c(t)}{dt} > 0$$



ogni variazione del flusso concatenato produce un effetto che si oppone alla propria causa, ossia è tale da ridurre la variazione del flusso stesso

Permeabilità magnetica dei mezzi

Vuoto = mezzo magnetico uniforme con costante magnetica:

$$\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{H}}{\text{m}}$$

mezzi generici: permeabilità (costante) magnetica relativa

$$\mu_r \triangleq \frac{\mu}{\mu_o}$$

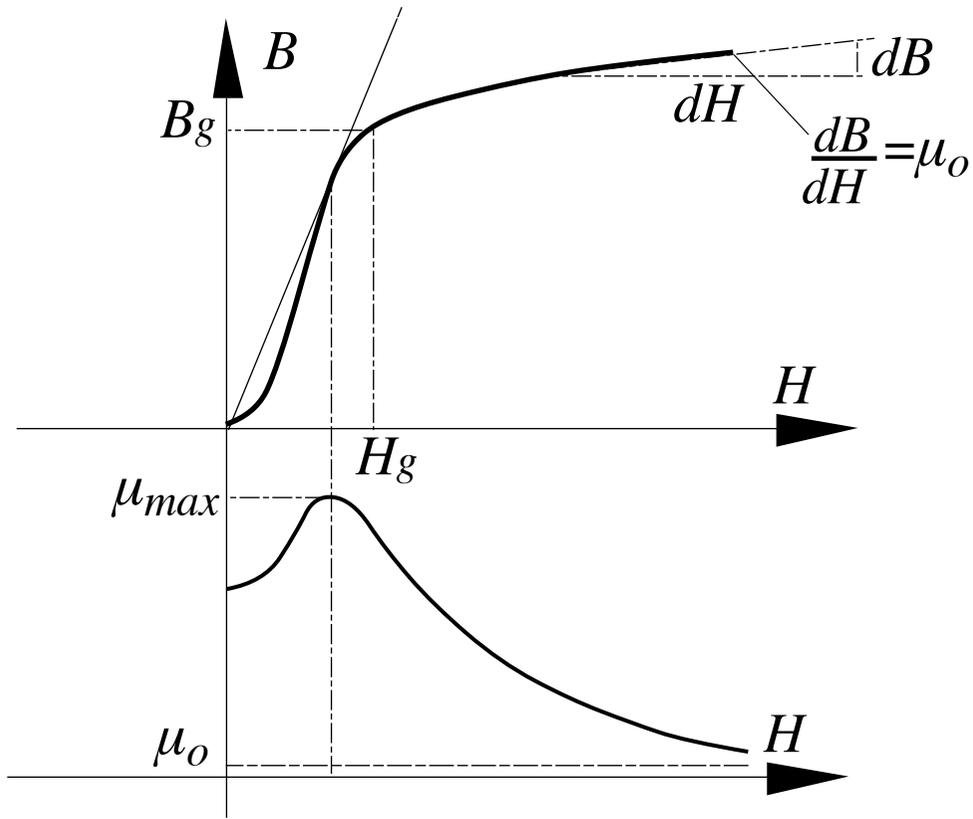
$\mu_r < 1$: **materiali diamagnetici** (di pochissimo: tipicamente al 10^{-5} – 10^{-9})

$\mu_r > 1$: **materiali paramagnetici** (di pochissimo: tipicamente al 10^{-4} – 10^{-7})

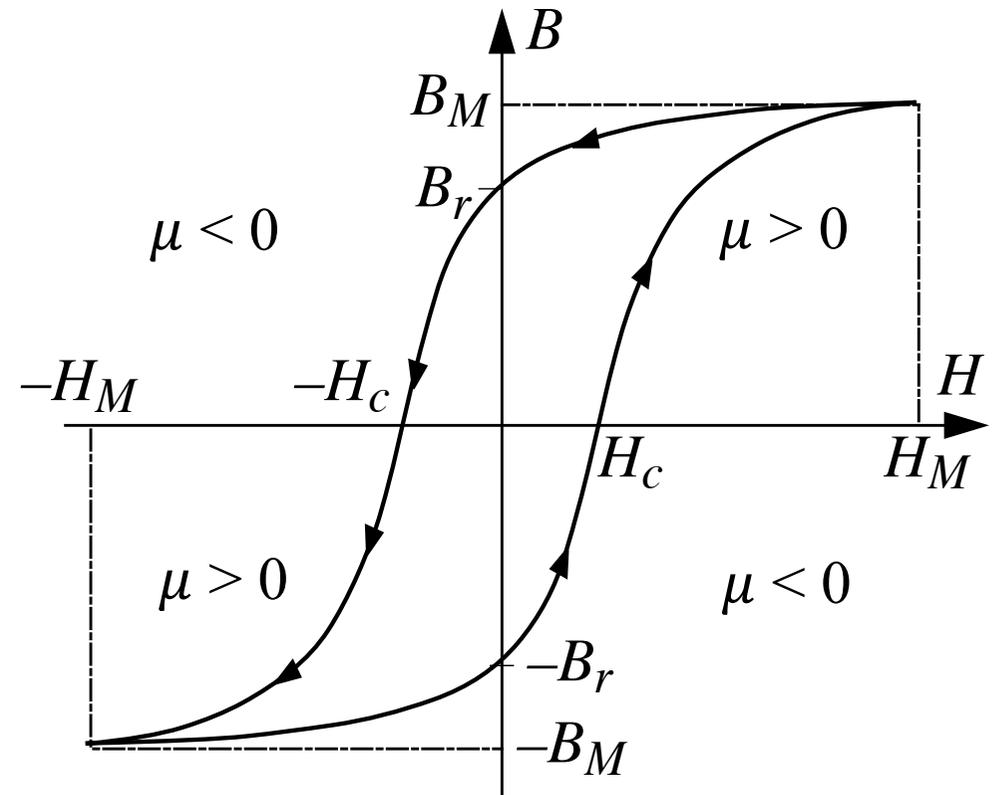
→ detti insieme materiali **amagnetici**: lineari e poco diversi dal vuoto

$\mu_r \gg 1$: **materiali ferromagnetici** (tipicamente 10^2 – 10^5): non lineari, isteretici, (anche anisotropi) e molto diversi dal vuoto

Mezzi ferromagnetici



Curva di prima magnetizzazione



Ciclo di isteresi

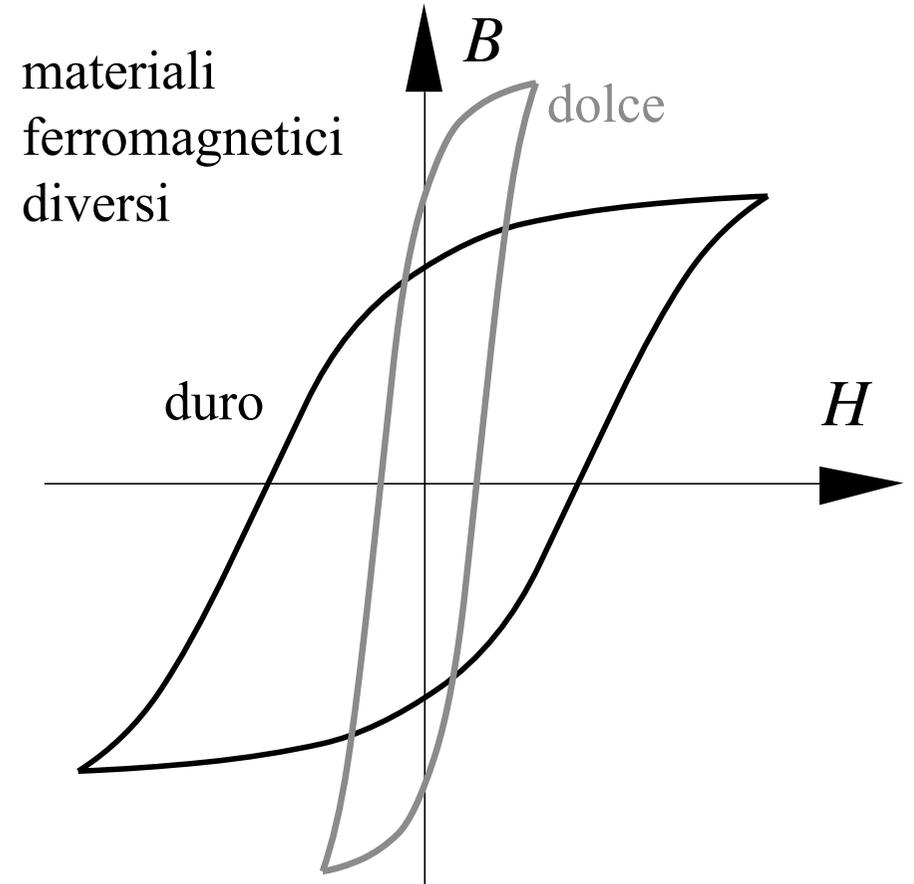
Mezzi ferromagnetici

Sono dissipativi

area del ciclo di isteresi:
è proporzionale al lavoro dissipato
nel compiere un ciclo

materiale dolci (ciclo stretto): impegno
nelle applicazioni in regime alternato
(macchine a.c.)

materiali duri magnetizzazione
residua B_r e forza coercitiva H_c elevate
→ impiego come magneti permanenti
(macchine d.c.)

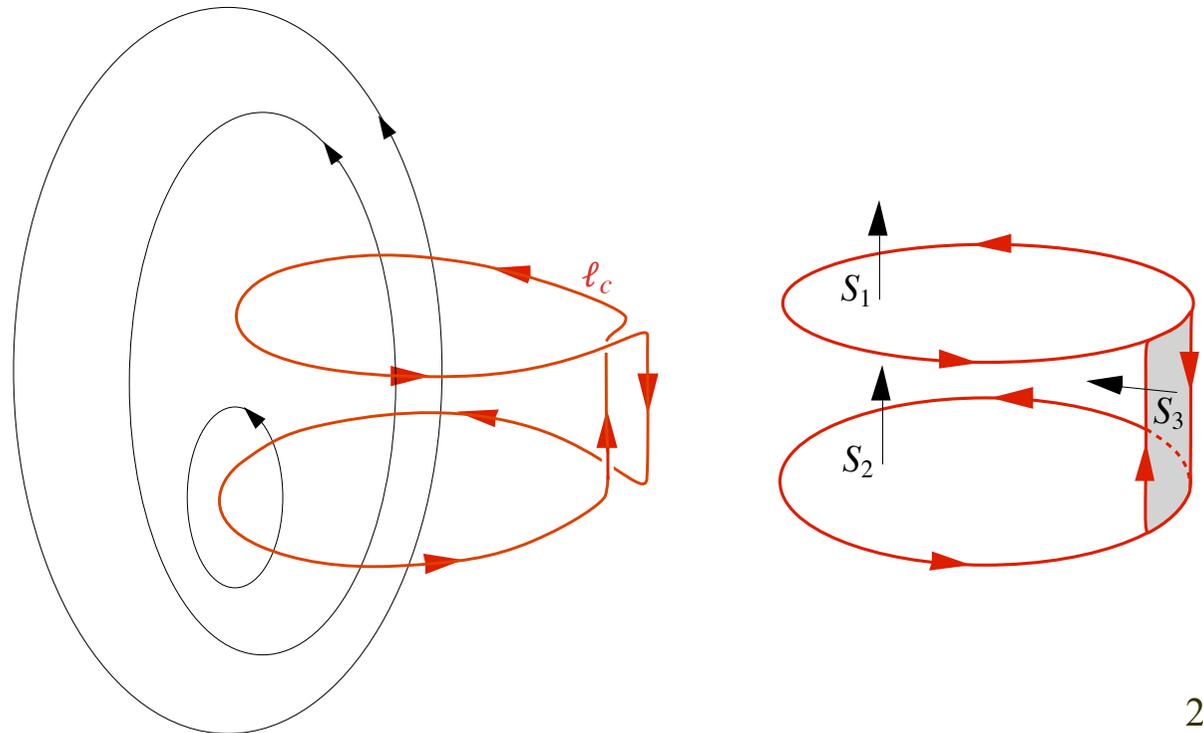


Flusso concatenato

$\text{div} \mathbf{B} = 0 \rightarrow$ linee vettoriali chiuse (o all'infinito): solo quelle legate a ℓ_c come anelli di una catena contribuiscono al flusso della legge di Farady-Neumann \rightarrow **flusso concatenato** φ_c

- Conviene valutare il flusso di \mathbf{B} concatenato con ℓ_c attraverso una superficie semplice (piana) orlata da ℓ_c
- Se ℓ_c ha complesso sviluppo tridimensionale

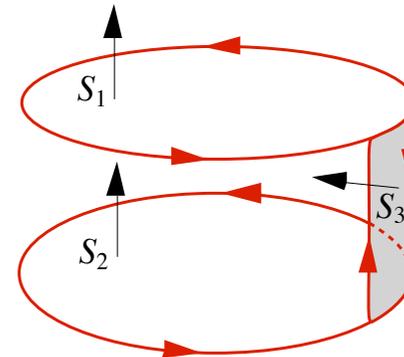
\rightarrow scomposizione in tratti piani



Flusso concatenato

- se ℓ_c è avvolta in N spire e i tratti di raccordo sono trascurabili

$$\varphi_c = \sum_{i=1}^N \varphi_{ci}$$



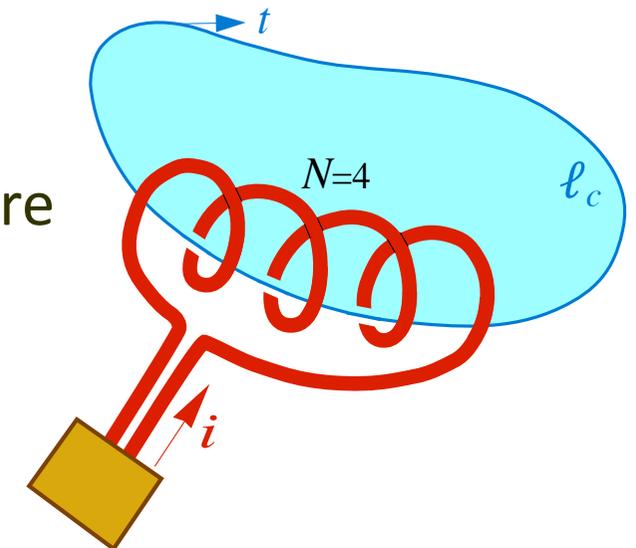
- se le N spire concatenano lo stesso tubo di flusso di \mathbf{B} con portata φ_s

$$\varphi_c = N \varphi_s$$

Legge di Ampère per un conduttore avvolto in N spire

$$\oint_{\ell_c} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} \, d\ell = Ni$$

Ni = amperspire [As]



Canalizzazione del campo di induzione

Poiché $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, le linee vettoriali di \mathbf{B} formano tubi di flusso

- tali tubi possono essere canalizzati sfruttando le diverse permeabilità dei mezzi (ferromagnetici e amagnetici), diversamente dal campo dielettrico, anche se non bene come per il campo di corrente
- Altrimenti i tubi di flusso di \mathbf{B} tendono ad espandersi nello spazio secondo forme geometriche definite dalla disposizione spaziale delle correnti elettriche che sono le cause di \mathbf{B}

Induttore

o **circuito induttore**. È costituito da conduttore, in genere sottile rispetto alla lunghezza assiale, che forma una linea l praticamente chiusa ($l \approx l_c$)

l_c concatena il flusso di induzione φ_c

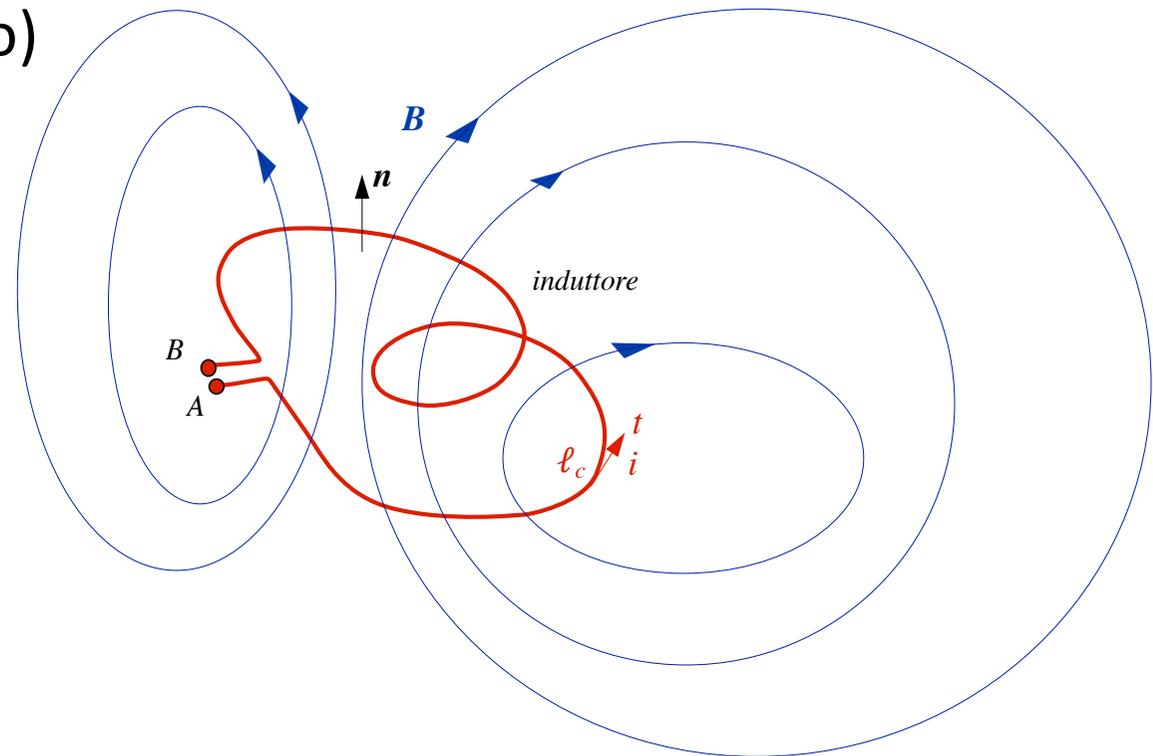
se φ_c è prodotto solo dalla corrente i dell'induttore
(=questo è magneticamente isolato)

→ i e φ_c sono correlati

**Induttanza (autoinduttanza,
coefficiente di autoinduzione)**

u.m. henry [H]

$$L \triangleq \frac{\varphi_c(t)}{i(t)}$$



Induttore toroidale

$\ell_c = N$ spire sottili avvolte su supporto toroidale
con sezione S di raggio r_o piccolo rispetto a r_m

\mathbf{B} e \mathbf{H} azimutali per simmetria

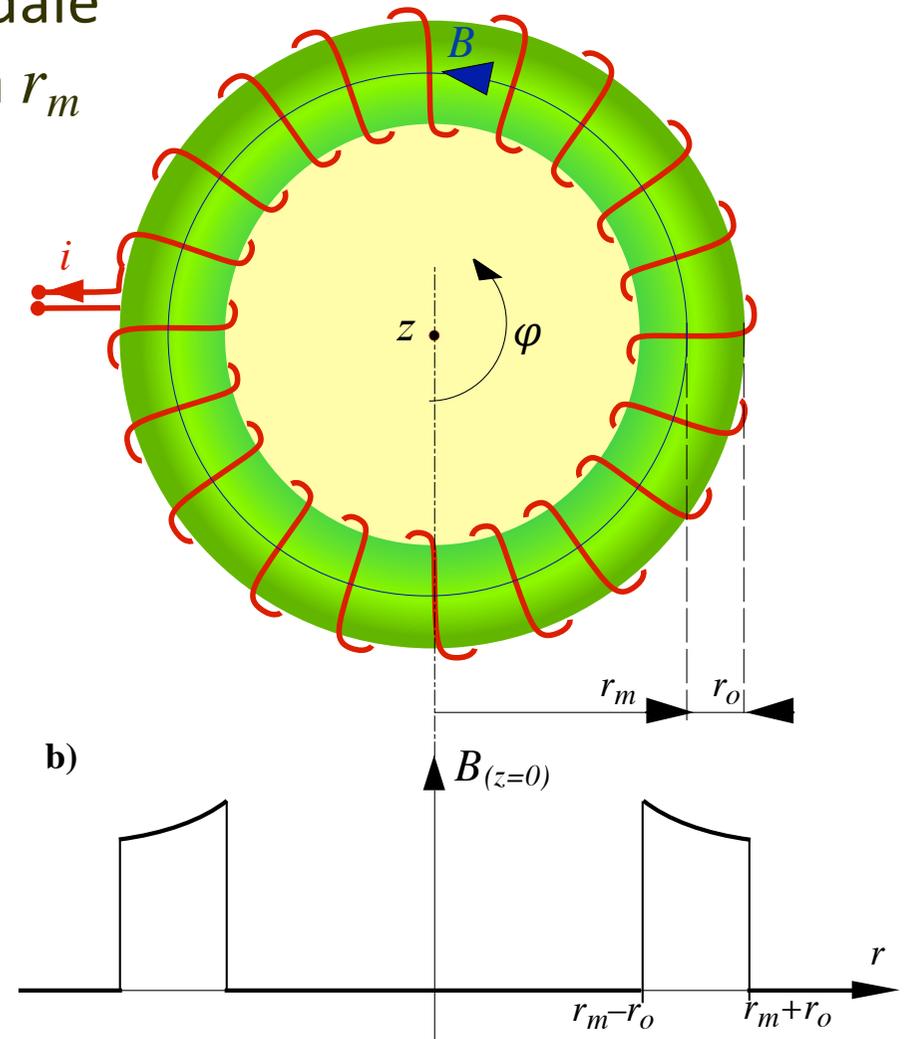
Legge di Ampère lungo cerchi
coassiali a z interni al toro (fuori $\mathbf{B}=\mathbf{H}=\mathbf{0}$)

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \frac{\mu N i}{2\pi r} \mathbf{u}_\varphi$$

$$\varphi_s = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} S = \frac{\mu N i}{2\pi r_m} S$$

$$\varphi_c = N \varphi_s$$

$$L = \frac{\varphi_c}{i} = \frac{\mu S N^2}{2\pi r_m}$$



Induttore solenooidale

$\ell_c = N$ spire sottili avvolte con densità lineare $n = N/\ell$
su supporto cilindrico con sezione S di raggio

r_o piccolo rispetto a ℓ

\mathbf{B} e \mathbf{H} assiali per simmetria

Legge di Ampère lungo il rettangolo dxh
con 1 lato h interno al cilindro

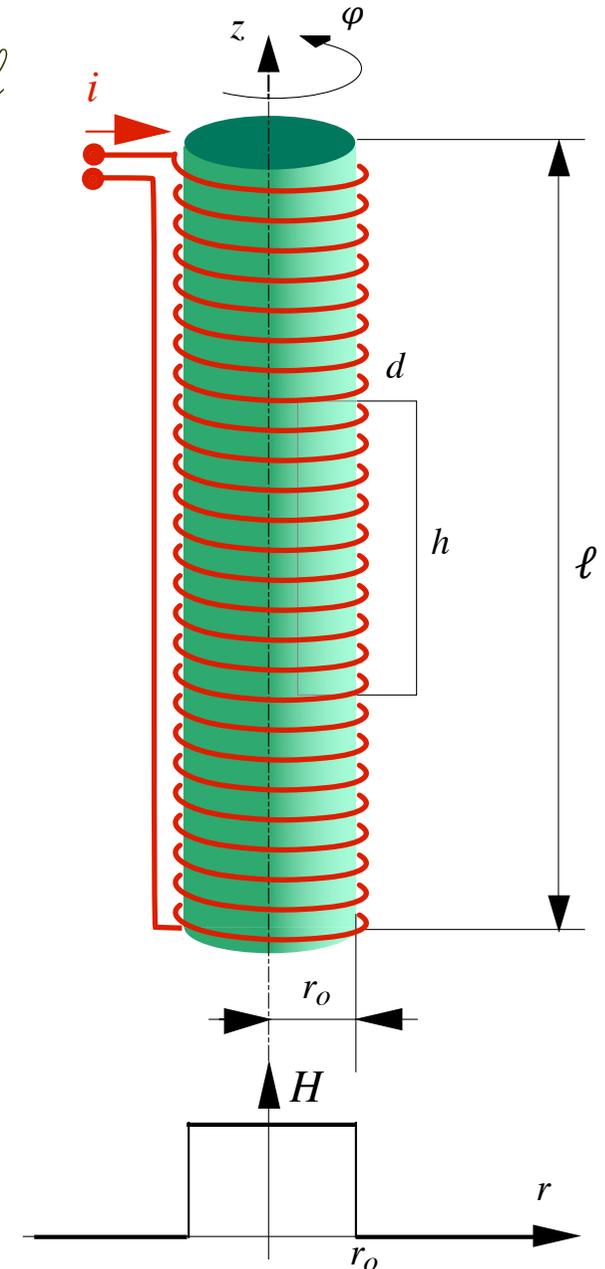
$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \frac{\mu n h i}{h} \mathbf{u}_z = \mu n i \mathbf{u}_z$$

$$\varphi_s = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} S = \mu n i S = \mu \frac{N}{\ell} i S$$

$$\varphi_c = N \varphi_s$$

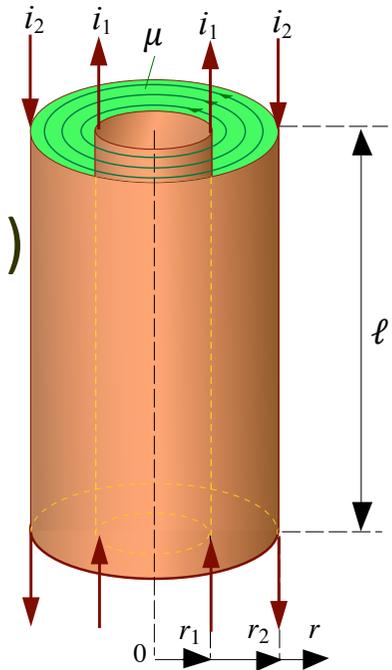
$$L = \frac{\varphi_c}{i} = \frac{\mu S N^2}{\ell}$$

n.b.: se $\ell \gg r_o$ si può assumere $\mathbf{B} = \mathbf{H} = \mathbf{0}$ ovunque
fuori dal cilindro (anche alle estremità)



Linea coassiale

Conduttori coassiali di raggio diverso con correnti opposte
 (=circuito alimento ad un estremità e cortocircuitato all'altra)
B e **H** azimutali per simmetria dentro alla corona cilindrica
 Legge di Ampère lungo cerchi azimutali

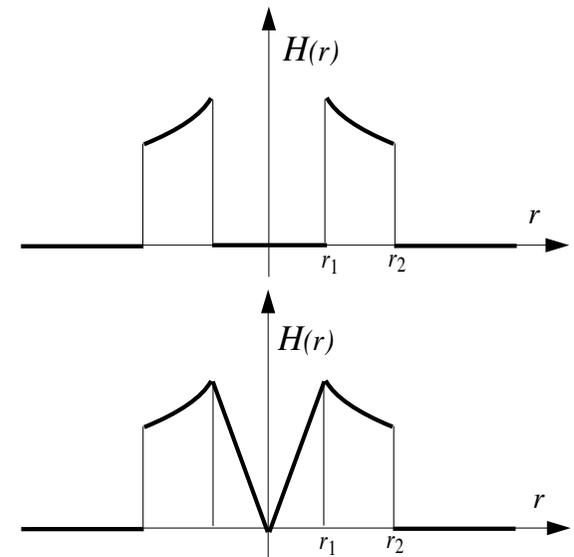


$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \frac{\mu i_1}{2\pi r} \mathbf{u}_\varphi \quad r_1 \geq r \geq r_2$$

$$\varphi'_c = \int_{r_1}^{r_2} \mu \frac{i_1}{2\pi r} \ell dr = \frac{\mu i_1 \ell}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$\varphi_c'' = \frac{\mu \ell i_1}{8\pi}$$

$$L = \frac{\varphi_c}{i} = \frac{\mu \ell}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \left(+ \frac{\mu \ell}{8\pi} \right)$$

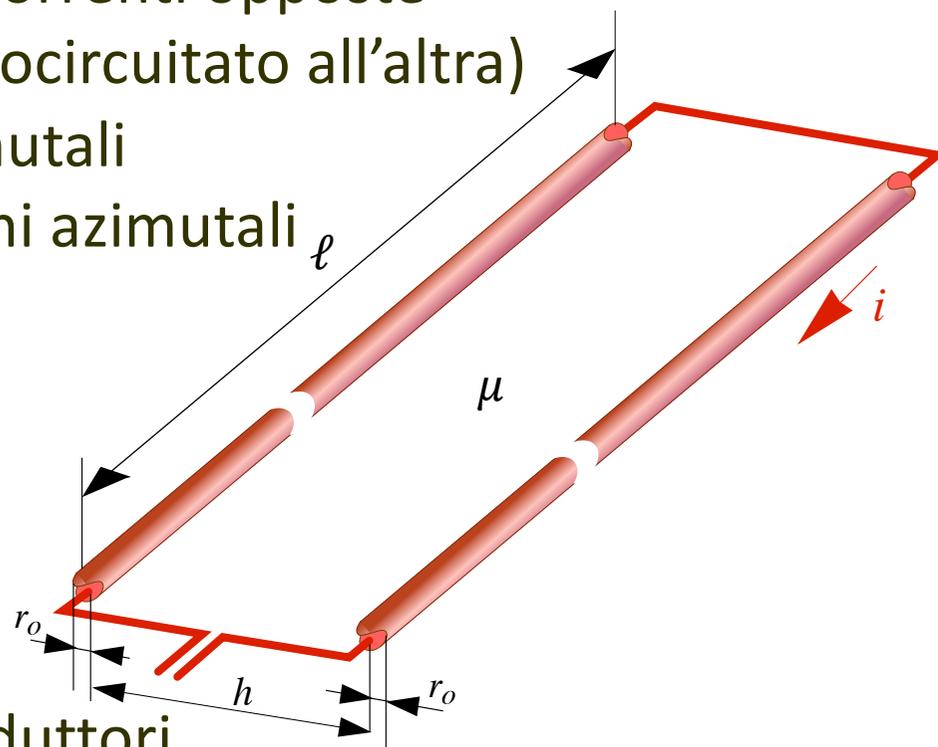


Linea bifilare

Conduttori paralleli di raggio uguale con correnti opposte
 (=circuitto alimento ad un estremità e cortocircuitato all'altra)
 contributi a \mathbf{B} e \mathbf{H} dei due conduttori azimutali
 per ciascuno, legge di Ampère lungo cerchi azimutali

$$\varphi_c' = \int_{r_o}^h \mu \frac{i}{2\pi r} \ell dr = \frac{\mu i \ell}{2\pi} \ln \frac{h}{r_o}$$

$$\varphi_c'' = \frac{\mu \ell i_1}{8\pi}$$



contributi concordi ed uguali dei due conduttori

$$L = \frac{\varphi_c}{i} = \frac{\mu \ell}{\pi} \ln \frac{h}{r_o} \left(+ \frac{\mu \ell}{4\pi} \right)$$

n.b.: in questo caso il tubo di flusso non è confinato, ma tende ad espandersi in tutto lo spazio

Mutuo induttore

È costituito da due conduttori, in genere sottili rispetto agli assi, che sono praticamente chiusi ($l_1 \approx l_{c1}$ e $l_2 \approx l_{c2}$).

ciascuna l_c concatena un flusso di induzione φ_c

i due φ_{c1} e φ_{c2} sono prodotti da entrambe le correnti i_1 e i_2 degli induttori (questi sono magneticamente accoppiati). Se il sistema è lineare \rightarrow s.e.:

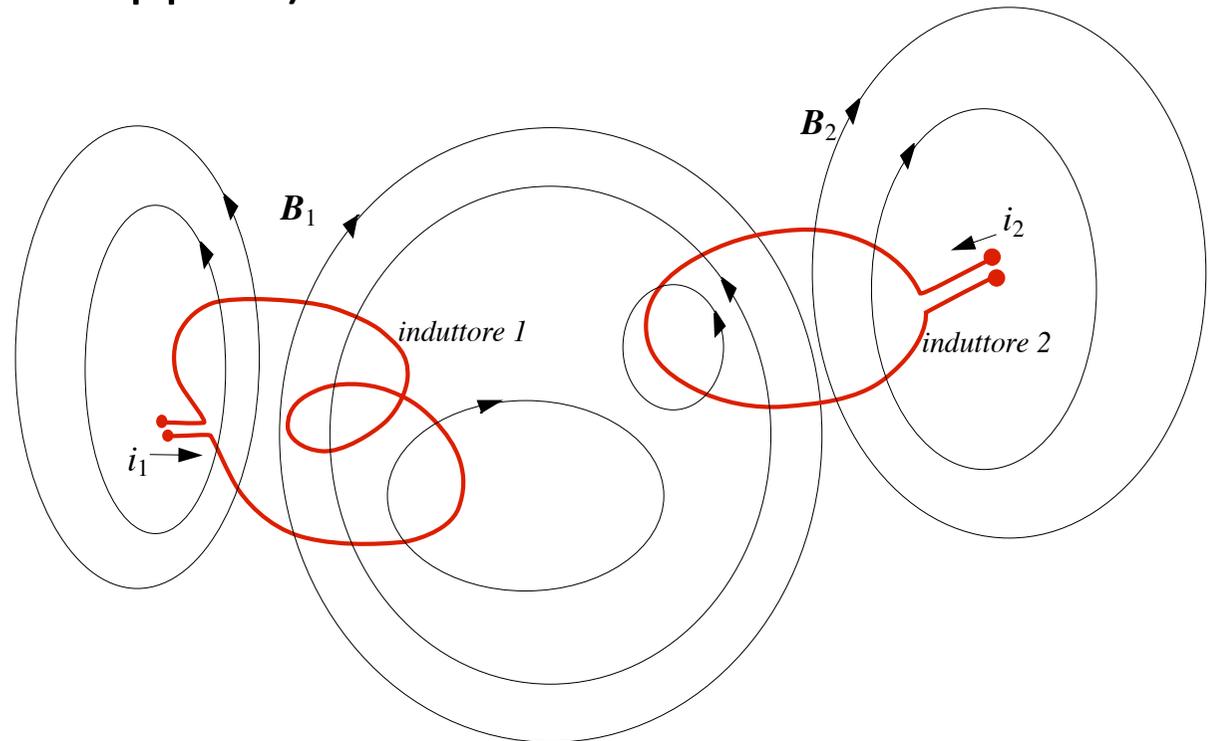
$$\varphi_{c1} = \varphi_{c11} + \varphi_{c12}$$

$$\varphi_{c2} = \varphi_{c21} + \varphi_{c22}$$

Dai flussi autoconcatenati

φ_{c11} e φ_{c22}

$$L_1 \triangleq \frac{\varphi_{c11}(t)}{i_1(t)} \quad L_2 \triangleq \frac{\varphi_{c22}(t)}{i_2(t)}$$



Mutuo induttore

Dai flussi mutui concatenati φ_{c12} e φ_{c21}
mutua induttanza

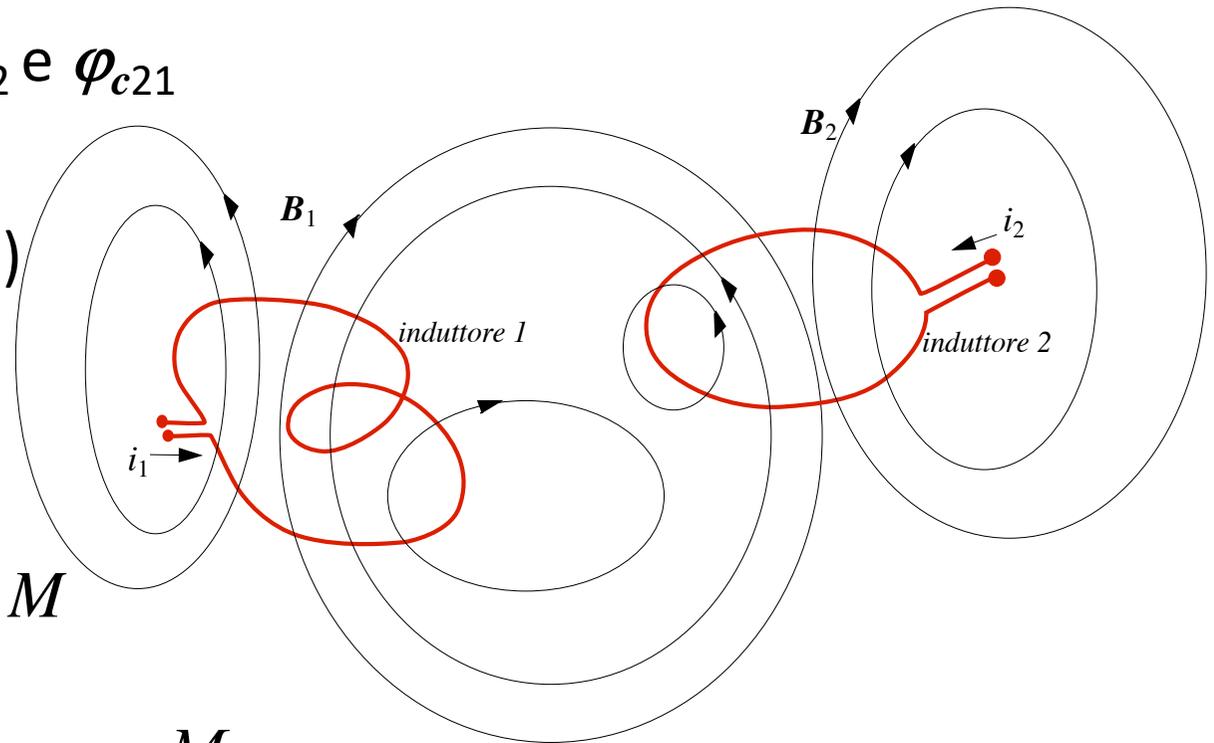
(coefficiente di mutua induzione)

$$M_{12} \triangleq \frac{\varphi_{c12}(t)}{i_2(t)} \quad M_{21} \triangleq \frac{\varphi_{c21}(t)}{i_1(t)}$$

è sempre reciproca: $M_{12} = M_{21} = M$

coefficiente di accoppiamento $k \triangleq \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$

$$\begin{cases} \varphi_{c1} = \varphi_{c11} + \varphi_{c12} = L_1 i_1 + M i_2 \\ \varphi_{c2} = \varphi_{c21} + \varphi_{c22} = M i_1 + L_2 i_2 \end{cases}$$



Mutuo induttore toroidale

$\ell_{c1}=N_1$ e $\ell_{c2}=N_2$ spire sottili avvolte su due supporti toroidali coassiali con sezioni S_1 e S_2 di raggi r_1 e r_2 piccoli rispetto a r_m

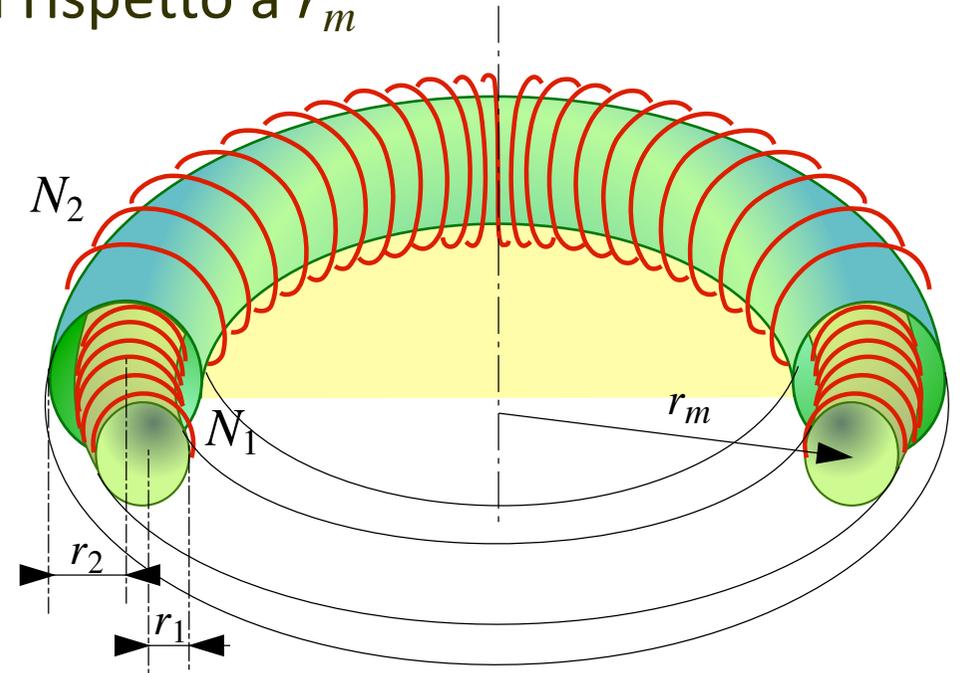
$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu N_2 i_2}{2\pi r} \mathbf{u}_\varphi \quad \mathbf{B}_1 = \frac{\mu N_1 i_1}{2\pi r} \mathbf{u}_\varphi$$

$$\varphi_{s12} = B_2 S_1 = \frac{\mu N_2 i_2}{2\pi r_m} S_1$$

$$\varphi_{s21} = B_1 S_1 = \frac{\mu N_1 i_1}{2\pi r_m} S_1$$

$$M_{12} = \frac{\varphi_{c12}}{i_2} = \frac{N_1 \varphi_{s12}}{i_2} = \frac{\mu N_2 N_1 S_1}{2\pi r_m}$$

$$M_{21} = \frac{\varphi_{c21}}{i_1} = \frac{N_2 \varphi_{s21}}{i_1} = \frac{\mu N_1 N_2 S_1}{2\pi r_m}$$



$$k = \pm \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \pm \frac{r_1}{r_2}$$

Bipolo induttore

Induttore dotato di terminali per applicare la corrente $i(t)$.

- S_p racchiude il tubo di flusso di \mathbf{B}

- corrente ai terminali:
 $i(t)$ è solenoidale

- tensione tra i terminali:

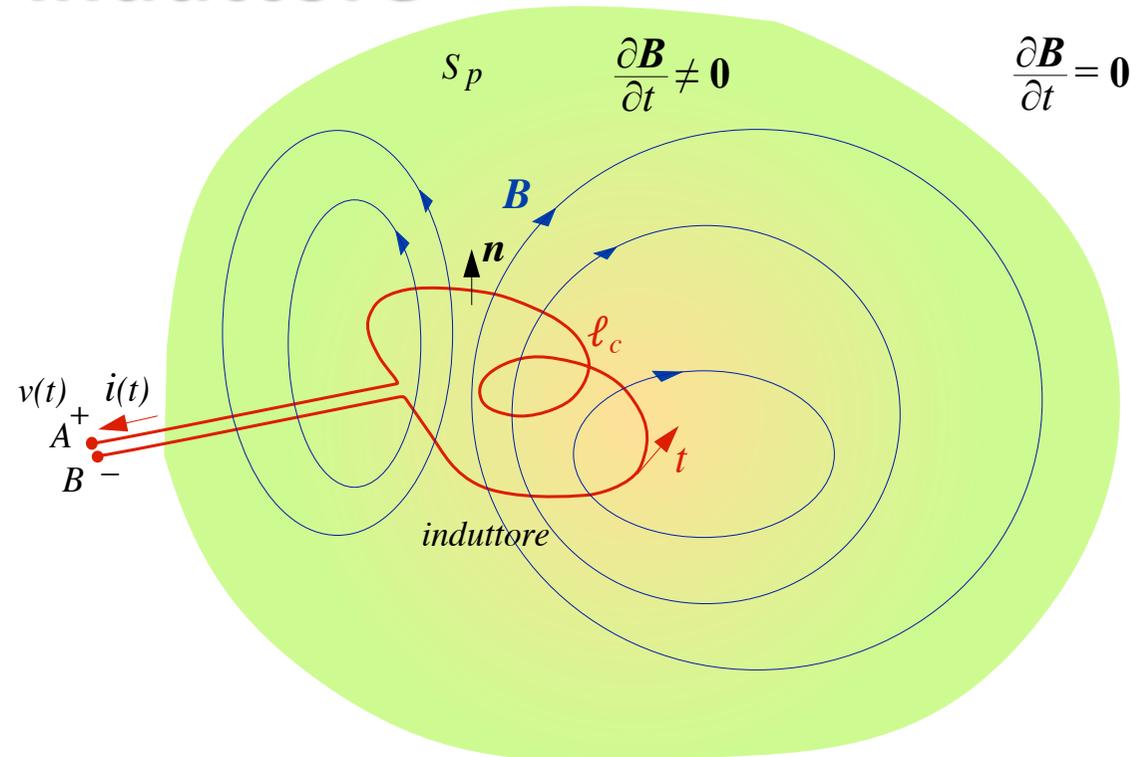
dentro S_p c'è $\text{rot}\mathbf{E}_i = -\partial\mathbf{B}/\partial t \neq \mathbf{0}$

ma esternamente a S_p $\text{rot}\mathbf{E}_i = -\partial\mathbf{B}/\partial t = \mathbf{0} \rightarrow$ fuori da S_p $v(t)$ è conservativa

\rightarrow applicando la convenzione degli utilizzatori: $v(t) = d\varphi_c/dt$

- al di fuori di S_p valgono le ipotesi di bipolo con equazioni:

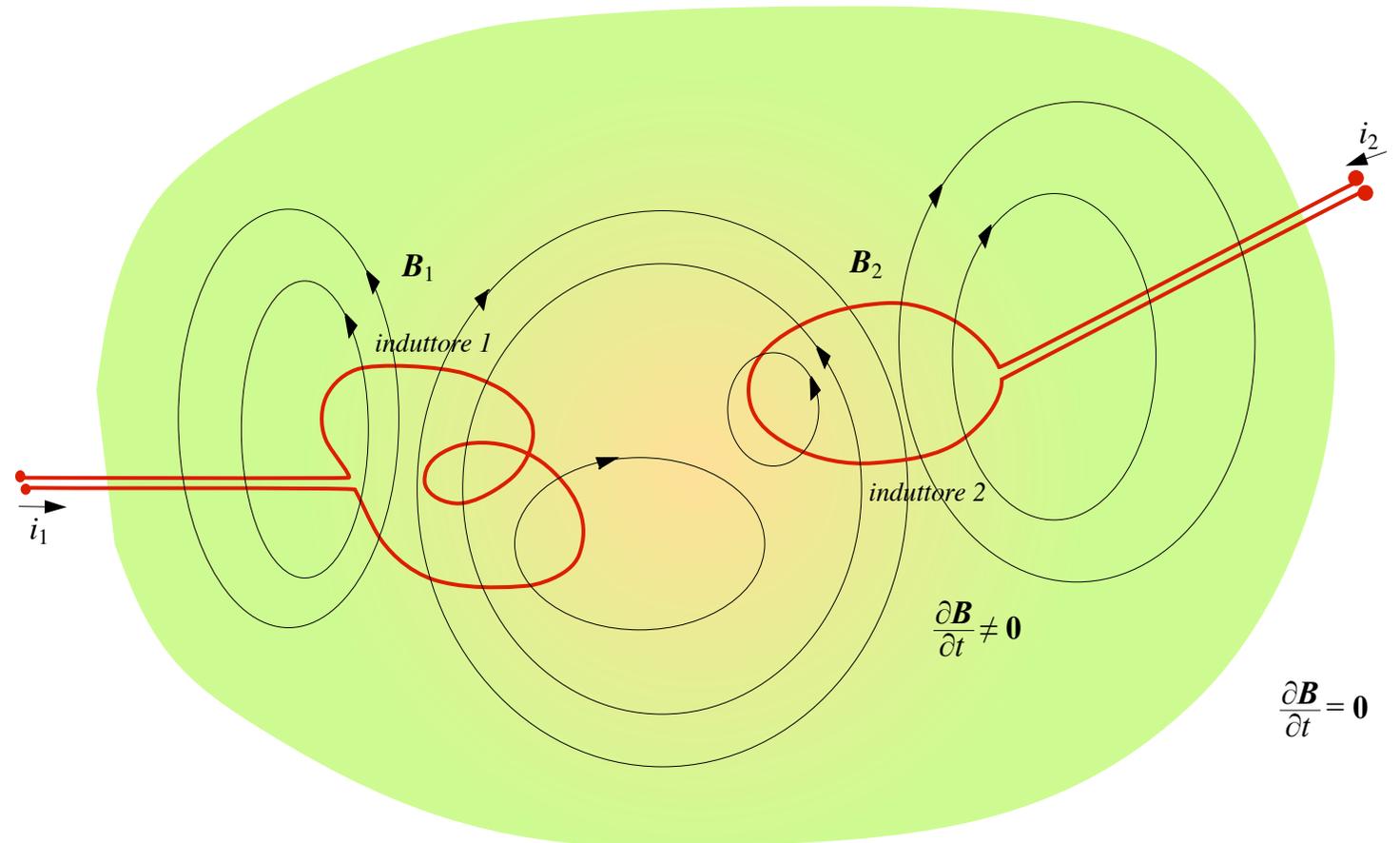
$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}, \quad i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v(t') dt'$$



Doppio bipolo induttore

Valgono considerazioni analoghe per le correnti e tensioni ai terminali dei due induttori

$$\begin{cases} v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \\ v_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \end{cases}$$



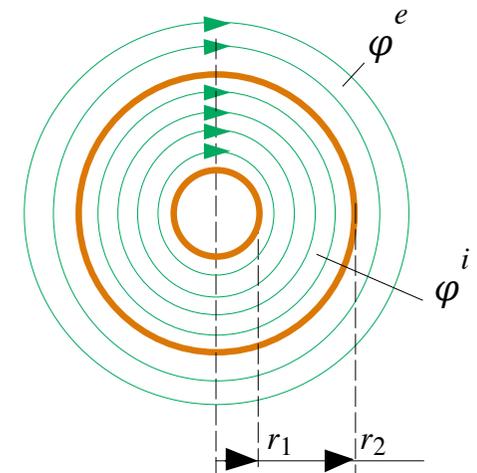
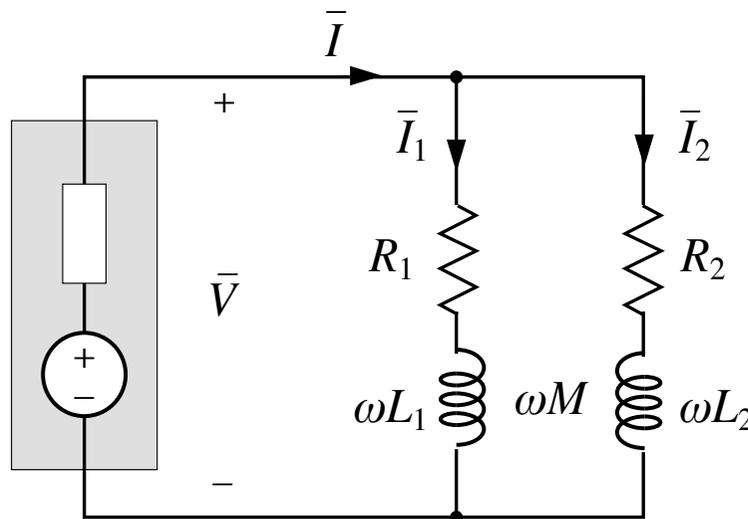
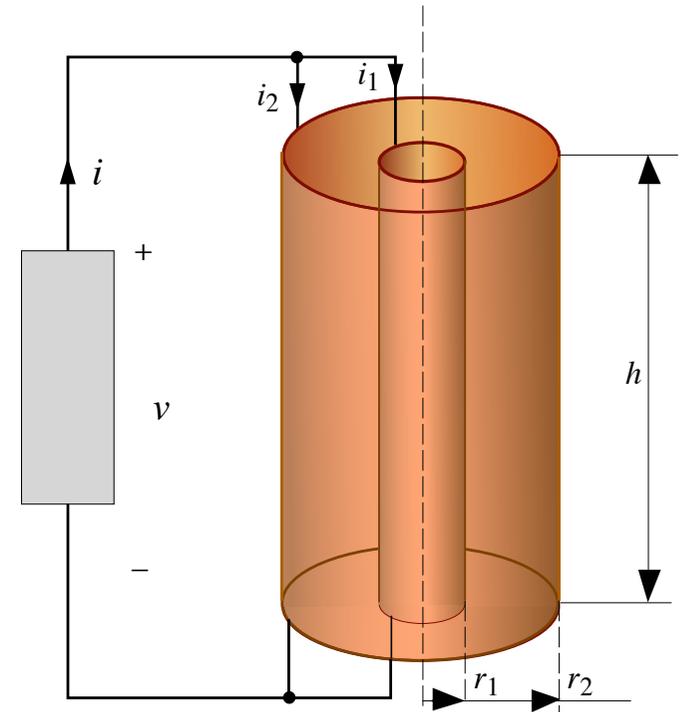
Effetto pelle

Conduttore massiccio concorrente assiale alternata: la densità di corrente si addensa sulla superficie.

Schematizzazione elementare: due cilindri coassiali con raggi r_1 e r_2 alimentati in parallelo con correnti i_1 e i_2

→ costituiscono due induttori mutuamente accoppiati e resistivi

→ connessi in parallelo

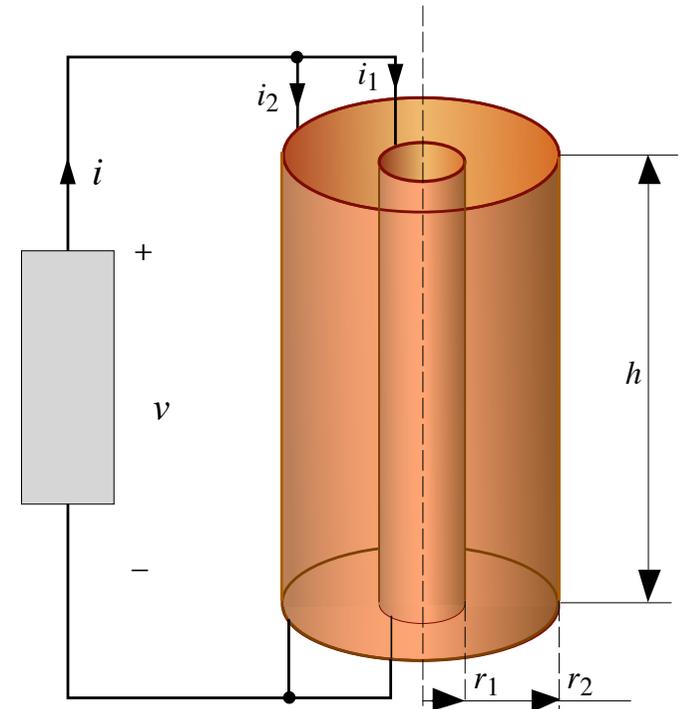
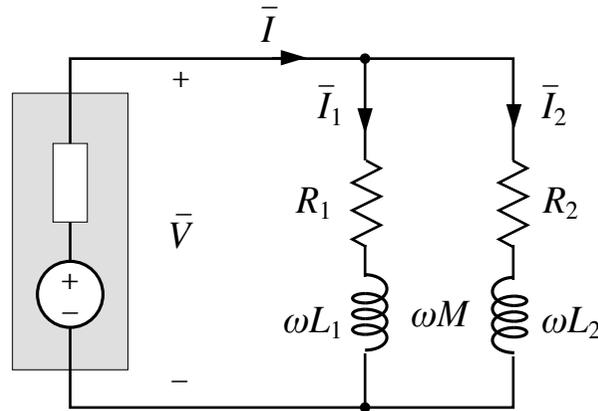


Effetto pelle

$$L_1 = \frac{\varphi_{c11}}{i_1} = \frac{\varphi_1^i}{i_1} + \frac{\varphi_1^e}{i_1} = L_i + L_e$$

$$L_2 = \frac{\varphi_{c22}}{i_2} = \frac{\varphi_2^e}{i_2} = L_e$$

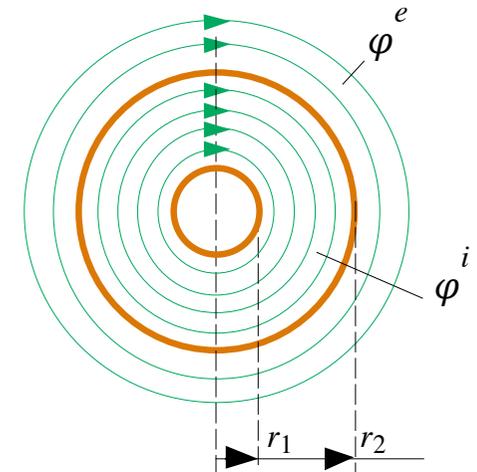
$$M = \frac{\varphi_{c12}}{i_2} = \frac{\varphi_2^e}{i_2} = L_e$$



$$\begin{cases} \bar{V} = R_1 \bar{I}_1 + j\omega L_1 \bar{I}_1 + j\omega M \bar{I}_2 = R_1 \bar{I}_1 + j\omega L_i \bar{I}_1 + j\omega L_e \bar{I}_1 + j\omega L_e \bar{I}_2 \\ \bar{V} = R_2 \bar{I}_2 + j\omega M \bar{I}_1 + j\omega L_2 \bar{I}_2 = R_2 \bar{I}_2 + j\omega L_e \bar{I}_1 + j\omega L_e \bar{I}_2 \end{cases}$$

$$\bar{I}_1 = \bar{I} \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j\omega L_i} \Rightarrow I_1 = I \frac{R_2}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega L_i)^2}}$$

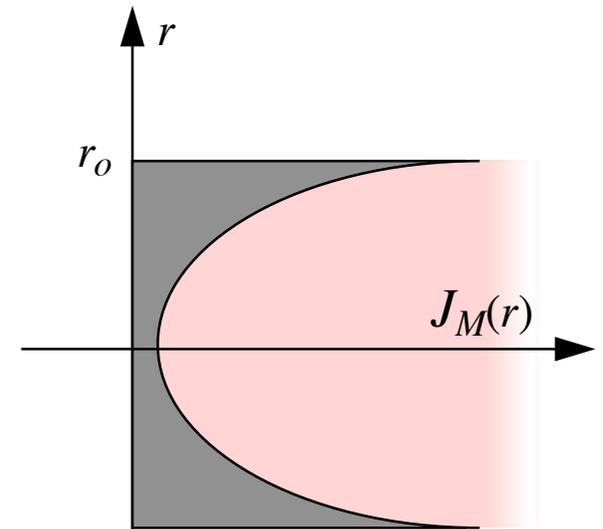
$$\bar{I}_2 = \bar{I} \frac{R_1 + j\omega L_i}{R_1 + R_2 + j\omega L_i} \Rightarrow I_2 = I \frac{\sqrt{R_1^2 + (\omega L_i)^2}}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega L_i)^2}}$$



Effetto pelle

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

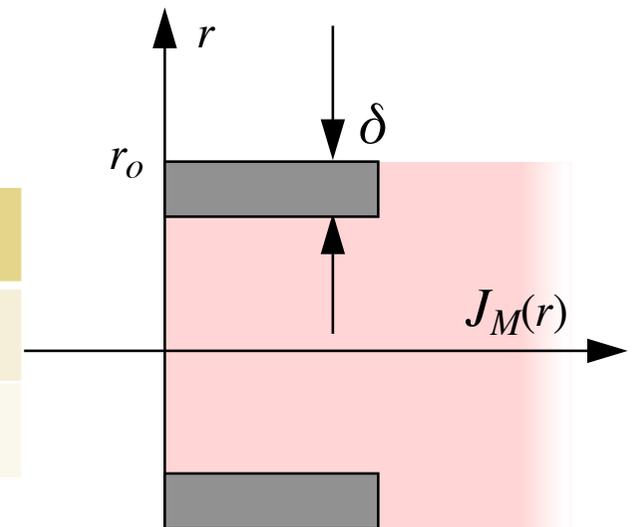
$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} I_1 = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} I_2 = I$$



Spessore di penetrazione

$$\delta \triangleq \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \gamma}}$$

δ	$f=50$ Hz	$f=100$ kHz	$f=100$ MHz
Rame	10 mm	0,2 mm	7 μm
Ferro	50 μm	1,1 μm	0,036 μm



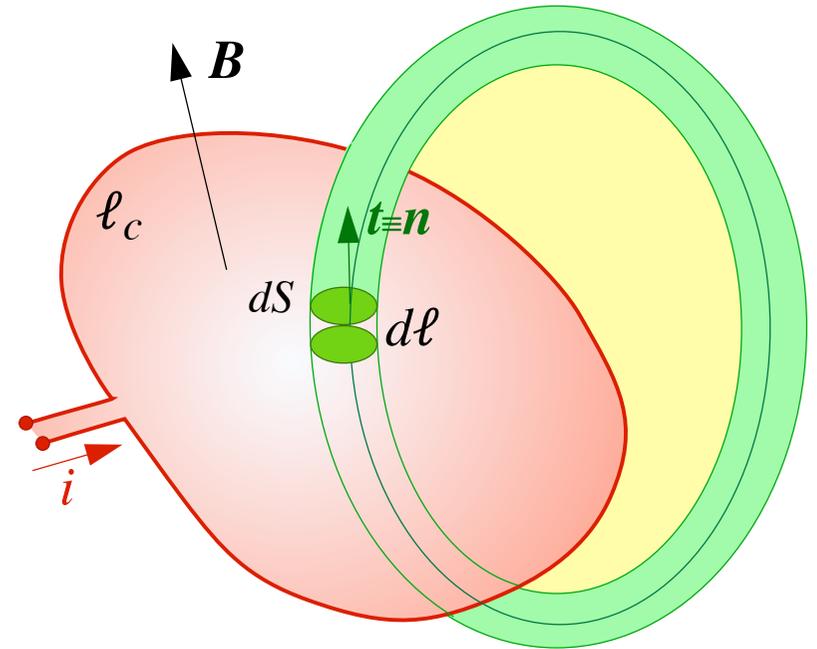
Energia magnetostatica

Energia degli induttori

$$\left\{ \begin{array}{l} w_m = \frac{1}{2} L i^2 \\ w_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_m = \frac{1}{2} \varphi_c i \\ w_m = \frac{1}{2} \varphi_{c1} i_1 + \frac{1}{2} \varphi_{c2} i_2 \end{array} \right.$$

$$w_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_{ci} i_i$$

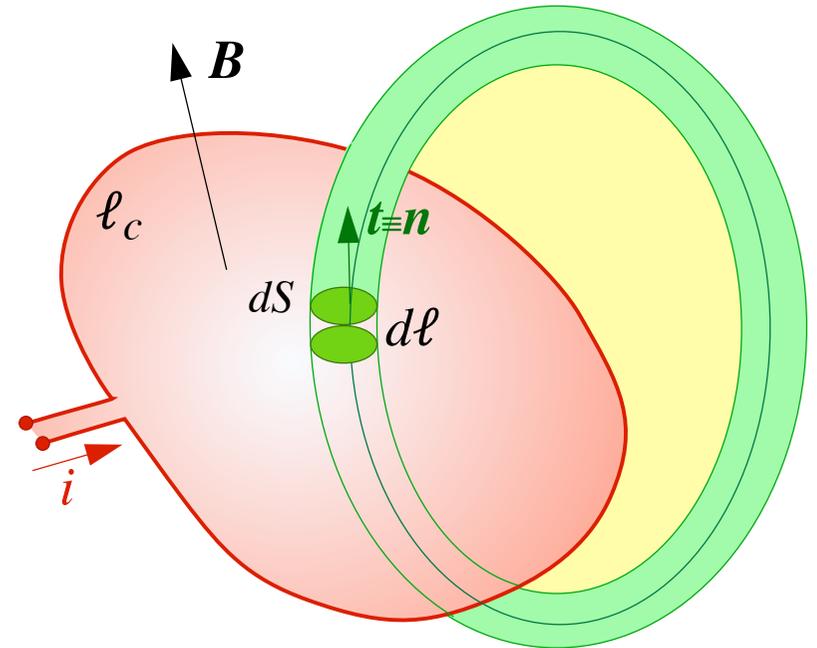


Densità di energia magnetostatica

$$w_m = \frac{1}{2} \varphi_c i$$

$$\varphi_c = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad i = \oint_{\ell_c} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} d\ell$$

$$w_m = \frac{1}{2} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \oint_{\ell} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} d\ell = \int_{\tau} \frac{B H}{2} d\tau$$



Densità di energia magnetica di \mathbf{B} e \mathbf{H} in mezzi lineari

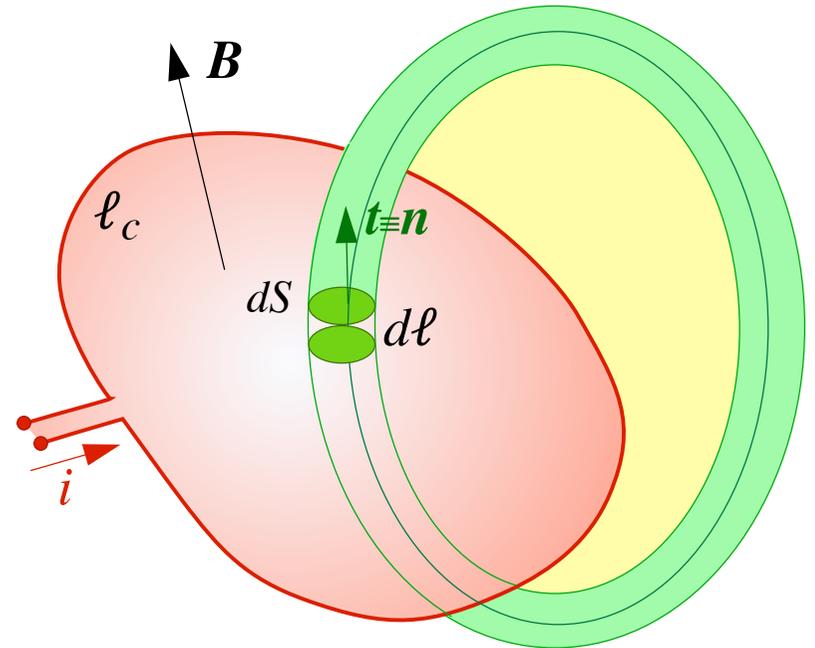
$$W_m(P) \triangleq \frac{dw_m}{d\tau} = \frac{H B}{2} = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{\mu H^2}{2}$$

Densità di energia magnetostatica

$$w_m = \frac{1}{2} \varphi_c i$$

$$\varphi_c = \oint_{\ell_c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} d\ell \quad i = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS$$

$$w_m = \frac{1}{2} \oint_{\ell_c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} d\ell \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\tau} \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}}{2} d\tau$$



Densità di energia magnetica di \mathbf{J} e \mathbf{A} in mezzi lineari

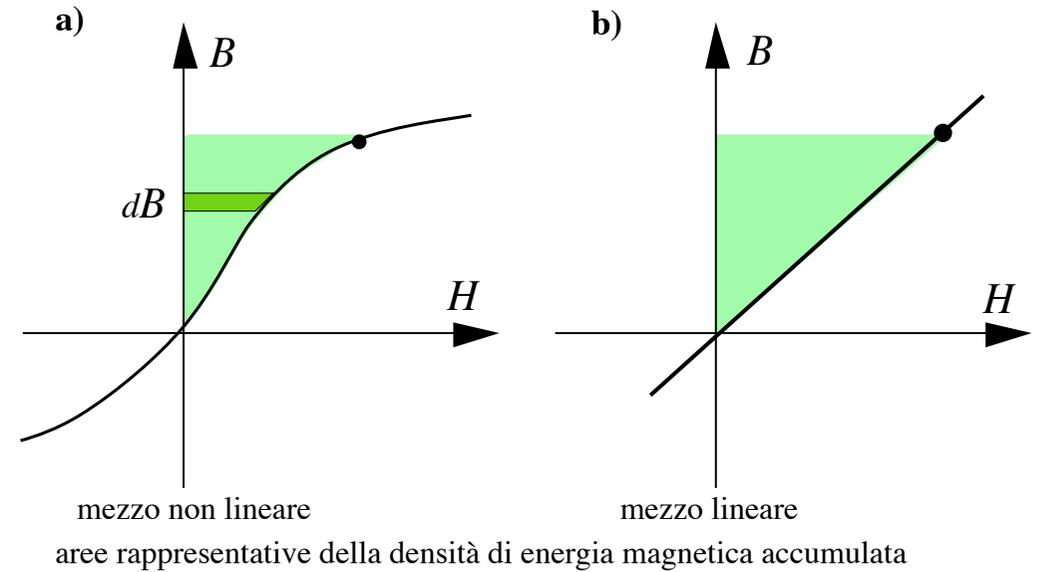
$$W_m(P) \triangleq \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}}{2}$$

Densità di energia magnetostatica

Mezzi non lineari

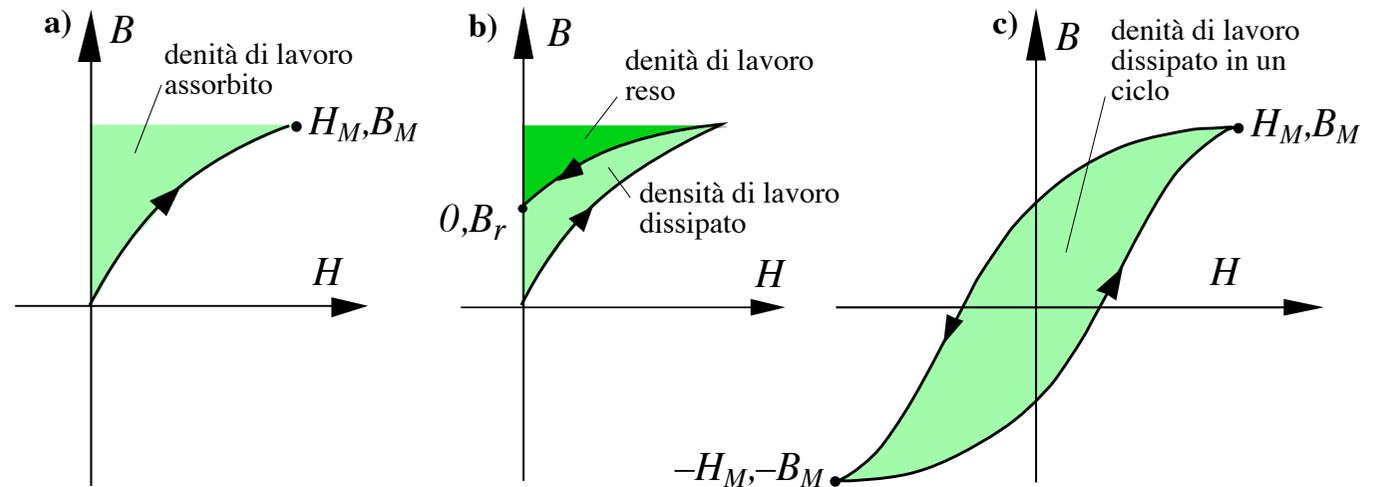
$$W_B(P) = \int_0^B H dB$$

$$W_J(P) = \int_0^A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$$



Mezzi isteretici

Perdite per isteresi



Mezzo isteretico: aree rappresentative della densità di lavoro elettrico scambiato e dissipato

Perdite per isteresi – Formula di Steinmetz

Densità di lavoro dissipato per ciclo [J/m³]

$$\mathcal{L}_{ist} = \eta B_M^\alpha$$

η = parametro che dipende dal materiale, $\alpha = 1,6-2$ dipende da B_M

Densità di potenza media (attiva) dissipata [W/m³]

$$P_{ist} = \mathcal{L}_{ist} f = \eta f B_M^\alpha$$

f = frequenza

Legge di Ampère-Maxwell

Quando e dove $\operatorname{div} \mathbf{J} \neq 0$, la legge di Ampère $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$ non vale, perché è sempre $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$, per qualsiasi campo vettoriale.

Si può sostituire a \mathbf{J} la densità di corrente totale, $\mathbf{J}_t = \mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t$, che sempre solenoidale $\operatorname{div} \mathbf{J}_t = 0$, ottenendo

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_t = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

che vale sempre ed è la **legge di Ampère-Maxwell** o **prima equazione di Maxwell**.

Mostra che anche i fenomeni dielettrici hanno effetti magnetici → ne derivano molte conseguenze notevoli, tra cui le equazioni delle elettromagnetiche