Università di Padova - Scuola di Ingegneria

Massimo Guarnieri

Elettrotecnica

Elementi di Elettromagnetismo

Capitolo 5:
Elementi di elettromeccanica

Cosa è l'elettromeccanica?

Riguarda l'interazione tra fenomeni elettrodinamici (moto di cariche elettriche) e meccanici (forze e sollecitazioni sui materiali e corpi dotati di massa)

Come grandezze densitarie si considerano:

- campo di corrente di conduzione $\boldsymbol{J}(P,t)$
- campo di induzione magnetica $\boldsymbol{B}(P,t)$
- forze specifiche $\boldsymbol{f}(P,t)$
- velocità delle cariche e dei corpi $\boldsymbol{v}(P,t)$

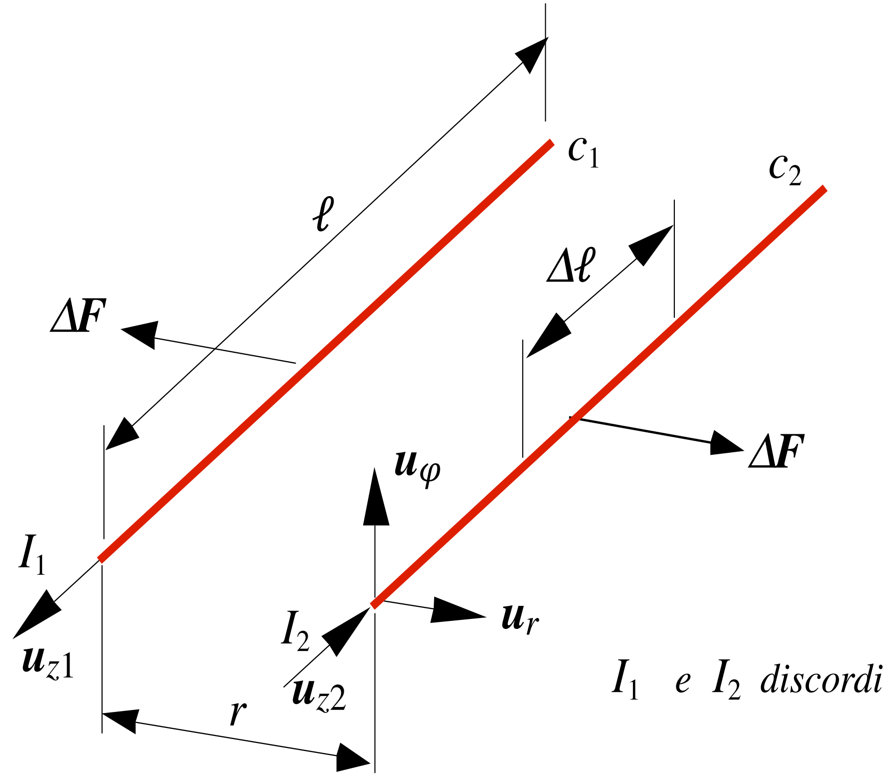
Forze elettrodinamiche

Esperienza di Ampère

due conduttori rettilinei e paralleli con correnti I_1 e I_2 immersi in mezzo uniforme con permeabilità μ

forza su ciascun tratto $\Delta\ell$ dei conduttori

$$\Delta \boldsymbol{F} = \frac{\mu}{2\pi}\frac{I_1 I_2 \Delta\ell}{r}\boldsymbol{u}_r \qquad \text{[N/m]}$$



forza elettrodinamica

o **forza ponderomotrice**

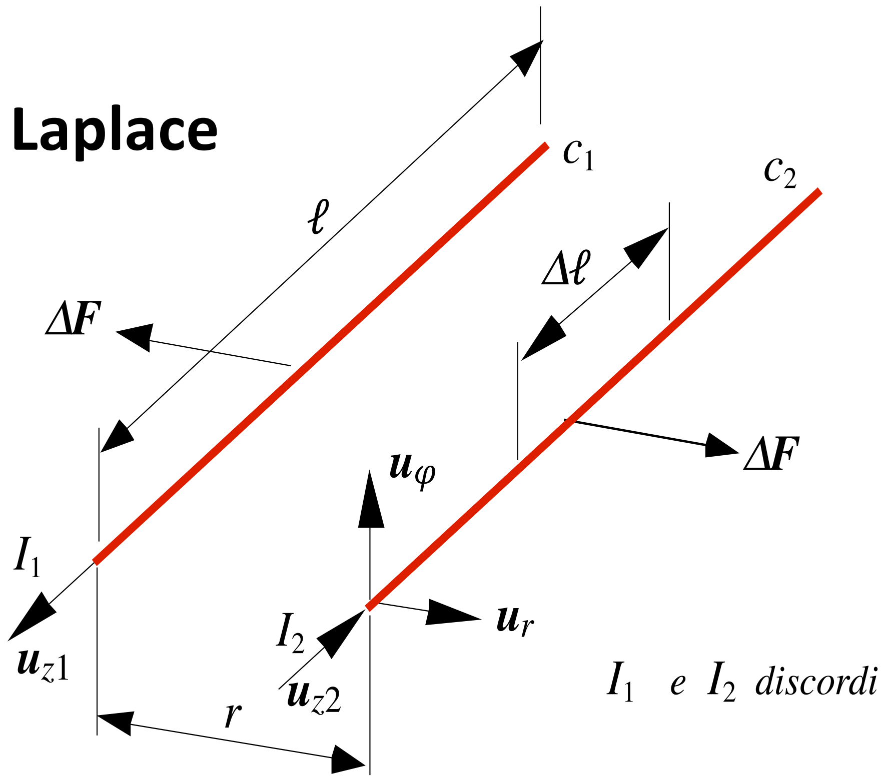
Forze elettrodinamiche

Inserendo la legge di Biot-Savart $\boldsymbol{H}(P)=\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{i}{r}\boldsymbol{u}_{\varphi}$, $\boldsymbol{B}=\mu\,\boldsymbol{H}$

e considerando tratti infinitesimi →

Seconda legge dell'azione elementare di Laplace

$$d\boldsymbol{F}_p(P,t)=i\,\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{B}\;d\ell \qquad \text{[N/m]}$$



forza ponderomotrice infinitesima

- vale in mezzo non uniforme
  e in qualsiasi geometria
- vale lontano dall'asse →
  non vale sull'asse dei conduttori «filiformi»

Forze elettrodinamiche

Per valutazioni nel conduttore va tenuto conto delle sue dimensioni

Conduttori massicci di sezione S: $i\boldsymbol{t} = \boldsymbol{J}S$ →

$$d\boldsymbol{F}_p(P,t) = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}\; S\, d\ell$$

Considerando elemento dS di S →

$$d\boldsymbol{F}_p(P,t) = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}\; dS\, d\ell = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}\; d\tau$$

Densità volumica di forza ponderomotrice

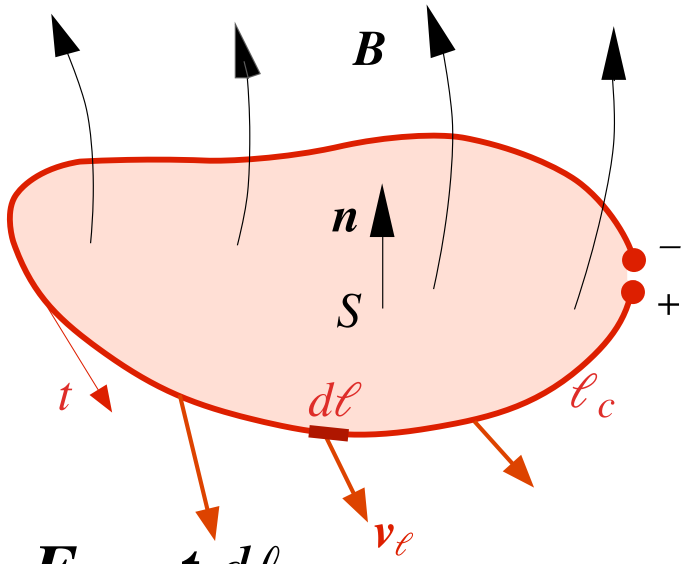
$$\boldsymbol{f}_p(P,t) \triangleq \frac{d\boldsymbol{F}_m}{d\tau} = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} \qquad [\mathrm{N/m^3}]$$

Forze elettrodinamiche

Tali forze o **sollecitazioni elettrodinamiche** devono essere considerate con cura nella progettazione di macchine, impianti e sistemi elettrici, per dimensionare adeguatamente le strutture che devono sostenerle senza che avvengano cedimenti e rotture

Forze elettriche associate al moto

Legge di Faraday-Neumann: linea chiusa ℓ_c immersa in campo di induzione $\boldsymbol{B}$ e in moto: i suoi punti hanno velocità $\boldsymbol{v}_\ell$ → sviluppa la **f.e.m. mozionale**



$$e_m(t) = -\left.\frac{\partial \varphi_c(t)}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{B}=\mathrm{cost}} = \oint_{\ell_c} (\boldsymbol{v}_\ell \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{t}\, d\ell$$

Forza elettrica specifica mozionale

$$\boldsymbol{E}_m(P,t) = \boldsymbol{v}_\ell(P,t) \times \boldsymbol{B}(P,t) \quad \rightarrow \quad e_m(t) = \oint_{\ell_c} \boldsymbol{E}_m \cdot \boldsymbol{t}\, d\ell$$

Vale anche su tratti di linea in moto o su linea aperta in moto

$$e_{m_{\ell_a}}(t) = \int_{\ell_a} (\boldsymbol{v}_\ell \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{t}\; d\ell = \int_{\ell_a} \boldsymbol{E}_m \cdot \boldsymbol{t}\; d\ell$$

Forze elettriche associate al moto

Forza di Lorentz: agisce su una carica q in moto con velocità $\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{F}_L(P,t) = q\,\boldsymbol{v}(P,t) \times \boldsymbol{B}(P,t) \qquad [\mathrm{N}]$$

Forza elettrica specifica di Lorentz

$$\boldsymbol{E}_L(P,t) = \boldsymbol{v}(P,t) \times \boldsymbol{B}(P,t) \qquad [\mathrm{N/C}] = [\mathrm{V/m}]$$

$\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{E}_L$ sono ortogonali → $\boldsymbol{F}_L$ non produce lavoro e potenza su q:

$$\boldsymbol{P}_L = \boldsymbol{F}_L \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

Moto delle cariche elettriche nei conduttori

Forza di Lorentz

$$\boldsymbol{F}_L(P,t) = q\,\boldsymbol{v}(P,t) \times \boldsymbol{B}(P,t) \qquad \text{[N]}$$

f. specifica $$\boldsymbol{E}_L(P,t) = \boldsymbol{v}(P,t) \times \boldsymbol{B}(P,t) \qquad \text{[N/C]}$$

simile a $$\boldsymbol{E}_m(P,t) = \boldsymbol{v}_\ell(P,t) \times \boldsymbol{B}(P,t) \qquad \text{[N/C]}$$

Moto delle cariche elettriche nei conduttori

Se si muovono sia cariche positive che negative:

$$\boldsymbol{J}(P,t) = \rho_c^+ \boldsymbol{v}_c^+ + \rho_c^- \boldsymbol{v}_c^-$$

$\rho_c^+ + \rho_c^- = 0$: mezzo elettricamente neutro:

$\boldsymbol{v}_c^+ \neq \boldsymbol{v}_c^-$: moto indipendente delle cariche → $\boldsymbol{J} \neq \boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{v}_c^+ = \boldsymbol{v}_c^-$: moto comune delle cariche → $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$

$\rho_c^+ + \rho_c^- \neq 0$: mezzo elettricamente carico:

$\boldsymbol{v}_c^+ = \boldsymbol{v}_c^-$: moto traslatorio del mezzo → corrente di convezione

Moto delle cariche elettriche nei conduttori

Forza di Lorentz nei conduttori fermi

le velocità totali delle cariche $\boldsymbol{v}^{+}$ e $\boldsymbol{v}^{-}$ coincidono con le velocità di migrazione nel conduttore $\boldsymbol{v}_c^{+}$ e $\boldsymbol{v}_c^{-}$:

$\boldsymbol{v}^{+} = \boldsymbol{v}_c^{+}$ e $\boldsymbol{v}^{-} = \boldsymbol{v}_c^{-}$ $\rightarrow$

Forza di Lorentz sulle cariche $dq^{+}=\rho_c^{+}d\tau$ e $dq^{-}=\rho_c^{-}d\tau$ del volumetto $d\tau$

$$\rightarrow \quad d\boldsymbol{F}_L(P,t) = \rho_c^{+}d\tau\,\boldsymbol{v}_c^{+}\times\boldsymbol{B} + \rho_c^{-}d\tau\,\boldsymbol{v}_c^{-}\times\boldsymbol{B} = (\rho_c^{+}\boldsymbol{v}_c^{+} + \rho_c^{-}\boldsymbol{v}_c^{-})\times\boldsymbol{B}\,d\tau = \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}\,d\tau$$

$$\boldsymbol{f}_L(P,t) \triangleq \frac{d\boldsymbol{F}_L}{d\tau} = \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}$$

densità volumica di forza di Lorentz = densità volumica di forza ponderomotrice

Non lavora ma crea sollecitazioni meccaniche

Moto delle cariche elettriche nei conduttori

Forza di Lorentz nei conduttori in moto

le velocità totali delle cariche $\boldsymbol{v}^+$ e $\boldsymbol{v}^-$ sono date dalle velocità di migrazione nel conduttore + la velocita di traslazione del conduttore $\boldsymbol{v}_\ell$:

$\boldsymbol{v}^+ = \boldsymbol{v}_c^+ + \boldsymbol{v}_\ell$ e $\boldsymbol{v}^- = \boldsymbol{v}_c^- + \boldsymbol{v}_\ell$

→ $$\boldsymbol{f}_L(P,t) = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} + (\rho_c^+ + \rho_c^-)\boldsymbol{E}_m$$

→ Appare un secondo addendo che coinvolge la forza specifica mozionale $\boldsymbol{E}_m$. In condizioni di neutralità elettrica, $\rho_c^+ + \rho_c^- = 0$, questa non ha effetti meccanici sul mezzo, ma agisce sulle singole cariche.

Conversione elettromeccanica

Bilancio energetico di Lorentz nei conduttori in moto

bilancio di potenza di Lorentz sulle cariche positive $dq^{+}=\rho_{c}^{+}d\tau$ del

volumetto $d\tau$: $d\boldsymbol{F}_{L}^{+}\cdot\boldsymbol{v}^{+} = dq^{+}(\boldsymbol{v}^{+}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v}^{+} = 0$ con $\boldsymbol{v}^{+} = \boldsymbol{v}_{c}^{+} + \boldsymbol{v}_{\ell}$ $\rightarrow$

$$\rho_{c}^{+}d\tau\,[(\boldsymbol{v}_{c}^{+}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v}_{\ell} + (\boldsymbol{v}_{\ell}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v}_{c}^{+}] = 0$$

analogo bilancio sulle cariche negative $dq^{-} = \rho_{c}^{-}d\tau$:

$$\rho_{c}^{-}d\tau\,[(\boldsymbol{v}_{c}^{-}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v}_{\ell} + (\boldsymbol{v}_{\ell}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v}_{c}^{-}] = 0$$

Somma (introducendo $\boldsymbol{J} = \rho_{c}^{+}\,\boldsymbol{v}_{c}^{+}+\rho_{c}^{-}\,\boldsymbol{v}_{c}^{-}$)

$$(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v}_{\ell}\,d\tau + (\boldsymbol{v}_{\ell}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{J}\,d\tau = 0$$

Conversione elettromeccanica

$$(\boldsymbol{J}\times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{v}_\ell \, d\tau + (\boldsymbol{v}_\ell \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{J}] \, d\tau = 0 \rightarrow \qquad \boldsymbol{f}_p \cdot \boldsymbol{v}_\ell \, d\tau + \boldsymbol{E}_m \cdot \boldsymbol{J} \, d\tau = 0$$

Densità di potenza meccanica generata: $P_m = \boldsymbol{f}_p \cdot \boldsymbol{v}_\ell$ [W/m^3]

Densità di potenza elettrica generata: $P_g = \boldsymbol{E}_m \cdot \boldsymbol{J}$ [W/m^3]

$$\rightarrow \qquad P_m + P_g = 0$$

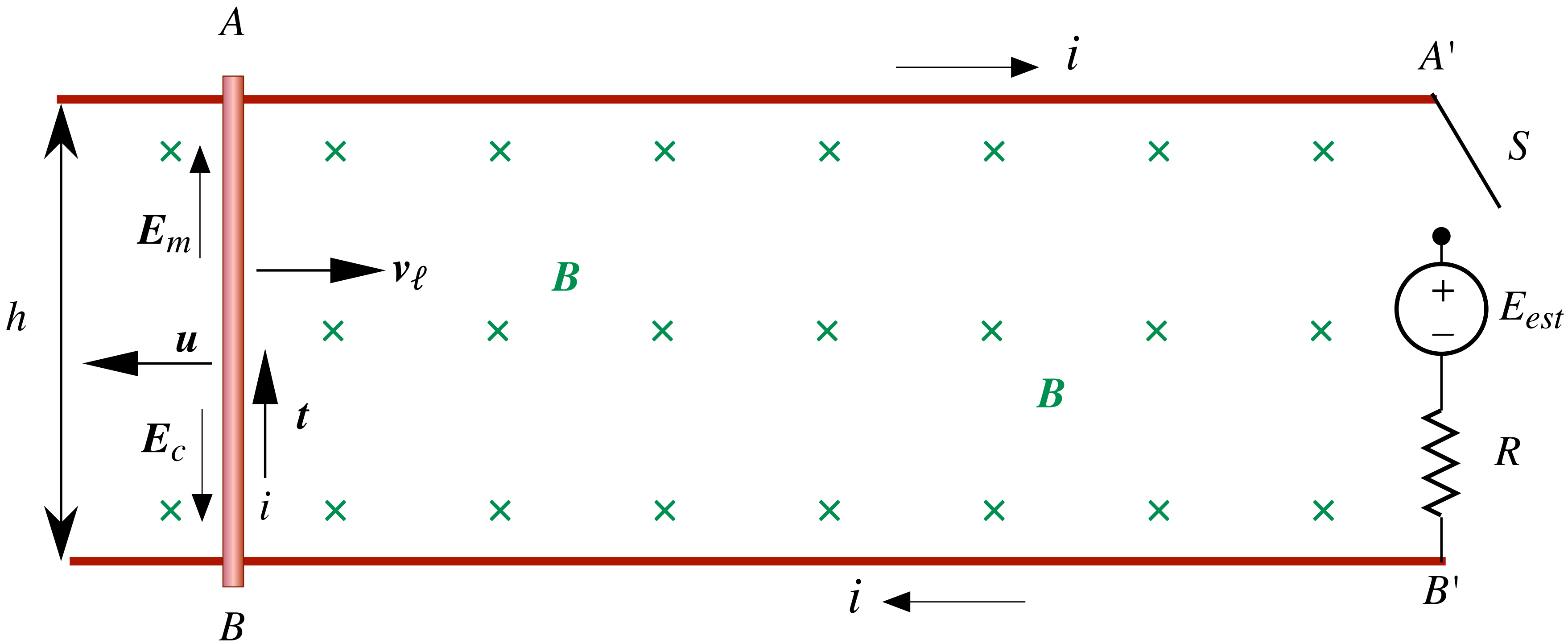
Potenza meccanica che entra (P_m<0) = potenza elettrica che esce (P_e>0)

→ funzionamento da generatore

Potenza meccanica che esce (P_m>0) = potenza elettrica che entra (P_e<0)

→ funzionamento da motore

Macchina lineare omopolare

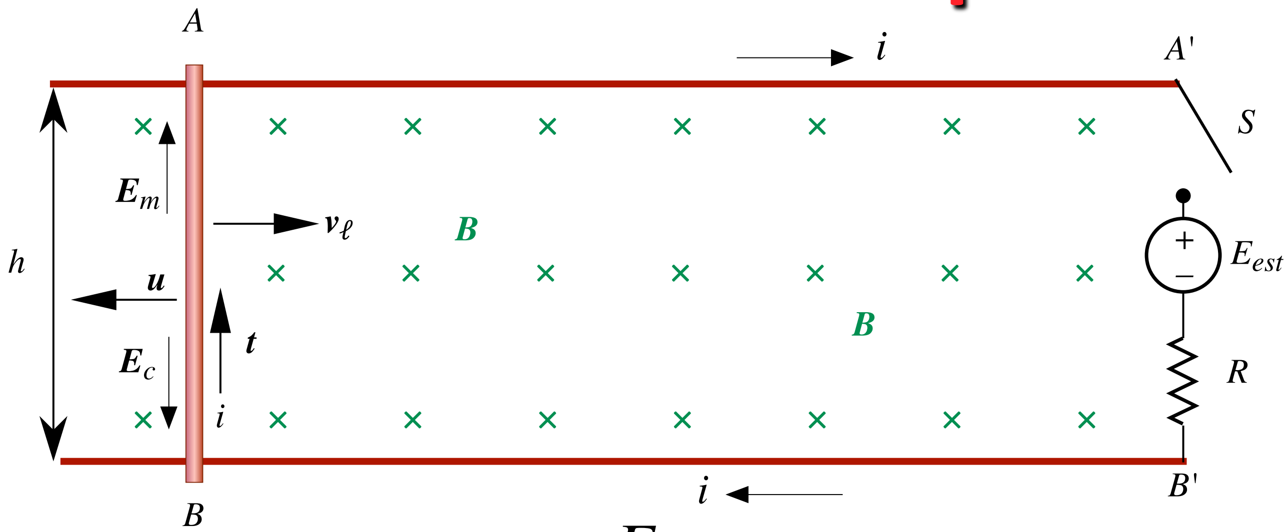


Lungo la sbarretta in moto con velocità $\boldsymbol{v}_\ell$:

$\boldsymbol{E}_m = \boldsymbol{v}_\ell \times \boldsymbol{B} = v_\ell B$ → $e_{AB} = v_\ell B\, h$ [V]

A vuoto: $i=0$ → $P_m = -P_g = 0$

Macchina lineare omopolare



A carico: $e_{AB} = v_\ell B h$ $\quad i = \dfrac{e_{AB} - E_{est}}{R}$

Generatore: $e_{AB} > E_{est}$ → $i > 0$

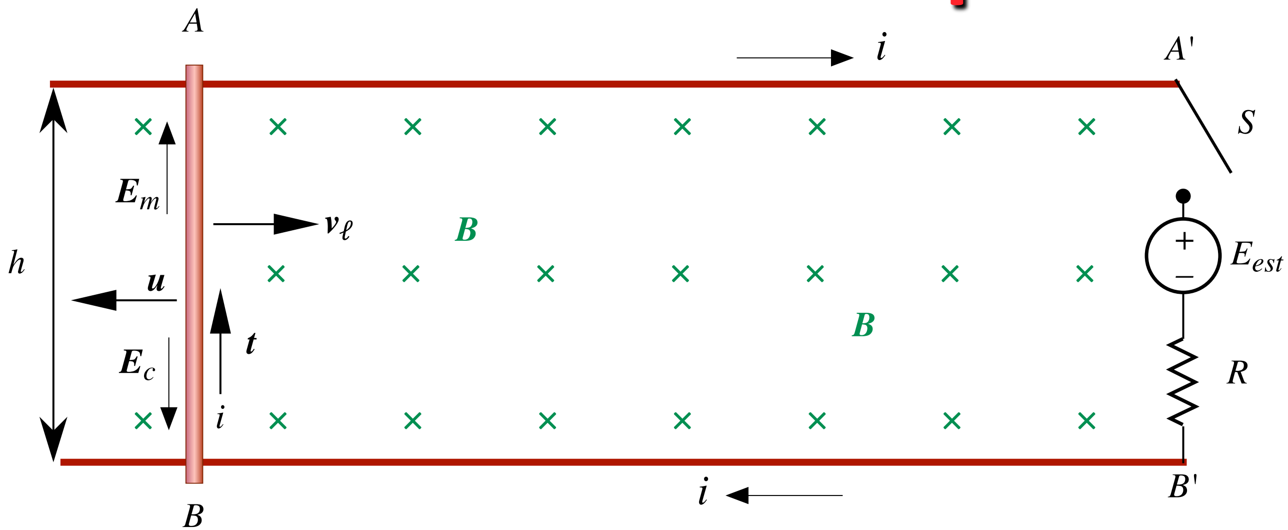
→ $\boldsymbol{F}_\ell = \boldsymbol{J}S \times \boldsymbol{B}\, h = iBh\boldsymbol{u}$ è opposta a v_ℓ →

azione frenante:

potenza meccanica generata < 0 (=assorbita) $\quad P_m = -iBhv_\ell < 0$

potenza elettrica generata < 0 $\quad P_g = e_{AB}\, i = -P_m > 0$

Macchina lineare omopolare



A carico: $e_{AB} = v_\ell B\, h$ $\qquad i = \dfrac{e_{AB} - E_{est}}{R}$

Motore: $e_{AB} < E_{est}$ → $i < 0$

→ $\boldsymbol{F}_\ell = \boldsymbol{JS} \times \boldsymbol{B}\ h = iBh\boldsymbol{u}$ è concorde a v_ℓ →

azione motrice:

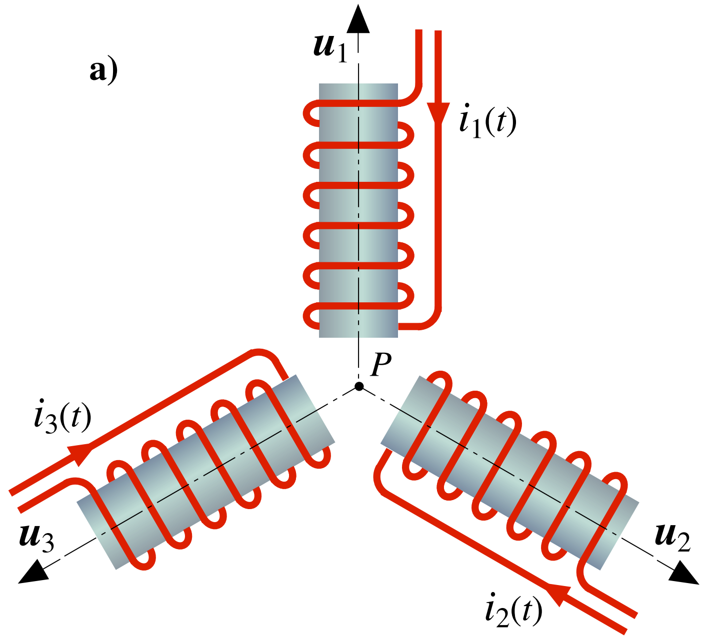
potenza meccanica generata > 0 $\qquad P_m = -iBhv_\ell > 0$

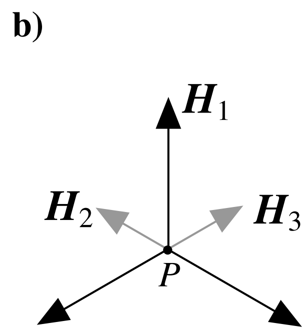
potenza elettrica generata < 0 (=assorbita) $\qquad P_g = e_{AB}\, i = -P_m < 0$

Campo magnetico rotante

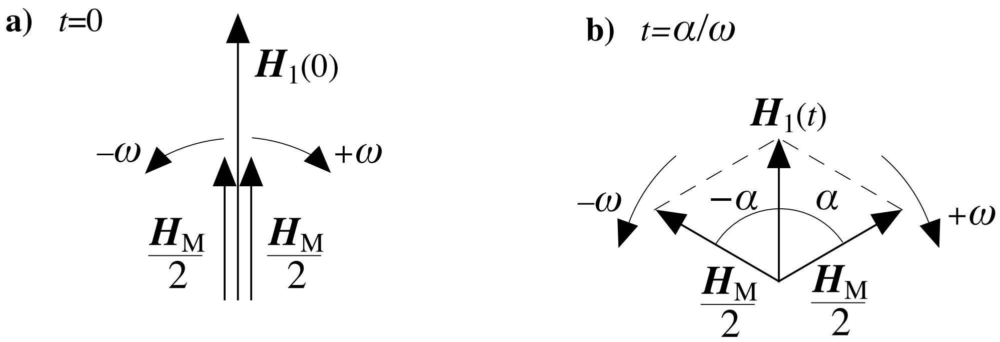
$$
\begin{cases}
i_1(t) = I_M \cos(\omega t) \\
i_2(t) = I_M \cos\left(\omega t - \dfrac{2\pi}{3}\right) \\
i_3(t) = I_M \cos\left(\omega t - \dfrac{4\pi}{3}\right)
\end{cases}
$$

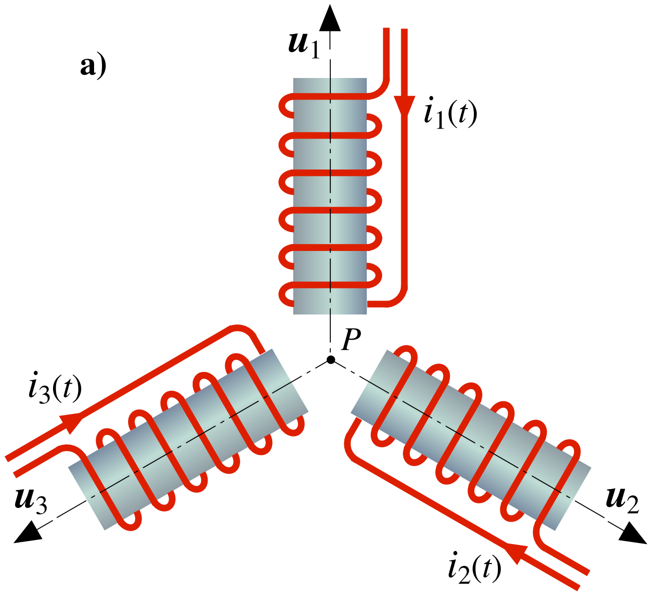
$$
\begin{cases}
\boldsymbol{H}_1(t) = H_M \, cos(\omega t) \, \boldsymbol{u}_1 \\
\boldsymbol{H}_2(t) = H_M \, cos\left(\omega t - \dfrac{2\pi}{3}\right) \boldsymbol{u}_2 \\
\boldsymbol{H}_3(t) = H_M \, cos\left(\omega t - \dfrac{4\pi}{3}\right) \boldsymbol{u}_3
\end{cases}
$$

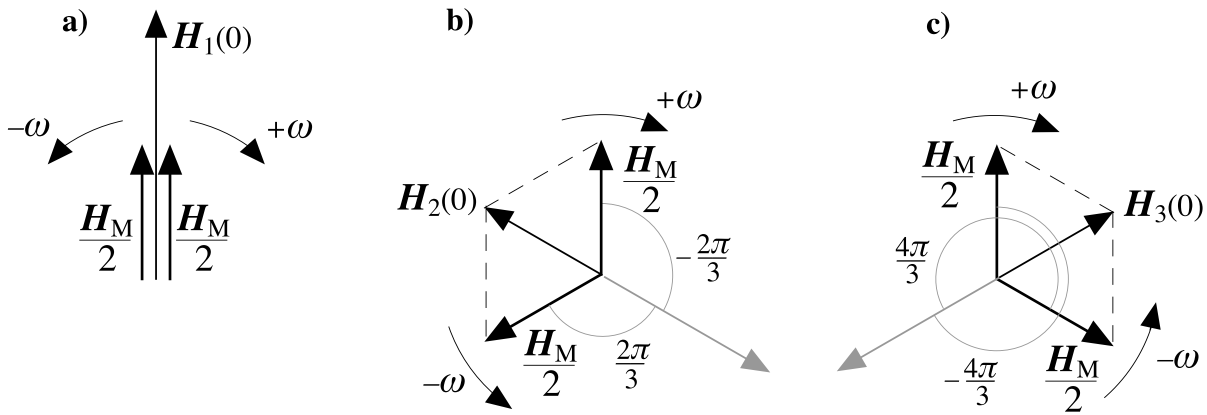




Campo magnetico rotante







Campo magnetico rotante