

Università di Padova - Scuola di Ingegneria

Massimo Guarnieri

Elettrotecnica

Elementi di Elettromagnetismo

Capitolo 4: Circuiti magnetici

Cosa sono i circuiti magnetici?

Sono particolari strutture magnetiche, nelle quali si considerano fondamentalmente gli stessi concetti esaminati nel capitolo precedente, ma da un punto di vista diverso.

Sono configurazioni nelle quali l'induzione magnetica è canalizzata per mezzo dell'elevata permeabilità magnetica dei materiali ferromagnetici, invece che grazie alle simmetrie con cui è distribuita la densità di corrente.

Si considerano:

- campo magnetico $\mathbf{H}(P,t)$ – correlato alle linee
- induzione magnetica $\mathbf{B}(P,t)$ – correlato alle superfici
- e le correnti che li generano

Cosa sono i circuiti magnetici?

- come la condizione $\text{div } \mathbf{J}=0$ permette di definire i circuiti elettrici = percorsi chiusi per \mathbf{J}
- così la proprietà $\text{div } \mathbf{B}=0$ permette di definire i circuiti magnetici = percorsi chiusi per \mathbf{B}
- circuiti elettrici: γ_2/γ_1 fino a $10^{20} \rightarrow$ confinamento di \mathbf{J} in zone prestabilite = **canalizzazione**
- circuiti magnetici: μ_2/μ_1 fino a $10^5 \rightarrow$ confinamento di \mathbf{B} in zone prestabilite = **canalizzazione**

Cosa sono i circuiti magnetici?

legge di Ampère

$$\oint_{\ell_c} \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = Ni$$

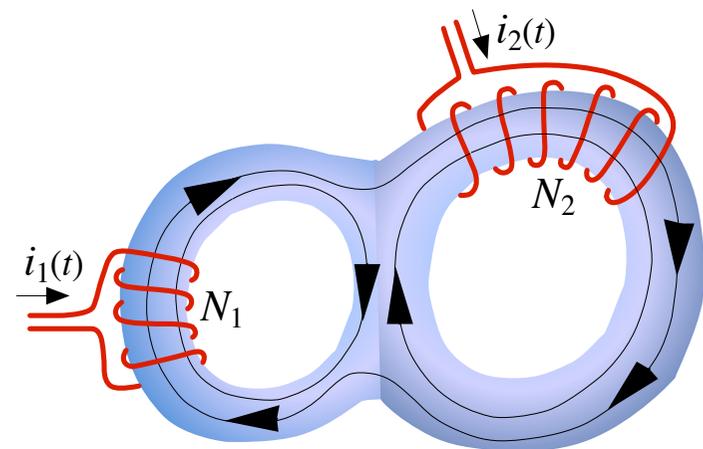
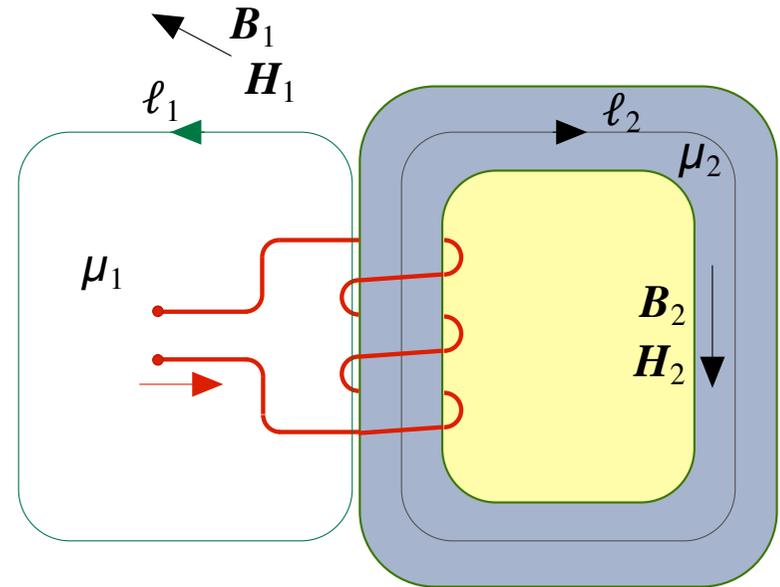
lungo ℓ_1 e ℓ_2 con stessa lunghezza

→ $H_1 \approx H_2$ mediamente

se $\mu_2 \gg \mu_1$

→ $B_2 = \mu_2 H_2 \gg B_1 = \mu_1 H_1$

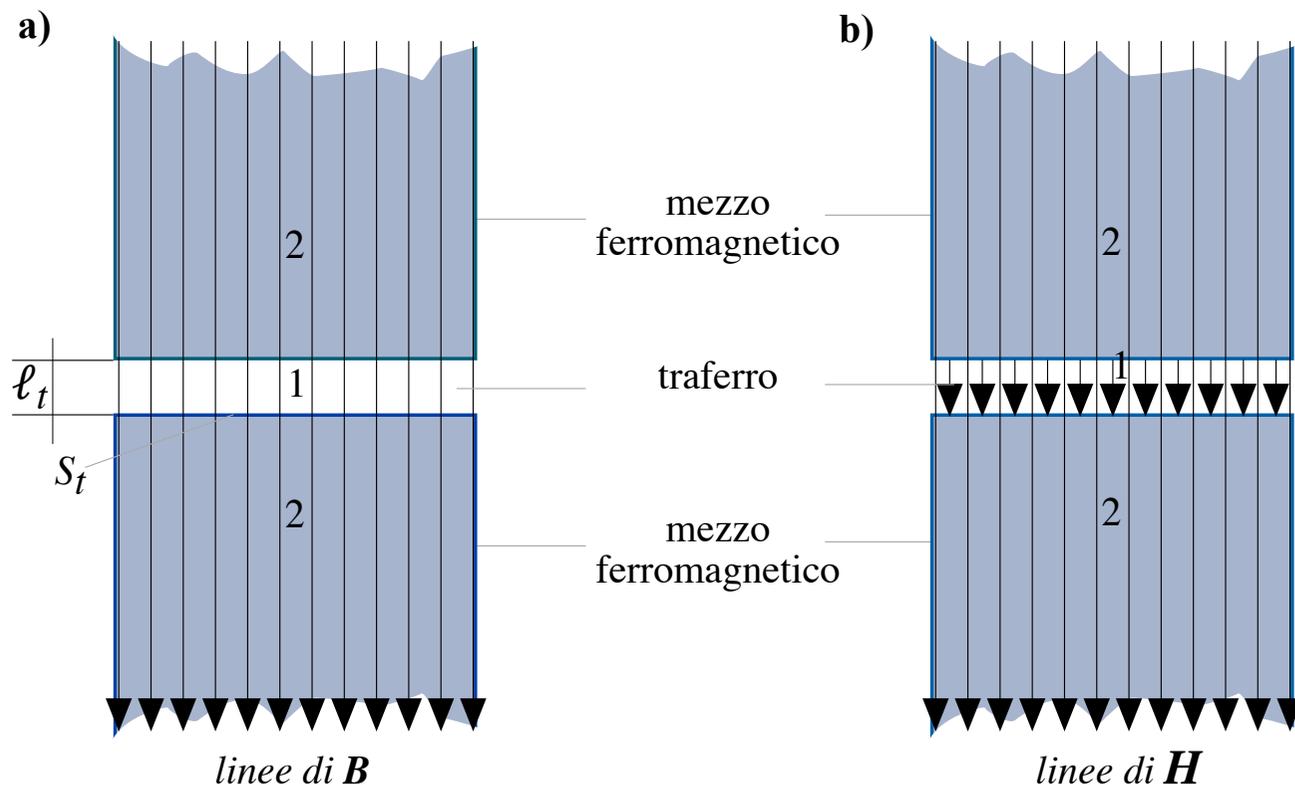
→ di fatto B_1 può essere trascurata, ovvero l'induzione è canalizzata dentro al mezzo 2



Traferro

I circuiti magnetici si trovano in molte macchine elettriche, come i trasformatori e le macchine elettriche rotanti (motori e generatori) e in molti strumenti di misura (elettromeccanici).

Negli ultimi due casi i circuiti magnetici si estendono in parti in moto relativo, consentito da un sottile strato d'aria: il **traferro**

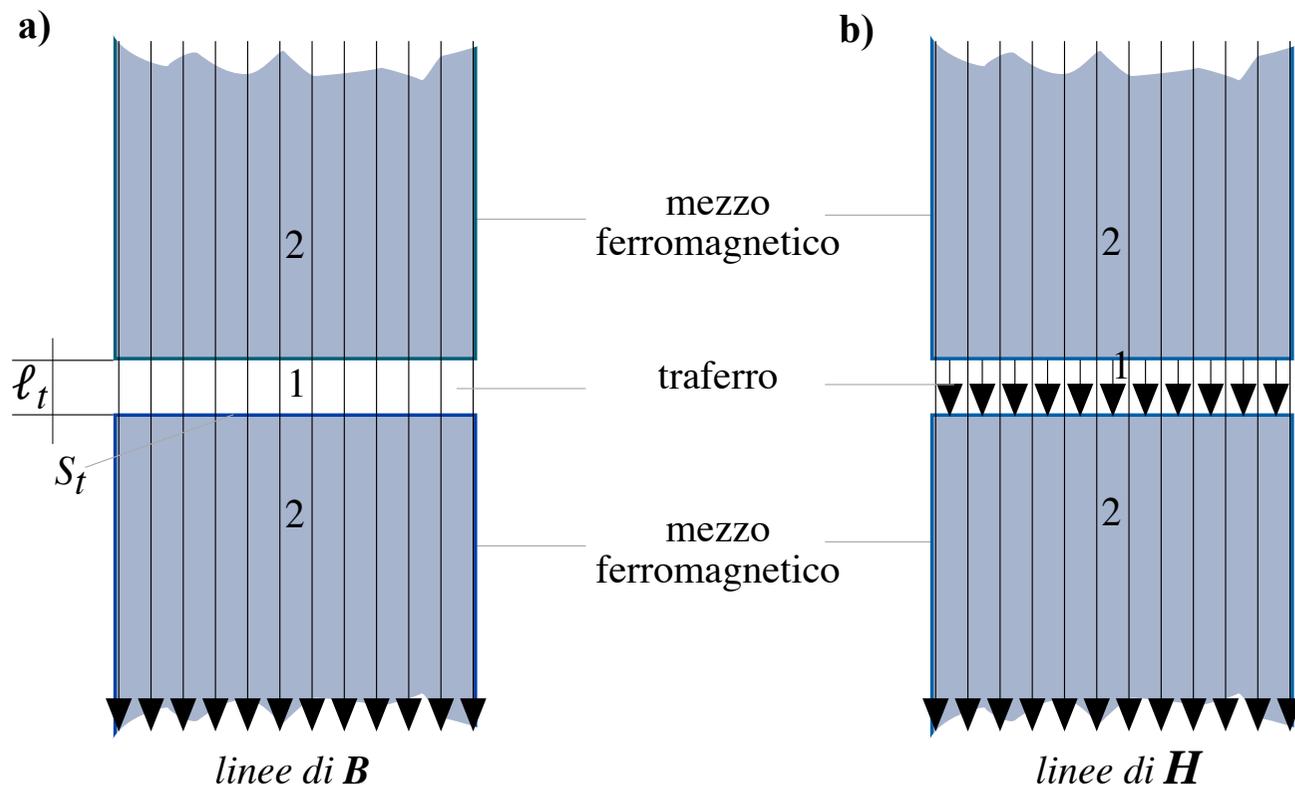


Traferro

Se ℓ_t è piccolo il tubo di flusso di \mathbf{B} mantiene nel traferro la stessa sezione che ha nel ferro: $S_t \approx S_f$ e quindi l'induzione nel traferro è uguale a quella nel ferro $\rightarrow \mathbf{B}_t \approx \mathbf{B}_f \rightarrow \mathbf{H}_t = \mathbf{B}_t / \mu_0 \gg \mathbf{B}_f / \mu_f = \mathbf{H}_f$

\rightarrow la discontinuità di μ alle superfici polari produce pozzi e sorgenti di \mathbf{H}

\rightarrow se c'è il traferro si può porre $\mathbf{H}_f = \mathbf{0}$



Traferro

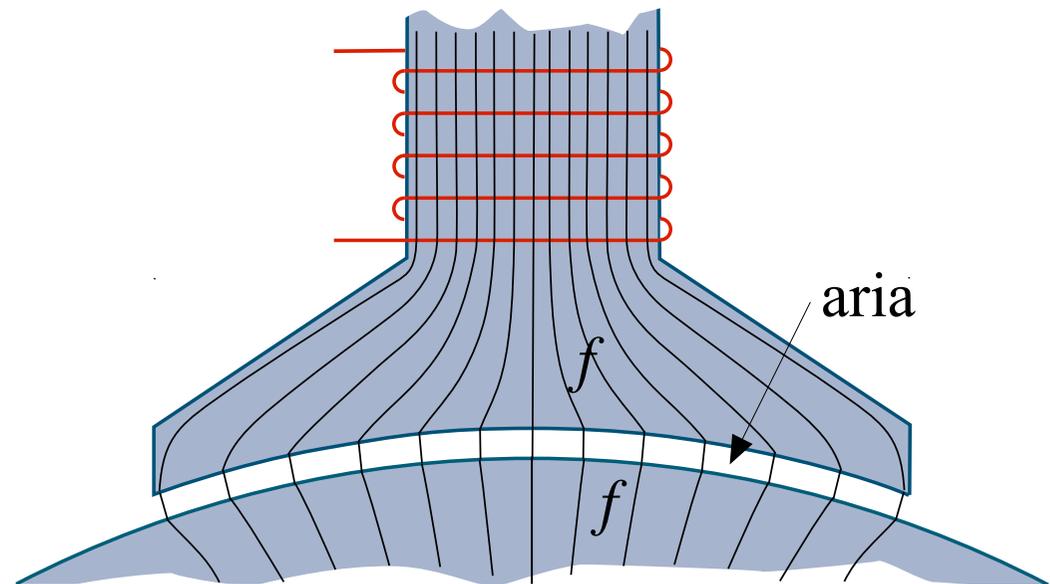
Geometria delle linee vettoriali al traferro: da $\text{div}\mathbf{B}=0$ e $\text{rot}\mathbf{H}=\mathbf{0}$ in prossimità del traferro (α = angolo con la normale) \rightarrow

legge di rifrazione
$$\frac{\tan\alpha_t}{\tan\alpha_f} = \frac{\mu_o}{\mu_f} \approx 0$$

quindi $\alpha_t \rightarrow 0$ per qualsiasi α_f

Espansioni polari al traferro

sagomate per sagomare la distribuzione di induzione al traferro



Tratto di tubo di flusso in un circuito magnetico

portata del tubo di flusso [Wb]=[Tm²]=[Vs]:

$$\varphi_t(t) \triangleq \int_{S_t} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$$

tensione magnetica [A]:

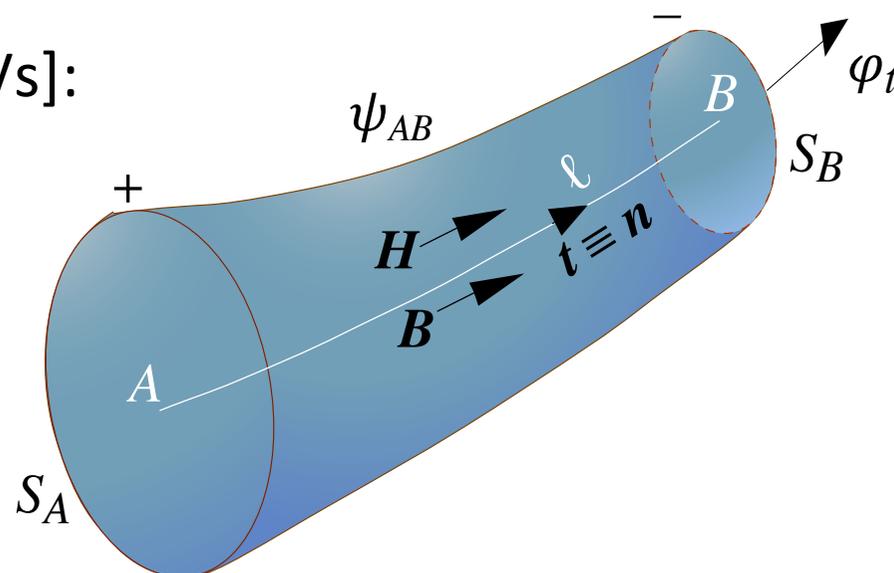
$$\psi_\ell(t) \triangleq \int_\ell \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} d\ell$$

per la legge di Ampère non è conservativa

dentro al tubo non ci sono correnti (sono avvolte all'esterno): $\text{rot}\mathbf{H}=\mathbf{0}$

→ dentro al tubo la tensione magnetica è localmente conservativa =
dipende solo dai punti estremi

$$\psi_{AB} \triangleq \int_{\ell_{AB}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} d\ell$$

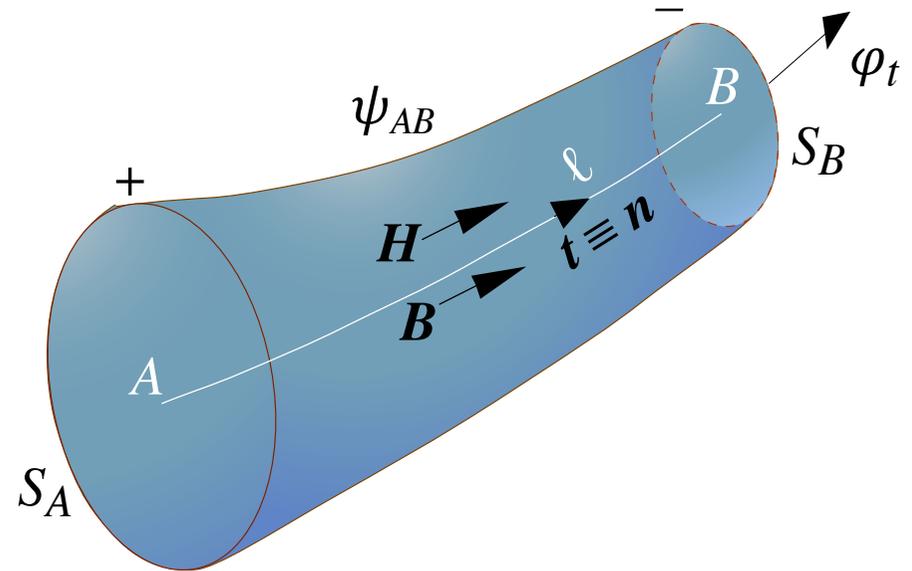


Tratto di tubo di flusso in un circuito magnetico

Riluttanza del tratto di tubo di flusso

$$\mathcal{R} \triangleq \frac{\Psi_{AB}}{\varphi_t}$$

u.m.: [A/Vs]=[H⁻¹]



se **B** è uniforme sulle S_t normali: $\mathcal{R} = \frac{1}{\varphi_t} \int_{\ell_{AB}} \frac{\varphi_t}{\mu S} d\ell = \int_{\ell_{AB}} \frac{d\ell}{\mu S}$

se S_t e μ uniformi lungo ℓ_{AB}: $\mathcal{R} = \frac{\ell_{AB}}{\mu S}$

riluttanza al traferro (privo di spanciamenti): $\mathcal{R}_t = \frac{\ell_t}{\mu_0 S_t}$

Leggi dei circuiti magnetici

Legge di Ohm per i circuiti magnetici:

$$\psi = \mathcal{R} \varphi_t$$

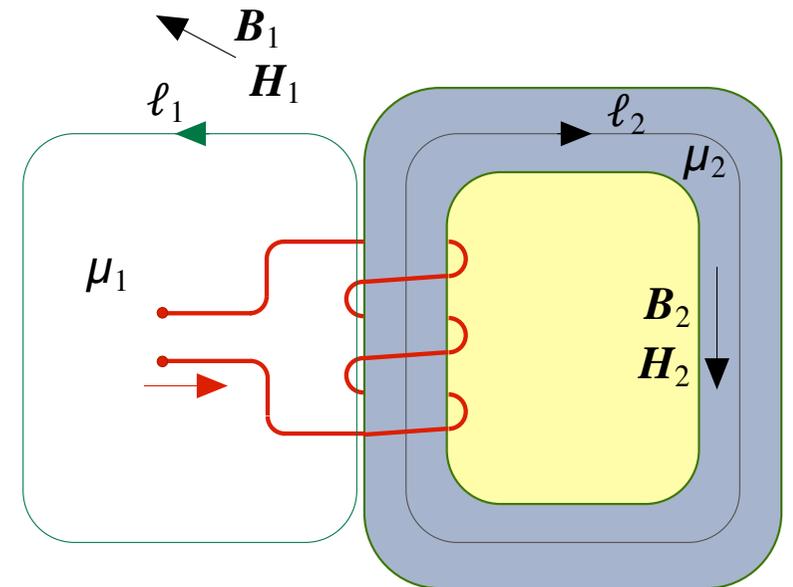
Legge di Hopkinson (legge di Ohm estesa a tubo chiuso non ramificato):

$$Ni = \mathcal{R}_c \varphi_t$$

Ni = forza magnetomotrice (f.m.m.)

\mathcal{R}_c : relazione con induttanza dell'induttore:

$$L = \frac{\varphi_c}{i} = \frac{N \varphi_t}{i} = \frac{N^2}{\mathcal{R}_c}$$

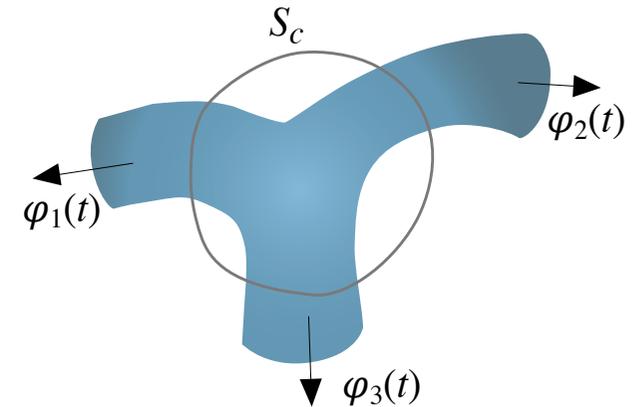


Leggi dei circuiti magnetici

Prima legge di Kirchhoff per i circuiti magnetici:

$$\sum \pm \varphi_{t_i} = 0$$

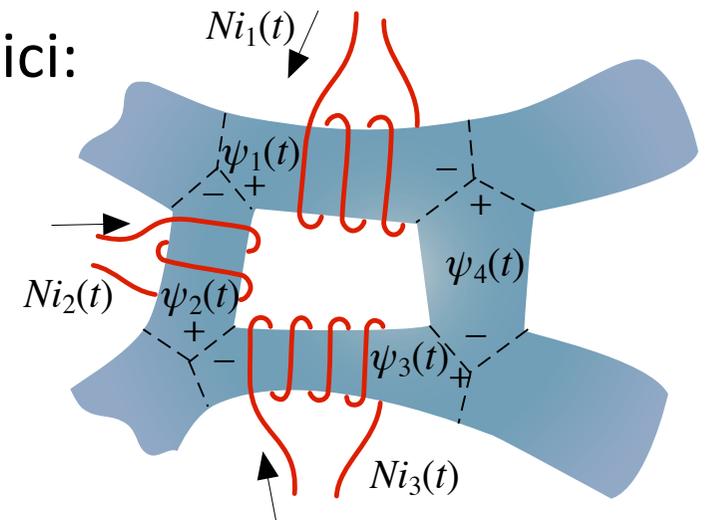
(analoga a $\sum \pm i = 0$)



Seconda legge di Kirchhoff per i circuiti magnetici:

$$\sum \pm \psi_i(t) = \sum \pm N i_i(t)$$

(analoga a $\sum \pm v_R = \sum \pm e$)



Leggi dei circuiti magnetici

	<i>Circuiti elettrici adin.</i>	<i>Circuiti magnetici</i>
solenoidalità (linee chiuse)	$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$	$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$
mezzi canalizzanti	mat. conduttori	mat. ferromagnetici
portata dei tubi di flusso	I	φ_t
tensione dei tubi di flusso	V_R	ψ
parametro dei tubi di flusso	R	\mathcal{R}
legge di Ohm	$V_R = R I$	$\psi = \mathcal{R} \varphi_t$
sorgente (generatore)	E	Ni
tubo di flusso chiuso semplice	$E = R_c I$	$Ni = \mathcal{R}_c \varphi_t$
prima legge di Kirchhoff	$\Sigma \pm I = 0$	$\Sigma \pm \varphi_t = 0$
seconda legge di Kirchhoff	$\Sigma \pm E = \Sigma \pm V_R$	$\Sigma \pm Ni = \Sigma \pm \psi$
parametro equivalente	R_{eq}	\mathcal{R}_{eq}

Analisi circuiti magnetici

Note le fmm Ni e le riluttanze \mathcal{R} , si calcolano i flussi φ_t con i metodi di analisi circuitale noti

si possono usare

- riluttanze equivalenti \mathcal{R}_{eq} a serie e paralleli
- partitori di flusso e di tensione magnetica
- ...

→ Riluttanza equivalente vista da una fmm: estensione della legge di Hopkinson a circuiti ramificati con una fmm:

$$N i = \mathcal{R}_{eq} \varphi_t$$

Non linearità circuiti magnetici

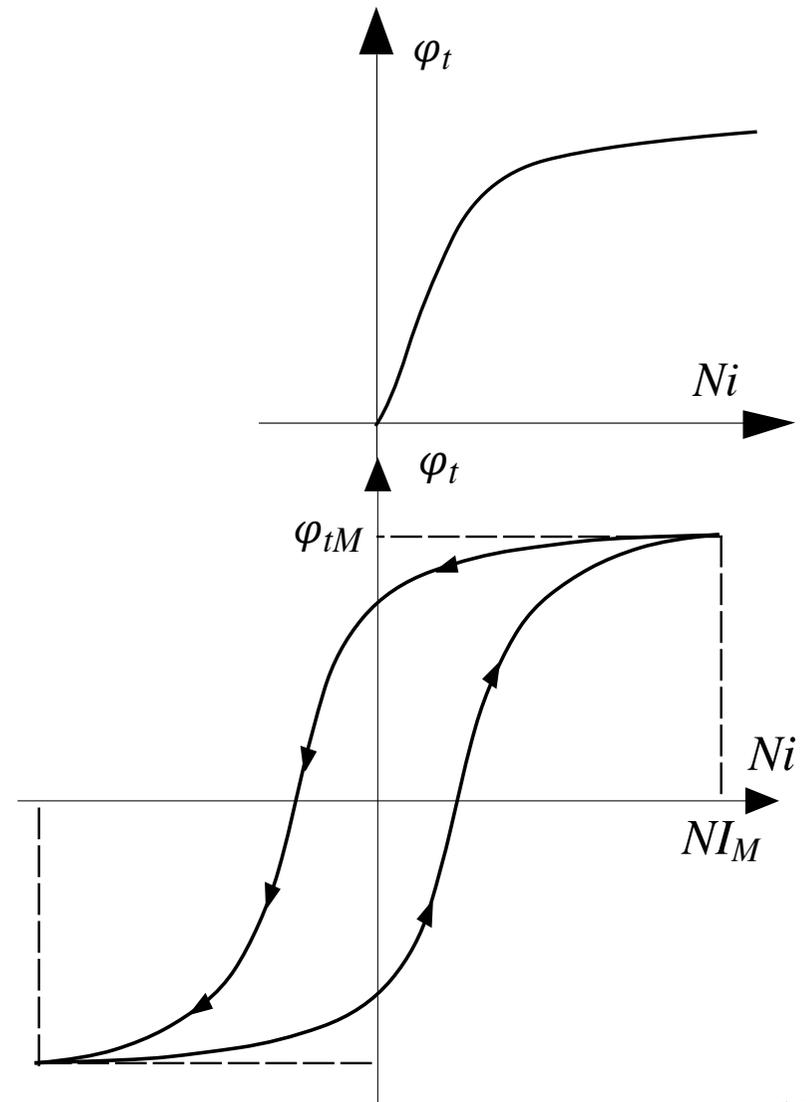
Deriva dalla non linearità dei mezzi ferromagnetici: $\mu = \mu(B)$

- note le f.m.m.: per calcolare i flussi $\varphi_t = \psi / \mathcal{R}$ servono le riluttanze, del tipo $\mathcal{R} = \ell / \mu S$, con $\mu = \mu(B)$.
- ma le induzioni $B = \varphi_t / S$ richiedono che siano noti i flussi φ_t
- loop matematico \rightarrow algoritmi iterativi
- situazioni complesse \rightarrow metodi numerici all'elaboratore

Caratteristica di magnetizzazione

È la curva che descrive il flusso φ_t ottenuto (ad esempio al traferro) al variare della fmm in base a Ni

- a causa dell'aumento delle riluttanze \mathcal{R}_{eq} dei tratti ferromagnetici al crescere di Ni e quindi di φ_t la curva presenta saturazione
- se Ni varia in modo ciclico, lo stesso fa φ_t e quindi \mathbf{B} : a causa dell'isteresi nei tratti ferromagnetici la curva presenta isteresi



Caratteristica di magnetizzazione

fissata l'induzione al traferro B_4 :

→ $\Phi_t = B_4 S_4$ uguale in tutti i tratti del circuito

→ nei tratti in ferro: $B_i = \Phi_t / S_i$

→ $\mu_i = \mu(B_i)$

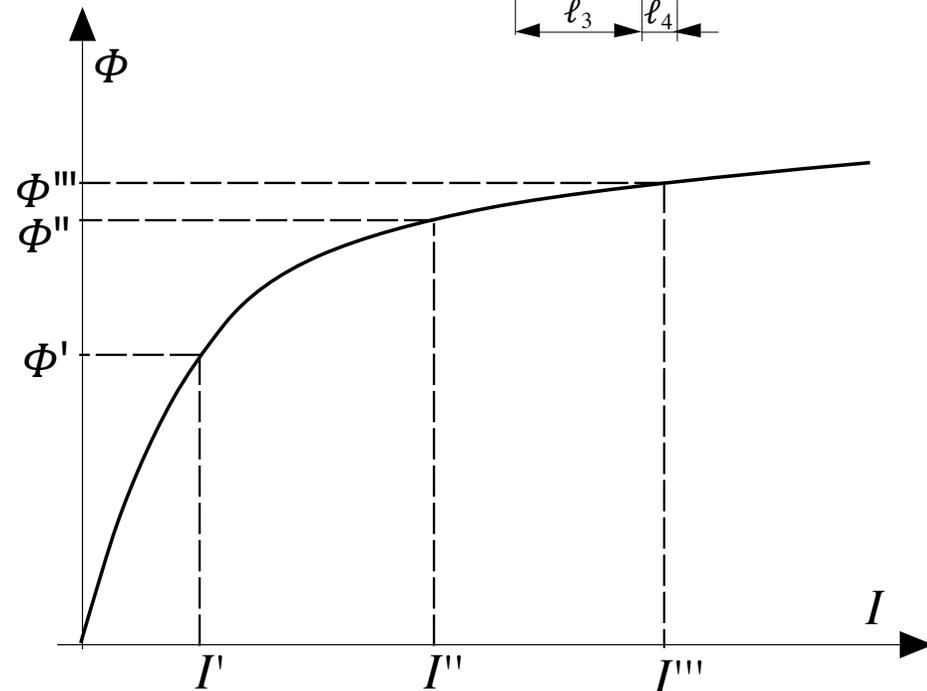
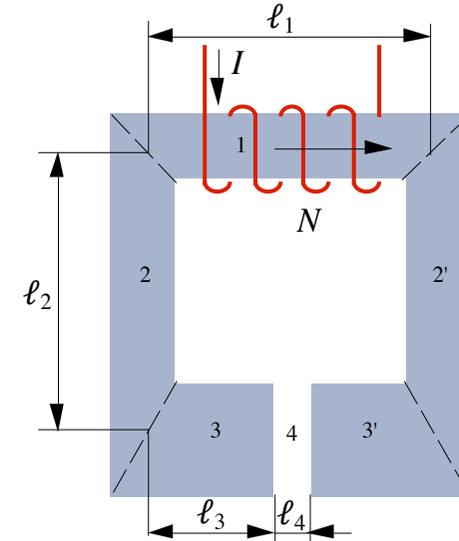
→ $\mathcal{R}_i = \ell_i / \mu_i S_i$

→ $\mathcal{R}_c = \sum \mathcal{R}_i$

→ $NI = \mathcal{R}_c \Phi_t$

iterando:

per punti si costruisce la
caratteristica di magnetizzazione



Circuiti magnetici con magneti permanenti

In assenza di fmm, la legge di Hopkinson diviene $\mathcal{R}_c \Phi_t = \psi_c = 0$

può avere $\Phi_t \neq 0$ se $\mathcal{R}_c = \sum \mathcal{R}_i = 0$

→ richiede un tratto con $\mathcal{R}_m < 0 \rightarrow \mu < 0$ come avviene ai mezzi ferromagnetici duri nel 2° e 4° quadrante (isteresi)
= funzionamento da magneti permanenti

→ nel magnete \mathbf{H}_m è opposta ad \mathbf{H} negli altri tratti e la tensione magnetica ψ_m del magnete ha segno opposto della tensione nel resto del circuito magnetico

Circuiti magnetici con magneti permanenti

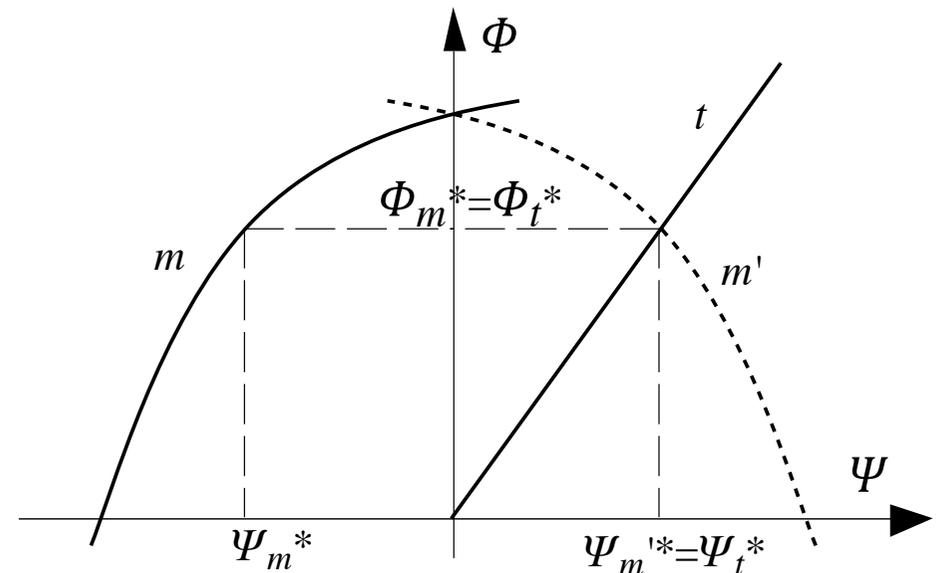
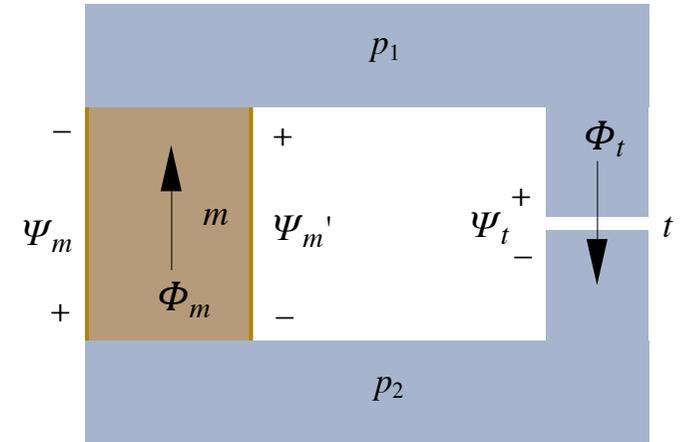
Trascurando i tratti in ferro dolce ad alta permeabilità: solo magnete e traferro

$$\Psi_t = \mathcal{R}_t \Phi_t, \quad \Psi_m = \mathcal{R}_m \Phi_m$$

$$\Phi_m = \Phi_t \quad \mathcal{R}_c \Phi_t = 0 \rightarrow \Psi_m + \Psi_t = 0$$

$$\Phi_m = \Phi_t, \quad \Psi_m' = \Psi_t$$

quanto maggiori sono B_r e H_c del materiale usato per il magnete tanto maggiore è il flusso Φ_t prodotto al traferro



Energia nei circuiti magnetici

Applicando le espressioni di densità di energia di \mathbf{B} e \mathbf{H} ad ogni tratto di tubo di flusso:

$$w_m = W_m \tau = \frac{B^2}{2\mu} \tau = \frac{\varphi_t^2}{2\mu S^2} S \ell = \frac{\varphi_t^2 \mathcal{R}}{2}$$

nel traferro:

$$W_{mt} = \frac{B^2}{2\mu_o} \gg W_{mf} = \frac{B^2}{2\mu_f} \quad w_{mt} = \frac{B^2}{2\mu_o} S_t \ell_t = \frac{\varphi_t^2 \mathcal{R}_t}{2}$$

w_{mt} può essere prevalente sull'energia dei tratti in ferro

Pressione magnetica al traferro:

$$F_m = -\frac{\partial w_{mt}}{\partial \ell_t} = -\frac{B^2}{2\mu_o} S_t = -\frac{\varphi_t^2}{2\mu_o S_t} \quad p_m = \lim_{S_t \rightarrow 0} \frac{|F_m|}{S_t} = \frac{B^2}{2\mu_o}$$

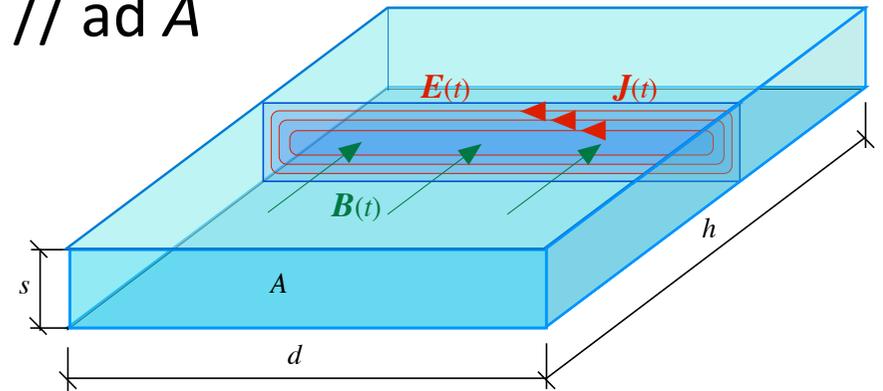
Correnti parassite

Lamina conduttrice sottile ($d \gg s$) con induzione assiale $B(t) = B_M \sin \omega t$

$\text{rot} \mathbf{E}_i = -\partial \mathbf{B} / \partial t \rightarrow \mathbf{E}_i$ e $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}_i$ in tutti i piani // ad A

tubo di flusso di \mathbf{J} : $S_J = h(s/2)$ e $\ell \approx 2d$

$$\rightarrow R = \rho \frac{\ell}{S_J} = \rho \frac{4d}{hs}$$

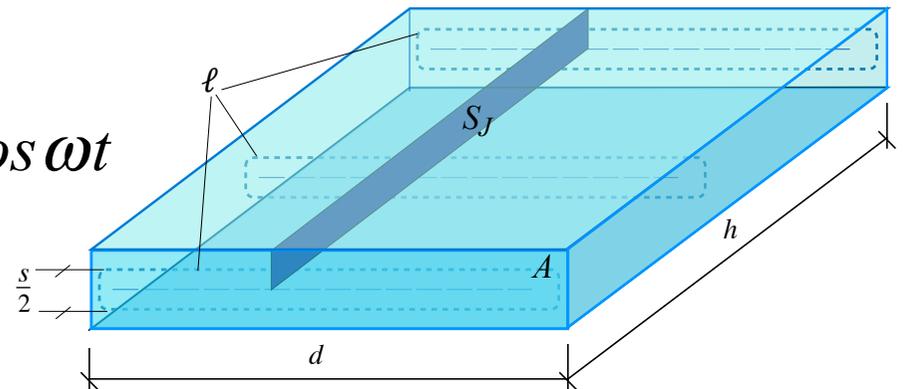


legge di Faraday-Neumann lungo linee rosse: $e(t) = -d\phi_c / dt$

su superficie media $S = ds/2$:

$$e(t) = -\frac{d\phi(t)}{dt} = -S \omega B_M \cos \omega t = -\sqrt{2} E \cos \omega t$$

$$E = \frac{ds}{2\sqrt{2}} \omega B_M$$



Perdite per correnti parassite

$$P = \frac{E^2}{R} = \frac{d^2 s^2 \omega^2 B_M^2}{8} \frac{hs}{\rho 4d} = \frac{s^2 \omega^2 B_M^2}{32 \rho} d s h = \frac{s^2 \omega^2 B_M^2}{32 \rho} \tau$$

τ = volume della lamina

densità di potenza dissipata per correnti parassite [W/m³]

$$P_{cp} = \frac{P}{\tau} = \frac{\omega^2 B_M^2 s^2}{32 \rho} = \frac{\pi^2 f^2 B_M^2 s^2}{8 \rho} = k \frac{f^2 B_M^2 s^2}{\rho} = \beta f^2 B_M^2 s^2$$

β = coefficiente proprio del materiale

Perdite compressive nel ferro

per isteresi e corrente parassite

$$P_{fe} = \eta f B_M^{1,6 \div 2} + \beta f^2 B_M^2 s^2$$

fissati f e il lamierino (fissati η, β, s):

$$P_{fe} = k B_M^2 \quad [\text{W/m}^3]$$

dividendo per il peso specifico $[\text{kg/m}^3]$:

$$P_{fe,p} = k_p B_M^2 \quad [\text{W/kg}]$$

k_p $[\text{W/kgp/T}^2]$ = cifra di perdita del materiale

Nuclei ferromagnetici

in lamierini (nuclei lamellati)
(per bassa frequenza)

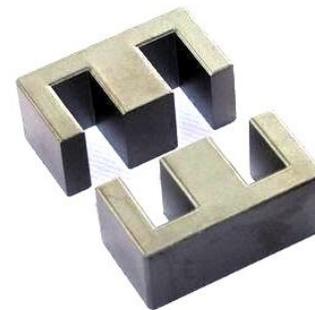


Fe-Si: 0,2% ÷ 5%

$s = 0,35 \div 0,5$ mm

$k_p = 0,5 \div 3,5$ W/kgp/T²

in ferriti (massicci)
(alta resistività, per alta frequenza)
($\rho \cong 10^{-1} \div 10^1$ Ω m)



Induttori con nuclei ferromagnetici in c.a.

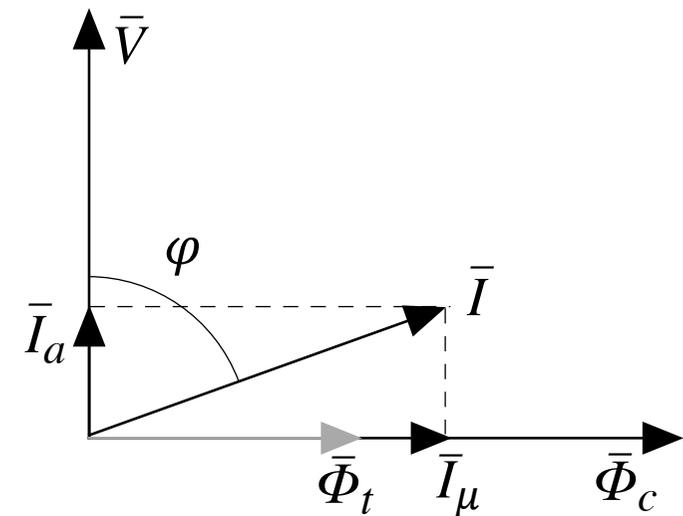
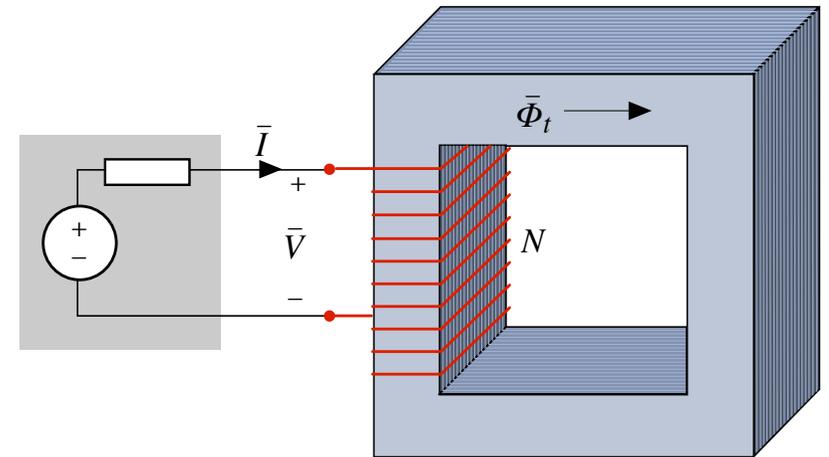
In regime sinusoidale, anche con $R=0$, un induttore con nucleo ferromagnetico deve assorbire potenza attiva, uguale alle perdite nel ferro:

$$P = \int_{\tau} P_{fe} d\tau = V I \cos \varphi$$

quindi v e i non sono in quadratura
ma $v = d\varphi_c/dt \rightarrow \varphi_c$ e v sono in quadratura

la corrente può essere scomposta in due addendi, in fase in quadratura

$$\bar{I} = \bar{I}_a + \bar{I}_\mu$$



induttori con nuclei ferromagnetici in c.a.

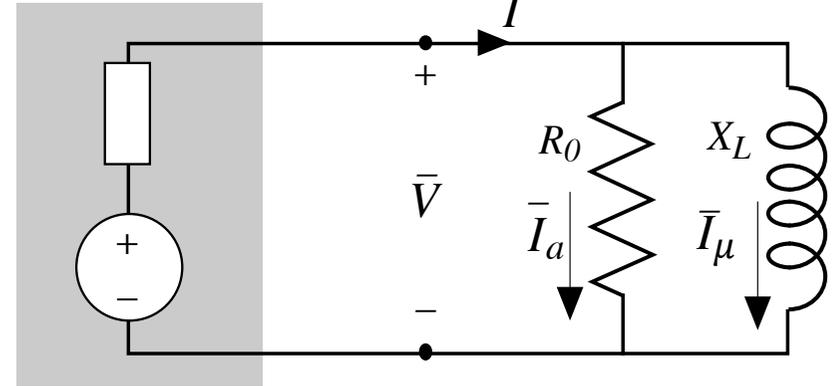
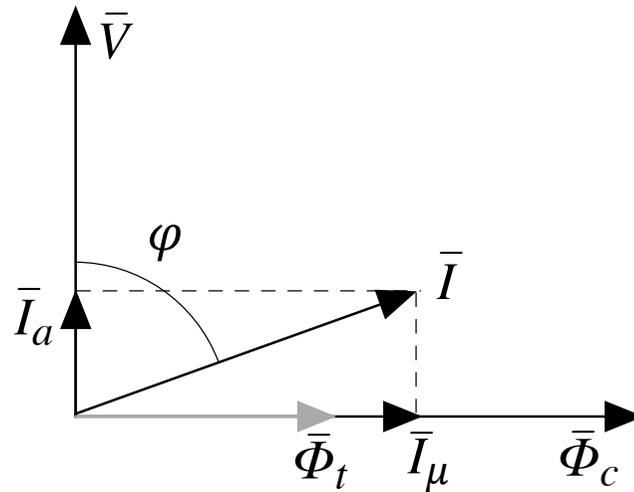
Schema equivalente

$$\bar{I}_a \text{ in } R_0$$

$$\bar{I}_\mu \text{ in } X_L$$

$$\dot{Y} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{jX_L}$$

$$\dot{Z} = \frac{1}{\dot{Y}} = \frac{jX_L R_0}{R_0 + jX_L}$$



$$\bar{I} = \bar{I}_a + \bar{I}_\mu$$

$$\bar{V} = \dot{Z} \bar{I}$$

$$P = V I \cos \varphi = V I_a = \int_{\tau} k B_M^2 d\tau$$

Riluttanza complessa

(modello equivalente che fornisce la stessa impedenza)

$$\dot{\mathcal{R}}_c \triangleq \frac{N \bar{I}}{\bar{\Phi}_t} \rightarrow \dot{L} = \frac{N^2}{\dot{\mathcal{R}}_c} \rightarrow \dot{Z} = j\dot{X}_L = j\omega \frac{N^2}{\dot{\mathcal{R}}_c} \quad \bar{V} = \dot{Z} \bar{I}$$