1 Algebra vettoriale

1.1 Algebra vettoriale

Esercizio 1 Due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono caratterizzati, nella rappresentazione cartesiana (x, y, z) dalle componenti:

$$\begin{cases} \vec{a} = (-2, 3, 5) \\ \vec{b} = (1, 3, 4) \end{cases} \tag{1}$$

Calcolare:

1. il modulo dei due vettori
2. il modulo della somma dei due vettori
3. l'angolo compreso tra i due vettori
4. il prodotto vettoriale dei due vettori

I due vettori sono rappresentati tramite le loro componenti rispetto il sistema di riferimento cartesiano (x, y, z), quindi possono anche essere espressi in forma esplicita come:

$$\begin{cases} \vec{a} = -2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 5\hat{k} \\ \vec{b} = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k} \end{cases} \tag{2}$$

Il modulo dei vettori è facilmente ottenibile come la radice quadrata della somma in quadratura delle loro componenti, e quindi:

$$\begin{cases} a = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 5^2} = 6.16 \\ b = \sqrt{1^2 + 3^2 + 4^2} = 5.10 \end{cases} \tag{3}$$

Per calcolare il modulo del vettore somma, passiamo prima a calcolare il vettore $\vec{a} + \vec{b}$.

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(-2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}\right) + \left(\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}\right) = \tag{4}$$

$$= (-2 + 1)\,\hat{\imath} + (3 + 3)\,\hat{\jmath} + (5 + 4)\,\hat{k} = \tag{5}$$

$$= -\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} + 9\hat{k} \tag{6}$$

E quindi passiamo al calcolo del modulo:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 6^2 + 9^2} = 10.86 \tag{7}$$

Calcolare l'angolo compreso tra i due vettori è possibile facilmente se ricordiamo la definizione di prodotto scalare:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta \tag{8}$$

Al tempo stesso il prodotto scalare in termini delle componenti può essere riscritto come:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(-2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}\right) \cdot \left(\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}\right) = \tag{9}$$

$$= \left(-2\hat{\imath}\right) \cdot \left(\hat{\imath}\right) + \cancel{\left(-2\hat{\imath}\right) \cdot \left(3\hat{\jmath}\right)} + \cancel{\left(-2\hat{\imath}\right) \cdot \left(4\hat{k}\right)} + \tag{10}$$

$$+ \cancel{\left(3\hat{\jmath}\right) \cdot \left(\hat{\imath}\right)} + \left(3\hat{\jmath}\right) \cdot \left(3\hat{\jmath}\right) + \cancel{\left(3\hat{\jmath}\right) \cdot \left(4\hat{k}\right)} + \tag{11}$$

$$+ \cancel{\left(5\hat{k}\right) \cdot \left(\hat{\imath}\right)} + \cancel{\left(5\hat{k}\right) \cdot \left(3\hat{\jmath}\right)} + \left(5\hat{k}\right) \cdot \left(4\hat{k}\right) = \tag{12}$$

$$= -2 + 9 + 20 = 27 \tag{13}$$

Quindi per ottenere l'angolo compreso tra i due vettori basta a questo punto invertire la relazione precedente e ricavare:

$$\arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}\right) = \arccos\left(\frac{27}{(6.16)(5.10)}\right) = 0.54\ rad \tag{14}$$

Per svolgere il prodotto vettoriale dei due possiamo passare nuovamente attraverso il calcolo in termini di componenti, ma è anche possibile utilizzare la tecnica del discriminante simbolico:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \tag{15}$$

$$= \hat{\imath} \det \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - \hat{\jmath} \det \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \hat{k} \det \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \tag{16}$$

$$= -3\hat{\imath} + 13\hat{\jmath} - 9\hat{k} \tag{17}$$

Ricordiamo che il modulo del prodotto vettoriale $\vec{a} \times \vec{b}$ è pari a:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \theta = 16.1 \tag{18}$$

Il che chiaramente è uguale al risultato che avremmo ottenuto calcolando la radice quadrata della somma in quadratura delle componenti del vettore $\vec{a} \times \vec{b}$ appena calcolato:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-3)^3 + 13^2 + (-9)^2} = 16.1 \tag{19}$$

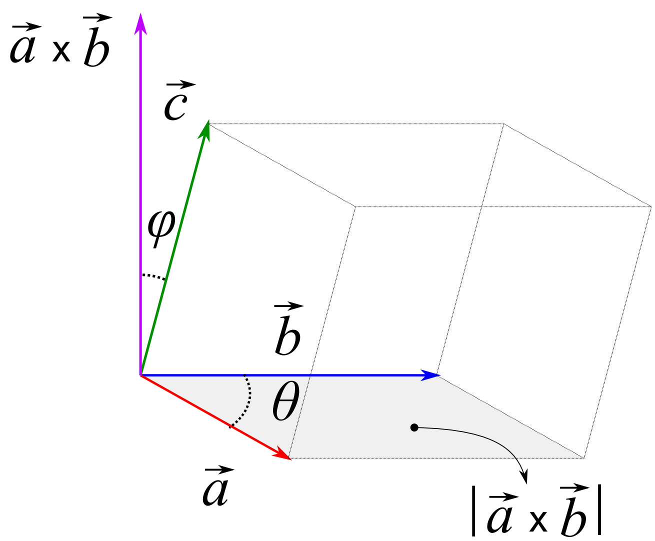
Esercizio 2 [Prof. U. Gasparini] Determinare il volume di un parallelepipedo che ha per lato i tre vettori:

$$\begin{cases} \vec{a} = (1,2,0)\,cm \\ \vec{b} = (0,4,0)\,cm \\ \vec{c} = (0,1,3)\,cm \end{cases} \tag{20}$$

Sappiamo che il modulo del prodotto vettoriale di due vettori è pari all'area del parallelogramma costruito con i vettori come lati, quindi:

$$Area_{ab} = |\vec{a} \times \vec{b}| = ab\sin\theta \tag{21}$$

L'altezza del parallelepipedo invece è data dalla proiezione del vettore $\vec{c}$ lungo la perpendicolare al piano formato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$.



Ricordando che il prodotto scalare di un vettore per un versore equivale alla proiezione del vettore lungo la direttrice definita dal versore, possiamo quindi facilmente osservare che l'altezza del parallelepipedo dovrebbe essere data da:

$$h = \vec{c} \cdot \hat{u}_{\vec{a}\times\vec{b}} \tag{22}$$

dove $\hat{u}_{\vec{a}\times\vec{b}}$ è appunto il versore che definisce la direzione ortogonale al piano formato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Volendo quindi calcolare il volume del parallelepipedo, osserviamo come si possa semplicemente risolvere il cosiddetto *prodotto misto*:

$$V_{abc} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} \tag{23}$$

Notiamo che non è necessario inserire parentesi, in quando il prodotto misto è chiaramente definito (non potendo svolgere il prodotto vettoriale tra un vettore e uno scalare).

Per risolvere il prodotto misto, e calcolare così finalmente il volume del parallelepipedo, possiamo prima scrivere:

$$\begin{aligned} V_{abc} &= \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \qquad (24) \\ &= (\vec{a} \times \vec{b})_x c_x + (\vec{a} \times \vec{b})_y c_y + (\vec{a} \times \vec{b})_z c_z \qquad (25) \end{aligned}$$

Osserviamo che $c_x = 0$; quindi semplificando otteniamo:

$$\begin{aligned} V_{abc} &= (\vec{a} \times \vec{b})_y c_y + (\vec{a} \times \vec{b})_z c_z = \qquad (26) \\ &= (a_z b_x - a_x b_z) c_y + (a_x b_y - a_y b_x) c_z \qquad (27) \end{aligned}$$

In questo caso osserviamo che sia a_z che b_z sono nulli, quindi semplificando ulteriormente ritroviamo:

$$\begin{aligned} V_{abc} &= (a_x b_y - a_y b_x) c_z = \qquad (28) \\ &= (4)(3)\, cm^3 = 12\, cm^3 \qquad (29) \end{aligned}$$

2 Cinematica

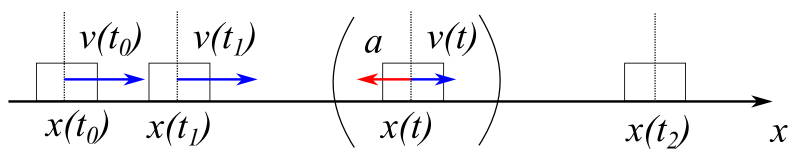
2.1 Cinematica scalare e moti unidimensionali

Esercizio 1 Un'automobile è in moto a velocità costante $v_0 = 100\,km/h$. Ad un certo istante t_0 un ostacolo si pone sulla strada, ad una distanza $D = 220m$, e per evitarlo il guidatore frena portando il mezzo ad arrestare il suo moto. Dato il tempo di reazione del guidatore ($t_r = 0.2\,s$), e la decelerazione massima che l'auto può compiere durante la frenata ($a = -2\,m/s^2$, considerata costante per tutta la durata della frenata), valutare:

1. dopo quanto tempo a partire da t_0 l'auto arresta il proprio moto

2. se l'auto riuscirà ad arrestare il suo moto prima dell'impatto con l'ostacolo

3. quanto valgono la velocità e accelerazione media durante l'intero moto



Possiamo descrivere il moto a partire dalla posizione raggiunta dall'auto all'istante t_0, usando per comodità la notazione $x_0 = x(t_0)$.

Per alcuni istanti dopo il tempo t_0 l'auto continua nel suo moto a velocità costante v_0, in quanto il tempo di reazione del guidatore non gli ha ancora permesso di iniziare la frenata.

In questo tratto di traiettoria, che si sviluppa tra l'istante t_0 e l'istante $t_1 = t_0 + t_r$, il moto è chiaramente uniforme ($v(t) = const.$).

Successivamente, a partire dall'istante t_1, il moto prosegue sotto l'azione di un'accelerazione costante, opposta a $v(t)$ in quanto l'auto è soggetta ad una decelerazione (la velocità cala in funzione del tempo, quindi la derivata prima di $v(t)$ nel tempo è negativa). Questo è quindi un moto uniformemente accelerato, che si conclude in un istante t_2, al quale l'auto ha raggiunto il completo arresto, $v(t_2) = 0$.

Possiamo quindi descrivere il moto separandolo in due parti, per comodità. Tra l'istante t_0 e $t < t_1$ il moto è descritto dalle relazioni:

$$\begin{cases} a(t) & = 0 \\ v(t) & = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt = v_0 \\ x(t) & = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = x_0 + v_0(t - t_0) \end{cases} \tag{30}$$

Mentre, tra l'istante t_1 e $t < t_2$:

$$\begin{cases} a(t) & = a = const. \\ v(t) & = v_1 + \int_{t_1}^{t} a(t)\, dt = v_1 + a(t-t_1) \\ x(t) & = x_1 + \int_{t_1}^{t} v(t)\, dt = x_1 + v_1(t-t_1) + \frac{1}{2}a(t-t_1)^2 \end{cases} \tag{31}$$

Possiamo quindi procedere a calcolare quanto vale lo spazio percorso nel corso del moto rettilineo uniforme $(x_1 - x_0)$, utilizzando le relazioni ottenute in Eq.30.

$$x_1 = x(t_1) = x_0 + v_0(t_1 - t_0) \tag{32}$$

quindi:

$$x_1 - x_0 = v_0(t_1 - t_0) = v_0 t_r = 5.56\, m \tag{33}$$

Per calcolare lo spazio percorso nella seconda parte del moto dobbiamo invece adoperare le relazioni ottenute in Eq.31 e considerare in quale istante t_2 il corpo si arresti $(v_2 = 0)$ sotto l'azione della decelerazione.

$$v_2 = v(t_2) = v_1 + a(t_2 - t_1) = 0 \tag{34}$$

quindi ricaviamo facilmente l'intervallo di tempo in cui l'auto è in modo uniformemente accelerato:

$$t_2 - t_1 = -v_1/a = -v_0/a = 13.9\, s \tag{35}$$

E quindi calcoliamo il tempo totale dall'inizio del moto:

$$t_2 - t_0 = (t_2 - t_1) + (t_1 - t_0) = -v_0/a + t_r = 14.1\, s \tag{36}$$

Avendo ricavato t_2 possiamo calcolare lo spazio percorso nell'intera durata del moto $(t_2 - t_0)$.

$$\begin{aligned} x_2 = x(t_2) &= x_1 + v_1(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a(t_2 - t_1)^2 = && (37) \\ &= v_0 t_r + v_0(-v_0/a) + \frac{1}{2}a(-v_0/a)^2 = && (38) \\ &= v_0 t_r - v_0^2/a + \frac{1}{2}v_0^2/a = && (39) \\ &= v_0 t_r - \frac{1}{2}v_0^2/a = && (40) \\ &= v_0(t_r - \frac{1}{2}v_0/a) = && (41) \\ &= 198.5\, m < D && (42) \end{aligned}$$

Il mezzo quindi arresta il proprio moto pochi metri prima di urtare l'ostacolo.

Le grandezze velocità e accelerazione media si ottengono tramite il rapporto delle differenze finite tra gli istanti iniziale t_0 e finale t_2 del moto, e quindi sono pari a:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_0}{t_2 - t_0} = 14.1\, m/s \tag{43}$$

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_0}{t_2 - t_0} = \frac{-v_0}{t_2 - t_0} = -1.97\, m/s^2 \tag{44}$$

Osserviamo inoltre che in un moto uniformemente accelerato è possibile riscrivere l'accelerazione, che tipicamente abbiamo espresso come derivata prima della velocità in funzione del tempo:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \tag{45}$$

come funzione della posizione $a = a(x)$, e quindi:

$$a(x) = \frac{dv(x(t))}{dt} \tag{46}$$

Calcoliamo la derivata facendo attenzione alla regola di derivazione di funzioni composte

$$a(x) = \frac{dv(x(t))}{dt} = \frac{dv(x)}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv(x)}{dx}v \tag{47}$$

Possiamo quindi ricondurci (attraverso il metodo della separazione delle variabili) a:

$$a(x)dx = vdv \tag{48}$$

E finalmente integrare le due parti

$$\int_{x_1}^{x_2} a(x)dx = \int_{v_1}^{v_2} vdv \tag{49}$$

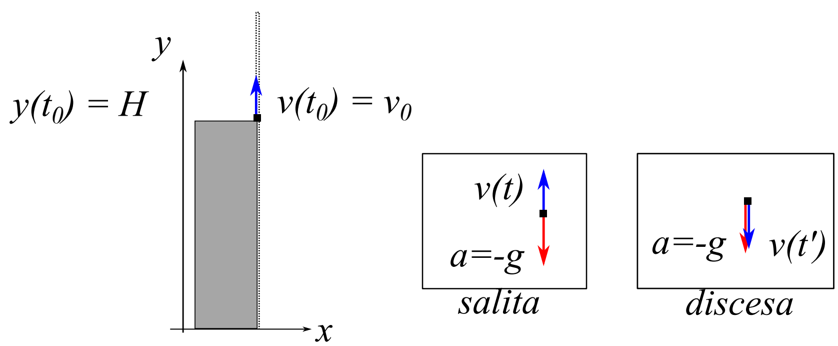
Questa in genere dipende dalla forma della funzione $a = a(x)$.

Nel caso specifico presentato nell'esercizio, quindi sotto la condizione di accelerazione costante (moto uniformemente accelerato) possiamo ottenere infine una relazione tra l'accelerazione, lo spazio percorso e le velocità alle posizioni iniziali e finali v_1 e v_2, totalmente indipendente dal tempo:

$$a(x_2 - x_1) = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \tag{50}$$

Esercizio 2 Un oggetto è lanciato dalla sommità di un edificio di altezza H con velocità iniziale v_0 diretta verso l'alto. Il corpo è quindi libero di compiere un moto rettilineo fino a raggiungere il suolo sottostante il punto di lancio. Calcolare:

1. dopo quanto tempo l'oggetto raggiunge la massima quota
2. il valore della quota raggiunta dall'oggetto in quell'istante
3. il tempo al quale il corpo raggiunge terra, e la velocità in quell'istante



Sperimentalmente si osserva che il moto di punti materiali liberi è soggetto ad un'accelerazione costante pari ad $a = -g = -9.81\, m/s^2$, dove il segno negativo indica, nel sistema di riferimento scelto in figura, che l'accelerazione è orientata verso il basso ($\vec{a}$ è diretta in verso opposto a $\hat{j}$).

Il moto è quindi uniformemente accelerato e descrivibile dalle relazioni scalari:

$$\begin{cases} a(t) & = a = const. = -g \\ v(t) & = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\, dt = v_0 - g(t - t_0) \\ y(t) & = y_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt = H + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \end{cases} \tag{51}$$

Per semplicità calcolando il tempo trascorso dall'inizio del moto ponendo $t_0 = 0$.

Valutiamo quindi come descrivere la condizione per la quale il corpo raggiunge la massima quota. Al raggiungimento della quota massima la velocità del punto materiale si deve annullare, in quanto il corpo inverte il proprio moto, da salita in discesa.

$$v(t_{max}) = 0 = v_0 + at_{max} = v_0 - gt_{max} \tag{52}$$

quindi

$$t_{max} = v_0/g \tag{53}$$

In alternativa, avremmo potuto considerare di identificare la massima quota calcolando la derivata prima della quota $y(t)$ e imponendo che questa sia nulla (corrispondente ad una condizione di massimo, o minimo, della funzione $y(t)$).

$$\frac{d}{dt}\left[y\left(t\right)\right]|_{t_{max}} = 0 \tag{54}$$

quest'ultima scrittura è però chiaramente identica a quanto visto in precedenza ($dy(t)/dt|_{t_{max}} = v(t_{max}) = 0$).

Calcoliamo a questo punto la massima quota raggiunta h_{max}, come la quota $y(t)$ raggiunta all'istante t_{max}.

$$\begin{aligned} h_{max} = y(t_{max}) &= H + v_0(t_{max}) - \frac{1}{2}g(t_{max})^2 = && (55)\\ &= H + v_0^2/g - \frac{1}{2}v_0^2/g = && (56)\\ &= H + \frac{1}{2}v_0^2/g = && (57)\\ & && (58)\end{aligned}$$

Possiamo notare anche come potevamo giungere alla stessa soluzione applicando quanto osservato nell'Eq.50:

$$-g(h_{max} - H) = \frac{v(t_{max})^2 - v_0^2}{2} \tag{59}$$

Valutiamo infine le condizioni finali del moto, alle quali si raggiunge terra ($y(t_{fin}) = 0$). Possiamo innanzitutto valutare il tempo al quale il moto si conclude tramite l'equazione della traiettoria lungo y da Eq.51.

$$y(t_{fin}) = 0 = H + v_0(t_{fin}) - \frac{1}{2}g(t_{fin})^2 \tag{60}$$

Dove è a questo punto sufficiente risolvere l'equazione di secondo grado. La soluzione è del tipo:

$$t_{fin} = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + 2\frac{H}{g}} \tag{61}$$

Notiamo che sono matematicamente possibili due soluzioni, di cui una positiva e l'altra negativa. L'unica soluzione *fisica* è però chiaramente quella positiva, quindi:

$$t_{fin} = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + 2\frac{H}{g}} \tag{62}$$

Da questa possiamo quindi calcolare la velocità finale $v_{fin} = v(t_{fin})$:

$$v_{fin} = v_0 - g(t_{fin}) = \tag{63}$$
$$= v_0 - g(\frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + 2\frac{H}{g}}) = \tag{64}$$
$$= -\sqrt{v_0^2 + 2gH} \tag{65}$$

Facciamo attenzione che il segno negativo di v_{fin} è assolutamente ragionevole, e atteso, dato che la velocità al termine del moto è diretta in verso opposto a quella scelta per l'asse delle y (quindi $\vec{v}_{fin}$ è diretta in verso opposto a $\hat{j}$).

Esercizio 3 Un punto materiale è soggetto ad un'accelerazione $a = \beta t$. Ricavare la legge oraria del moto.

Il punto materiale è soggetto ad un moto vario, dato che l'accelerazione è a sua volta funzione del tempo e non è constante (come nel moto uniformemente accelerato) o nulla (come nel moto uniforme).

Possiamo quindi procedere semplicemente a ricavare le equazioni del moto risolvendo il problema inverso.

Calcoliamo prima la velocità:

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\, dt = && (66) \\ &= v_0 + \int_{t_0}^{t} \beta t\, dt = && (67) \\ &= v_0 + \frac{\beta(t^2 - t_0^2)}{2} && (68) \end{aligned}$$

e quindi lo spazio percorso in funzione del tempo:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt = && (69) \\ &= x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0 + \frac{\beta(t^2 - t_0^2)}{2}\, dt = && (70) \\ &= x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0\, dt + \frac{\beta}{2}\int_{t_0}^{t} t^2\, dt - \frac{\beta}{2}\int_{t_0}^{t} t_0^2\, dt = && (71) \\ &= x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{\beta}{2}\frac{t^3 - t_0^3}{3}\, dt - \frac{\beta}{2} t_0^2 (t - t_0) && (72) \end{aligned}$$

Esercizio 4 [Prof. U. Gasparini] Un punto materiale soggetto a moto armonico con periodo $T = 2.5\,s$ parte all'istante $t_0 = 0$ dal punto $x(t_0) = x_0 = 0.4\,m$, con una velocità iniziale pari a $v(t_0) = v_0 = -3\,m/s$. Determinare:

1. la legge oraria del moto
2. la massima velocità e accelerazione a cui è soggetto il punto materiale

---

Ricordiamo che la legge oraria del moto di un moto armonico semplice è data da:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \tag{73}$$

con:

- A: ampiezza
- ω: pulsazione
- ϕ: fase

Il periodo T e la pulsazione ω sono legati dalla relazione:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2.51\,s^{-1} \tag{74}$$

Non conosciamo a priori invece né la fase, né l'ampiezza, che si possono ricavare solo tramite l'osservazione di condizioni particolari del moto.

Avendo misurato sia la posizione x_0 che la velocità v_0 all'istante iniziale del moto, possiamo ricavare questi parametri.

È necessario però prima scrivere l'equazione dell'evoluzione della velocità nel tempo:

$$v(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \phi) \tag{75}$$

Le condizioni iniziali del moto si ricavano a questo punto imponendo $t = 0$ nella due equazioni precedenti:

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 = A \sin\phi \\ v(t=0) = v_0 = \omega A \cos\phi \end{cases} \tag{76}$$

Da queste possiamo ricavare che:

$$\tan(\phi) = \omega \frac{x_0}{v_0} = -0.335 \tag{77}$$

Chiaramente esistono 2 soluzioni plausibili per ϕ nell'intervallo $[0, 2\pi)$. Di queste però solo una soluzione è compatibile con le condizioni al contorno ($x_0 > 0$).

Questo ci consente di ricavare le costanti di integrazione:

$$\begin{cases} \phi = 2.82\, rad \\ A = 1.26\, m \end{cases} \tag{78}$$

Quindi possiamo scrivere completamente la legge oraria del moto come:

$$x(t) = 1.26 \sin{(2.51t + 2.82)}\, m \tag{79}$$

La massima velocità del punto materiale si ottiene quando l'argomento della funzione coseno si annulla, e cioè per $\omega t + \phi = 0$. Questo corrisponde all'istante $t_{v_max} = -\phi/\omega + nT$, con $n = 1, 2, \ldots$ In queste condizioni la velocità vale:

$$v_{max} = \omega A = 3.16\, m/s \tag{80}$$

Che viene raggiunta per la prima volta dall'inizio del moto all'istante $t^1_{v_max} = 1.38\, s$.

Per calcolare l'accelerazione massima potremmo procedere ad integrare ulteriormente l'equazione della velocità in funzione del tempo. Tuttavia possiamo anche sfruttare la peculiarità del moto armonico semplice, che sappiamo essere soluzione dell'equazione differenziale:

$$\frac{d^2x(t)}{dt} = -\omega^2 x(t) \tag{81}$$

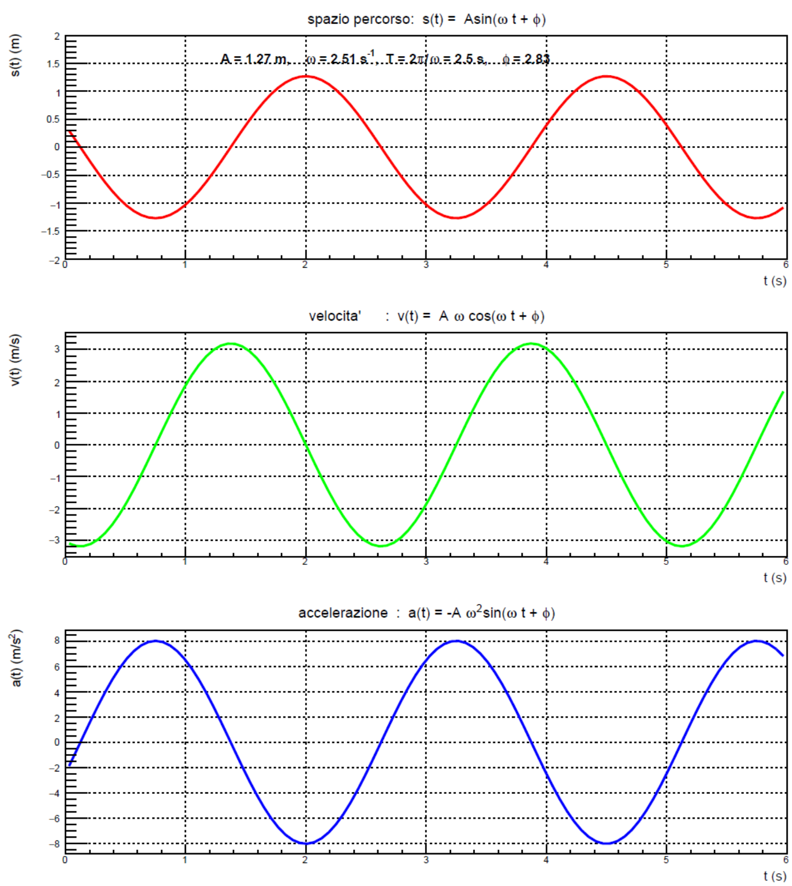
L'accelerazione del punto materiale in funzione del tempo è quindi data da:

$$a(t) = -\omega^2 x(t) = -\omega^2 A \sin{(\omega t + \phi)} \tag{82}$$

e quindi possiamo facilmente osservare che l'accelerazione è massima quando l'argomento della funzione seno è pari a $3/2\pi$, per cui varrà:

$$a_{max} = \omega^2 A = 7.95\, m/s^2 \tag{83}$$

Questa si raggiunge agli istanti di tempo $t_{a_{max}} = (3/2\pi - \phi)\omega + nT$, con $n = 0, 1, 2, \ldots$ Il primo istante a cui questa accelerazione viene raggiunta è $t^1_{a_{max}} = 0.75\, s$.


spazio percorso: s(t) = Asin(ω t + ϕ)
A = 1.27 m, ω = 2.51 s⁻¹, T = 2π/ω = 2.5 s, ϕ = 2.83
s(t) (m)
t (s)
velocita' : v(t) = A ω cos(ω t + ϕ)
v(t) (m/s)
t (s)
accelerazione : a(t) = -A ω²sin(ω t + ϕ)
a(t) (m/s²)
t (s)

Esercizio 5 Un corpo è posto in moto in direzione orizzontale su di un piano infinito liscio con velocità iniziale $v_0 = 5\,m/s$ (ad esempio tramite l'azione di una molla). Il corpo non risente di attriti con il piano, su cui è libero di scivolare. Risente però dell'attrito viscoso dell'aria, che dipende dalla velocità istantanea, determinando una decelerazione sul corpo secondo la relazione:

$$a(t) = -6 \times 10^{-3} v(t) \tag{84}$$

Calcolare dopo quanto tempo la velocità del corpo raggiunge il 50% del valore di partenza, e quanta distanza è stata compiuta fino a quell'istante.

Il punto materiale è soggetto ad un moto esponenzialmente smorzato (con $k = 6 \times 10^{-3} s^{-1}$ nel nostro caso).

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -kv(t) \tag{85}$$

Questa è una semplice equazione differenziale che possiamo risolvere tramite il metodo di separazione delle variabili:

$$\frac{dv(t)}{v(t)} = -kdt \tag{86}$$

Integrando ambi i membri otteniamo:

$$\int_{v(0)=v_0}^{v(t)} \frac{dv(t)}{v(t)} = -\int_0^t kdt \tag{87}$$

$$\ln \frac{v(t)}{v_0} = -kt \tag{88}$$

Possiamo quindi facilmente calcolare il tempo t' al quale la velocità raggiunge il 50% del suo valore iniziale:

$$t' = -\frac{\ln \frac{v(t)}{v_0}}{k} = \tag{89}$$

$$= -\frac{\ln 0.5}{6 \times 10^{-3}} = \tag{90}$$

$$= 115\,s \tag{91}$$

Per calcolare la distanza percorsa è necessario ricavare la legge oraria del moto.

Passiamo prima a ricavare la forma esplicita della velocità in funzione del tempo:

$$e^{\ln \frac{v(t)}{v_0}} = e^{-kt} \tag{92}$$

$$\frac{v(t)}{v_0} = e^{-kt} \tag{93}$$

$$v(t) = v_0 e^{-kt} \tag{94}$$

E quindi procediamo ad integrare la precedente (considerando $s_0 = 0$):

$$s(t) = s_0 + \int_0^t v(t)dt = \int_0^t v_0 e^{-kt} dt = \tag{95}$$

$$= -\frac{v_0}{k}(e^{-kt} - 1) = \tag{96}$$

$$= \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}) \tag{97}$$

Per calcolare lo spazio percorso imponiamo infine la soluzione ricavata in precedenza per il tempo $t = t'$:

$$s(t') = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt'}) = \tag{98}$$

$$= \frac{v_0}{k}(1 - e^{\ln \frac{v(t')}{v_0}}) = \tag{99}$$

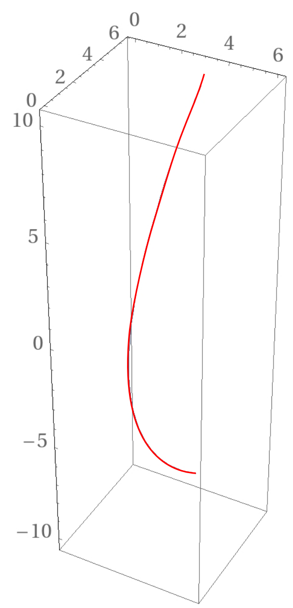
$$= \frac{v_0}{k}(1 - (v(t')/v_0)) = 417\, m \tag{100}$$

2.2 Cinematica vettoriale e moti in 2 e 3 dimensioni

Esercizio 1 Un punto materiale è in moto secondo la legge oraria:

$$\vec{r}(t) = \left(3\hat{\imath} - 4t^2\hat{\jmath} + 8t\hat{k}\right)\, m \tag{101}$$

rispetto un sistema di riferimento fisso.



Determinare:

1. la velocità $\vec{v}(t)$, e il suo modulo
2. l'accelerazione $\vec{a}(t)$, e il suo modulo
3. la velocità e accelerazione vettoriali medie calcolate tra gli istanti di tempo $t_0 = 0$ e $t_1 = 3\, s$

Conoscendo la legge oraria possiamo ottenere la velocità e accelerazione risolvendo il problema diretto.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(3\hat{\imath} - 4t^2\hat{\jmath} + 8t\hat{k}\right)\, m/s \tag{102}$$

Dato che il sistema di riferimento è fisso (versori che non variano orientamento nel tempo), possiamo riscrivere la precedente equazione come:

$$\vec{v}(t) = \left(\frac{d}{dt}(3)\hat{\imath} + \frac{d}{dt}(-4t^2)\hat{\jmath} + \frac{d}{dt}(8t)\hat{k}\right) = \tag{103}$$
$$= \left(-8t\hat{\jmath} + 8\hat{k}\right)\ m/s \tag{104}$$

Possiamo quindi procedere ad ottenere l'accelerazione in via del tutto analoga al passaggio precedente:

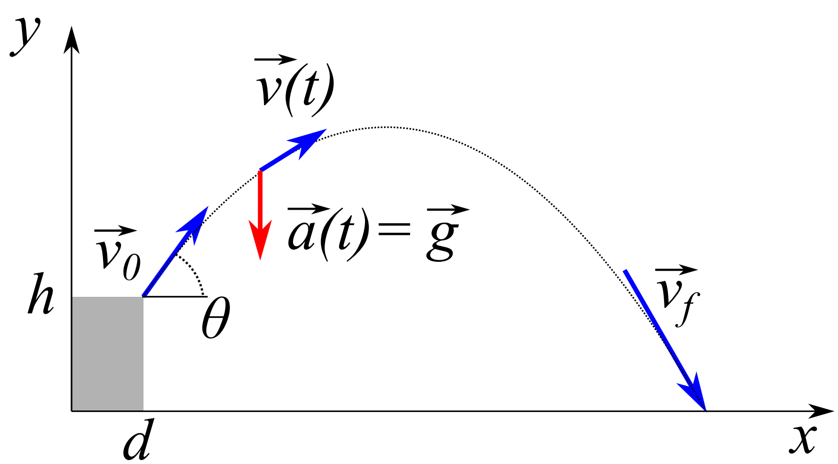
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-8t\hat{\jmath} + 8\hat{k}\right) = \tag{105}$$
$$= \left(\frac{d}{dt}(-8t)\hat{\jmath} + \frac{d}{dt}(8)\hat{k}\right) = \tag{106}$$
$$= -8\hat{\jmath}\ m/s^2 \tag{107}$$

Al fine di calcolare le velocità ed accelerazioni medie dobbiamo servirci delle relazioni:

$$\vec{v_m}(t) = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \tag{108}$$
$$= \frac{\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0)}{t_1 - t_0} = \tag{109}$$
$$= \frac{\left(3\hat{\imath} - 4t_1^2\hat{\jmath} + 8t_1\hat{k}\right)\ m - \left(3\hat{\imath} - 4t_0^2\hat{\jmath} + 8t_0\hat{k}\right)\ m}{t_1 - t_0} = \tag{110}$$
$$= \frac{\left(-36\hat{\jmath} + 24\hat{k}\right)\ m}{3\,s} = \tag{111}$$
$$= \left(-12\hat{\jmath} + 8\hat{k}\right)\ m/s \tag{112}$$

$$\vec{a_m}(t) = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \tag{113}$$
$$= \frac{\vec{v}(t_1) - \vec{v}(t_0)}{t_1 - t_0} = \tag{114}$$
$$= \frac{\left(-8t_1\hat{\jmath} + 8\hat{k}\right)\ m/s - \left(-8t_0\hat{\jmath} + 8\hat{k}\right)\ m/s}{t_1 - t_0} = \tag{115}$$
$$= \frac{\left(-24\hat{\jmath}\right)\ m/s}{3\,s} = \tag{116}$$
$$= -8\hat{\jmath}\,m/s^2 \tag{117}$$

Esercizio 2 Un proiettile è sparato da una posizione iniziale (d,h) rispetto il sistema di riferimento raffigurato, con velocità $\vec{v}_0$ orientata secondo un angolo $\theta > 0$ rispetto l'orizzontale.



Determinare:

1. la legge oraria del moto
2. la massima altezza raggiungibile dal proiettile
3. il tempo dopo il quale il proiettile ricade al suolo
4. la distanza percorsa dal proiettile (lungo la direzione orizzontale)
5. la velocità al momento dell'impatto e l'angolo rispetto al terreno
6. la velocità media durante il moto

Il corpo è soggetto all'accelerazione gravitazionale, costante, $\vec{g} = -g\hat{j}$ rispetto al sistema di riferimento utilizzato in figura (con $g = 9.81\, m/s^2$).

Conosciamo inoltre la posizione iniziale del moto $\vec{r}_0 = d\hat{i} + h\hat{j}$.

Il vettore velocità iniziale si può infine esprimere scomponendolo nelle sue due componenti proiettandolo lungo i due assi del sistema di riferimento cartesiano: $\vec{v}_0 = v_0 \left(\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}\right)$.

Note le condizioni al contorno del problema, possiamo descrivere il moto risolvendo il problema inverso:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \longrightarrow \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \longrightarrow \vec{r}(t) \tag{118}$$

Poniamo per comodità l'istante iniziale del moto $t_0 = 0$ e ricaviamo in primis $\vec{v}(t)$:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0=0}^{t} \vec{a}(t)dt = \tag{119}$$

$$= v_0 \left(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}\right) + \int_0^t \left(-g\hat{j}\right) dt = \tag{120}$$

$$= v_0 \left(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}\right) + \left(-g\hat{j}\right) t = \tag{121}$$

$$= v_0 \cos\theta\hat{i} + \left(v_0 \sin\theta - gt\right)\hat{j} \tag{122}$$

Possiamo quindi passare a ricavare la legge oraria $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0=0}^{t} \vec{v}(t)dt = \tag{123}$$

$$= \left(d\hat{i} + h\hat{j}\right) + \int_0^t \left(v_0 \cos\theta\hat{i} + \left(v_0 \sin\theta - gt\right)\hat{j}\right) dt = \tag{124}$$

$$= \left(d\hat{i} + h\hat{j}\right) + \int_0^t v_0 \cos\theta\hat{i}dt + \int_0^t v_0 \sin\theta\hat{j}dt + \int_0^t (-gt)\hat{j}dt = \tag{125}$$

$$= \left(d\hat{i} + h\hat{j}\right) + v_0 \cos\theta t\hat{i} + v_0 \sin\theta t\hat{j} - \frac{1}{2}gt^2\hat{j} = \tag{126}$$

$$= \left(d + v_0 \cos\theta t\right)\hat{i} + \left(h + v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2\right)\hat{j} \tag{127}$$

Si vede quindi chiaramente come il moto sia complessivamente dato dalla composizione di un moto uniforme rispetto l'asse x, ed un moto uniformemente accelerato rispetto l'asse y, chiaramente non totalmente indipendenti tra loro, in quando in mutua evoluzione in funzione del tempo t.

$$x) \begin{cases} a_x(t) & = 0 \\ v_x(t) & = v_{0x} = v_0 \cos\theta \\ x(t) & = x_0 + v_{0x}t = d + v_0 \cos\theta t \end{cases} \tag{128}$$

$$y) \begin{cases} a_y(t) & = -g \\ v_x(t) & = v_{0y} + a_y t = v_0 \sin\theta - gt \\ y(t) & = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 = h + v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{129}$$

Identificata la legge oraria, e compreso appieno il moto, è semplice ricavare tutti i punti richiesti.

La massima quota raggiunta si ricava studiando una delle alternative seguenti: 1) valutando per quale valore di t la quota $y(t)$ ha un massimo; 2) ricordando che per raggiungere il massimo della quota, la velocità $v_y(t)$ deve annullarsi, in quanto il moto si inverte; 3) utilizzare la relazione dell'accelerazione in funzione della posizione discussa in Eq.50. Ad esempio procediamo attraverso la soluzione di:

$$a_y(y_{max} - y_0) = \frac{v_y(y_{max})^2 - v_{0y}^2}{2} \tag{130}$$

quindi:

$$-g(y_{max} - h) = \frac{0 - (v_0 \sin\theta)^2}{2} \tag{131}$$

$$y_{max} = h + \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \tag{132}$$

Per calcolare le condizioni associate al termine del moto, quando il proiettile raggiunge il suolo, imponiamo che la quota raggiunta sia pari a zero in Eq.129:

$$y(t_f) = 0 = y_0 + v_{0y} t_f + \frac{1}{2} a t_f^2 \tag{133}$$

$$= h + v_0 \sin\theta t_f - \frac{1}{2} g t_f^2 \tag{134}$$

Questa non è altro che una semplice equazione di secondo grado in t_f, che risolta porge:

$$t_f = \frac{v_0 \sin\theta \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2gh}}{g} \tag{135}$$

Al solito, è opportuno porsi la domanda di quali soluzioni siano fisiche e quali no. In questo caso, dato che il discriminante dell'equazione è maggiore del termine $v_0 \sin\theta$, vi è solo una soluzione fisica, per la quale il tempo risultante sia positivo:

$$t_f = \frac{v_0 \sin\theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2gh}}{g} \tag{136}$$

Una volta ricavato questo, possiamo facilmente identificare la distanza percorsa ponendo nella Eq.128 il tempo t_f.

$$x_f = x(t_f) = d + v_0 \cos\theta t_f = d + v_0 \cos\theta \frac{v_0 \sin\theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2gh}}{g} \tag{137}$$

Per calcolare la velocità finale all'istante dell'impatto possiamo semplicemente ricondurci alla Eq.119:

$$\vec{v}_f = \vec{v}(t_f) = v_0 \cos\theta \hat{i} + (v_0 \sin\theta - g t_f)\,\hat{j} = \tag{138}$$

$$= v_0 \cos\theta \hat{i} - \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2gh}\hat{j} = \tag{139}$$

$$\tag{140}$$

Per ricavare l'angolo rispetto l'orizzontale al momento dell'impatto θ_f possiamo utilizzare una delle seguenti proprietà del vettore $\vec{v}_f$:

$$\begin{cases} v_{fx} &= v_f \cos\theta_f \\ v_{fy} &= v_f \sin\theta_f \\ \frac{v_{fy}}{v_{fx}} &= \tan\theta_f \\ v_f &= \sqrt{v_{fx}^2 + v_{fy}^2} \end{cases} \tag{141}$$

Ad esempio, non avendo ancora calcolato il modulo del vettore $\vec{v}_f$ ma avendone le componenti, potremmo optare per risolvere tramite:

$$\theta_f = \arctan\frac{v_{fy}}{v_{fx}} = \frac{-\sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2gh}}{v_0 \cos\theta} \tag{142}$$

Concludiamo con il calcolo della velocità vettoriale media:

$$\vec{v_m}(t) = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \tag{143}$$

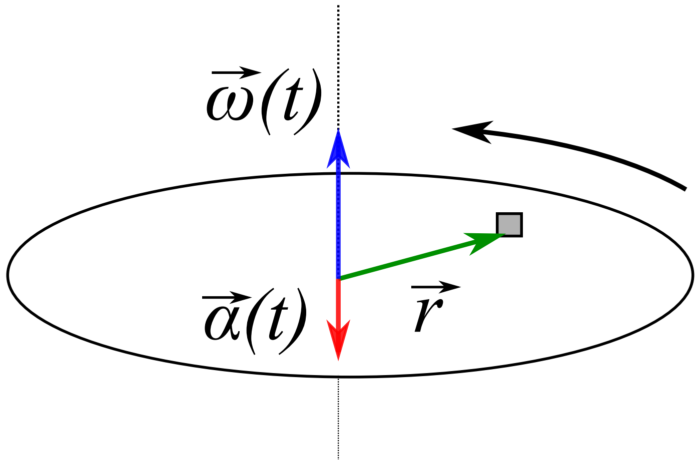
$$= \frac{\vec{r}(t_f) - \vec{r}(t_0)}{t_f - t_0} = \tag{144}$$

$$= \frac{\left(\left(d + v_0\cos\theta\frac{v_0\sin\theta + \sqrt{v_0^2\sin^2\theta + 2gh}}{g}\right)\hat{\imath}\right) - \left((d)\,\hat{\imath} + (h)\,\hat{\jmath}\right)}{\frac{v_0\sin\theta + \sqrt{v_0^2\sin^2\theta + 2gh}}{g}} = \tag{145}$$

$$= \frac{\left(\left(v_0\cos\theta\frac{v_0\sin\theta + \sqrt{v_0^2\sin^2\theta + 2gh}}{g}\right)\hat{\imath}\right) - \left(h\hat{\jmath}\right)}{\frac{v_0\sin\theta + \sqrt{v_0^2\sin^2\theta + 2gh}}{g}} \tag{146}$$

$$= (v_0\cos\theta)\,\hat{\imath} + \left(-h\frac{g}{v_0\sin\theta + \sqrt{v_0^2\sin^2\theta + 2gh}}\right)\hat{\jmath} \tag{147}$$

Esercizio 3 Un piccolo oggetto è incollato su di una piattaforma rotante, e si muove su di un'orbita circolare di raggio $R = 0.3\,m$. Il disco si trova inizialmente in moto con velocità angolare $\omega_0 = 15\,rad/s$ costante. Osserviamo che dopo un intervallo di tempo $t_1 = 1.5\,s$ si attiva un meccanismo di frenata che agisce sul disco fornendo una accelerazione angolare $\alpha_1 = -1\,rad/s^2$, e lo porta ad arrestarsi.



Calcolare:

1. l'istante in cui il disco si arresta
2. il numero di rotazioni compiute nel corso del moto
3. l'accelerazione totale del punto agli istanti $t' = 0.5\,s$ e $t'' = 4\,s$

L'oggetto è chiaramente soggetto ad un moto che inizialmente è circolare uniforme (velocità angolare costante), e successivamente si trasforma in circolare uniformemente accelerato (accelerazione angolare costante).

Definita una direzione rispetto la quale misurare l'angolo θ, possiamo facilmente ricavare le leggi orarie dei due moti risolvendo il problema inverso in termini delle grandezze angolari θ, ω, α.

Tra gli istanti iniziale t_0 e t_1 il moto è circolare uniforme:

$$\begin{cases} \alpha(t) & = 0 \\ \omega(t) & = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha(t)\,dt = \omega_0 \\ \theta(t) & = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t)\,dt = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) \end{cases} \tag{148}$$

Mentre, tra l'istante t_1 e t_2 il moto è circolare uniformemente accelerato:

$$\begin{cases} \alpha(t) & = \alpha = const. \\ \omega(t) & = \omega_1 + \int_{t_1}^{t} \alpha(t)\, dt = \omega_1 + \alpha(t - t_1) \\ \theta(t) & = \theta_1 + \int_{t_1}^{t} \omega(t)\, dt = \theta_1 + \omega_1(t - t_1) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_1)^2 \end{cases} \tag{149}$$

Notiamo la perfetta analogia che esiste con le equazioni scalari del moto uniforme e del moto uniformemente accelerato valide per il caso di moto rettilineo come visto in altri esercizi.

Per semplicità, possiamo considerare di fare la scelta di un sistema di riferimento polare per il quale l'angolo θ_0 sia nullo all'istante iniziale del moto t_0.

Possiamo calcolare l'istante di arresto del disco t_f semplicemente richiedendo a quale istante si annulli la velocità angolare istantanea del disco.

$$\omega(t_f) = 0 = \omega_1 + \alpha(t_f - t_1) \tag{150}$$

Dove ricordiamo anche che $\omega_1 = \omega_0$ in quanto per il primo intervallo di tempo $(t_1 - t_0)$ il moto del disco è stato circolare uniforme.

$$t_f = t_1 - \omega_0/\alpha = 16.5\, s \tag{151}$$

Per ricavare il numero di rotazioni compiute dal disco prima di arrestarsi è sufficiente ricavare l'angolo spazzato nell'intero moto:

$$\theta_f = \theta_1 + \omega_1(t_f - t_1) + \frac{1}{2}\alpha(t_f - t_1)^2 \tag{152}$$

Dove dobbiamo ricordare che $\theta_1 = \omega_0 t_1$: l'angolo spazzato durante la prima fase del moto (e $\omega_1 = \omega_0$ come già visto).

$$\theta_f = \omega_0 t_1 + \omega_1(t_f - t_1) + \frac{1}{2}\alpha(t_f - t_1)^2 = \tag{153}$$

$$= \omega_0 t_f + \frac{1}{2}\alpha(t_f - t_1)^2 = \tag{154}$$

$$= \omega_0 t_1 - \omega_0^2/\alpha + \frac{1}{2}\omega_0^2/\alpha = \tag{155}$$

$$= \omega_0(t_1 - \frac{1}{2}\omega_0/\alpha) = 135\, rad \tag{156}$$

Quindi il numero totale di giri compiuti dall'inizio del moto fino all'arresto del disco è pari a $\frac{135}{2\pi} \approx 21.5$

Per valutare l'accelerazione dell'oggetto nei due istanti di tempo t' e t'' dobbiamo ricordare che l'accelerazione totale è data da due componenti: una orientata tangenzialmente alla traiettoria del punto all'istante considerato, e l'altra in direzione normale alla precedente e orientata con il verso puntante al centro del raggio di curvatura della traiettoria. Sebbene sia banale, vale la pena comunque ricordare che nel caso di moto circolare la curvatura della traiettoria nel punto (generalmente indicata con ρ) si riduce al raggio della circonferenza su cui si sviluppa il moto.

$$\vec{a}(t) = a_t\hat{t} + a_n\hat{n} = \tag{157}$$

$$= \frac{dv(t)}{dt}\hat{t} + \frac{v(t)^2}{\rho}\hat{n} = \tag{158}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\omega(t)R\right)\hat{t} + \frac{\left(\omega(t)R\right)^2}{R}\hat{n} = \tag{159}$$

$$= R\alpha\hat{t} + R\omega(t)^2\hat{n} \tag{160}$$

Volendone scrivere il modulo otteniamo:

$$a(t) = \sqrt{R^2\alpha^2 + R^2\omega(t)^4} \tag{161}$$

Studiamo quindi come si comporta $\vec{a}(t)$ nei due istanti t' e t''.

Nel primo caso $t = t'(< t_1)$ il corpo è soggetto ad un moto circolare uniforme, in cui non è presente alcuna componente di accelerazione angolare. Pertanto:

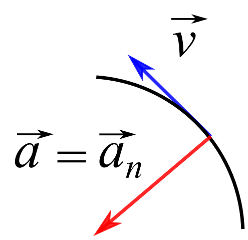
$$\vec{a}(t') = \frac{d}{dt}\left(\omega(t')R\right)\hat{t} + \frac{\left(\omega(t')R\right)^2}{R}\hat{n} = \tag{162}$$

$$= \cancel{R\alpha\hat{t}} + R\omega(t')^2\hat{n} = \tag{163}$$

$$= R\omega(t')^2\hat{n} = \tag{164}$$

$$= R\omega_0^2\hat{n} = 67.5\ \hat{n}\ m/s^2 \tag{165}$$

$$\tag{166}$$



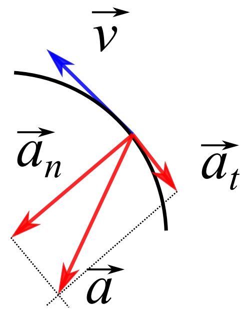
Nel secondo caso $t = t''(> t_1)$ il corpo è invece soggetto ad un moto circolare uniformemente accelerato, quindi nessuna delle due componenti si annulla e l'accelerazione totale risulta orientata come in figura:

$$\vec{a}(t'') = \frac{d}{dt}\left(\omega(t'')R\right)\hat{t} + \frac{\left(\omega(t'')R\right)^2}{R}\hat{n} = \tag{167}$$

$$= R\alpha\hat{t} + R\omega(t'')^2\hat{n} = \tag{168}$$

$$= R\alpha\hat{t} + R\left(\omega_0 + \alpha(t'' - t_1)\right)^2\hat{n} = \tag{169}$$

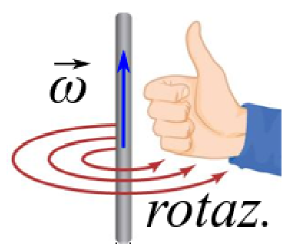
$$= 0.3\ \hat{t} + 46.9\ \hat{n}\ m/s^2 \tag{170}$$



Da ultimo, possiamo precisare che la velocità e l'accelerazione totale possono anche essere ottenute dalle relazioni vettoriali:

$$\begin{cases} \vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{r} \\ \vec{a} &= \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{cases} \tag{171}$$

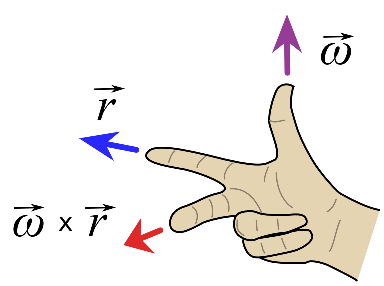
dove i vettori $\vec{\omega}$ e $\vec{\alpha}$ sono orientati lungo l'asse di rotazione del punto materiale, come raffigurato in figura a inizio esercizio. Il verso del vettore velocità angolare si ottiene tramite la regola della mano destra, chiudendo le dita nel senso di rotazione del punto materiale e osservando la direzione del pollice.



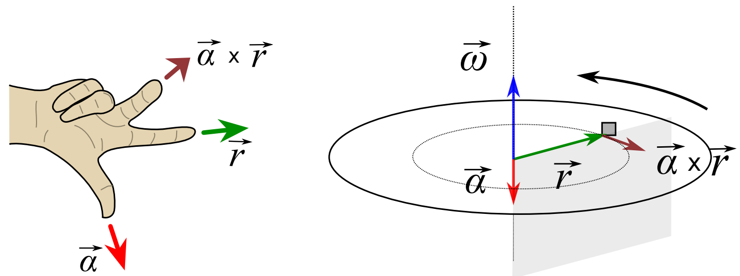
Il verso del vettore accelerazione angolare è opposto a quello di $\vec{\omega}$ laddove stiamo considerando una decelerazione ($|d\vec{\omega}/dt| < 0$); è invece concorde a quello di $\vec{\omega}$ in caso stiamo descrivendo un'accelerazione ($|d\vec{\omega}/dt| > 0$).

Resta da domandarsi quindi come siano orientati i vettori dell'Eq.171.

Anche in questo caso facciamo ricorso alla regola della mano destra, orientando pollice-indice-medio a formare una terna ortogonale come in figura:

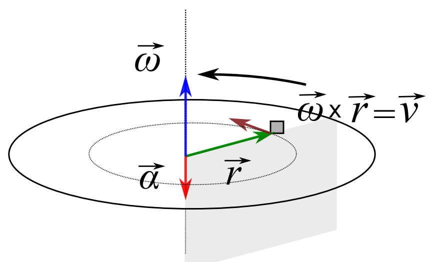


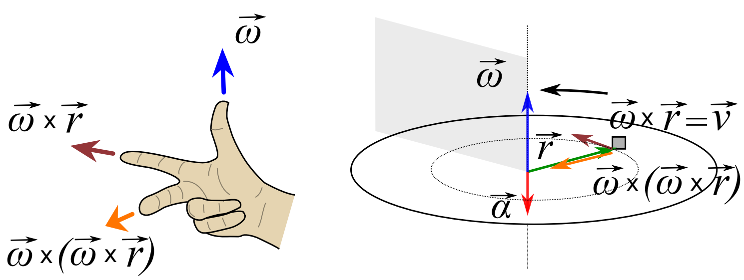
Per il caso della componente $\vec{\alpha} \times \vec{r}$, è semplice osservare come il prodotto vettoriale risulti diretto come la tangente alla traiettoria nel punto, e diretto in verso opposto al verso del moto:



Il vettore $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$, è invece di minor immediata interpretazione dato il doppio prodotto vettoriale. In primis, svolgendo il prodotto vettoriale all'interno della parentesi, è evidente che ritroveremo la velocità tangenziale, orientata come la traiettoria nel punto.

L'ulteriore prodotto vettoriale tra $\vec{\omega}$ e il precedente risulta in un nuovo vettore, perpendicolare sia alla velocità angolare che alla direzione tangente alla traiettoria nel punto considerato (per la proprietà del prodotto vettoriale), e quindi orientato verso il centro della circonferenza.





Queste chiaramente corrispondono a quanto già ricavato in precedenza:

$$\begin{cases} \vec{v} & = \vec{\omega} \times \vec{r} = v\hat{t} \\ \vec{a} & = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = a_t\hat{t} + a_n\hat{n} = \frac{dv}{dt}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n} \end{cases} \tag{172}$$

2.3 Dinamica del punto materiale

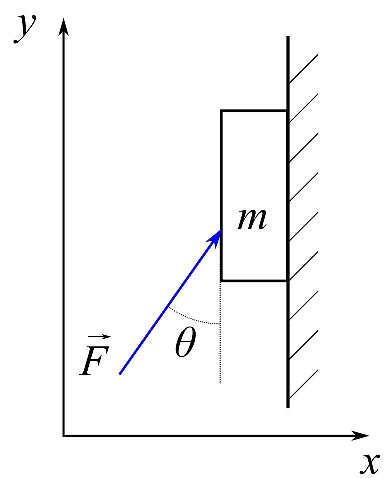
Esercizio 1 [prof. A. Zenoni / G. Bonomi] Un blocco di massa $m = 5\,kg$ è mantenuto in equilibrio statico contro una parete verticale tramite una forza $\vec{F}$ applicata a formare un angolo $\theta = 35°$ rispetto la verticale. Tra il blocco e la parete si sviluppa attrito con un coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0.23$.

Determinare:

1. il minimo valore del modulo della forza F per evitare che il blocco scivoli verso il basso

2. il massimo valore del modulo della forza F per impedire al blocco di scivolare verso l'alto

3. se $F = 65\,N$, determinare $\vec{F}_a$ rispetto il sistema di riferimento fornito in figura



Lo studio di questo semplicissimo sistema meccanico ci consente di visualizzare chiaramente che le forze di reazione dei vincoli e le forze di attrito non sono, in linea generale, costanti o note a priori tramite principi primi, ma devono essere ricavate a seconda della condizione specifica di ciascun sistema.

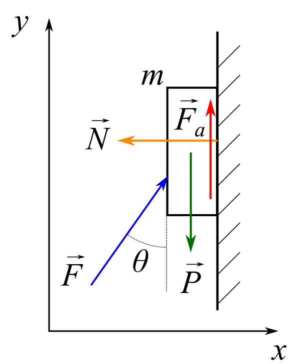
Sul blocco agiscono 4 forze: la forza peso $\vec{P}$, la forza esterna $\vec{F}$, la forza di reazione vincolare normale $\vec{N}$, e la forza di attrito $\vec{F}_a$.

La direzione e verso delle forze $\vec{P}$ e $\vec{F}$ è nota. Per quanto concerne la forza di reazione vincolare, sappiamo che essa è sempre normale alla superficie del vincolo alla quale si riferisce, di conseguenza in questo specifico caso sarà orientata parallelamente all'asse x. L'attribuzione del verso di $\vec{N}$, $-\hat{\imath}$, è altrettanto immediata, e dovuta al fatto che la reazione vincolare impedisce al blocco di compenetrare il vincolo, in questo caso la parete.

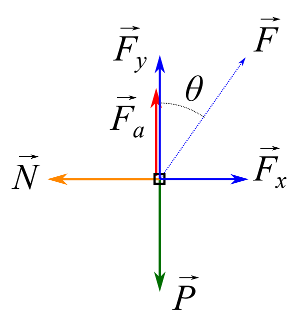
La forza d'attrito che si sviluppa tra il corpo e la parete è di tipo statico, ed è come sappiamo diretta parallelamente alla superficie di contatto. Il verso della forza d'attrito è tale da opporsi al moto relativo tra le due superfici. Date le domande 1.) e 2.) del problema, dobbiamo delineare due diverse condizioni a seconda del caso che consideriamo.

Caso 1.) In questo caso dobbiamo ricavare il minimo modulo di $\vec{F}_a$ tale per cui il blocco non scivoli verso il basso. In questo caso è ovvio che la forza d'attrito statico, opponendosi al moto relativo tra le superfici, deve essere orientata verso l'alto.

Disegniamo quindi il sistema rappresentando tutte le forze in gioco:



Successivamente rappresentiamo il sistema tramite il diagramma di corpo libero in cui, considerato il copro in esame come puntiforme, applichiamo ad esso tutte le forze in gioco:



Possiamo a questo punto scrivere le equazioni del moto applicando il secondo principio della dinamica. Prima scriviamo in forma vettoriale:

$$\Sigma_i \vec{F}_i = \vec{F} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_a = m\vec{a} = 0 \text{ (condizione di equilibrio statico)} \tag{173}$$

La forma vettoriale può poi essere semplicemente tradotta nelle componenti, avendo scelto un sistema di riferimento (quello descritto in figura):

$$\begin{cases} F_x - N = 0 \\ F_y + F_a - P = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} F\sin\theta - N = 0 \\ F\cos\theta + F_a - mg = 0 \end{cases} \tag{174}$$

Dove dobbiamo ricordare l'ulteriore informazione a nostra disposizione, e cioè che il modulo della forza di attrito statico è minore o uguale del prodotto tra il coefficiente di attrito statico μ_s e il modulo della forza normale ((rispetto la direzione di $\vec{F}_a$)) agente sul corpo.

$$F_a \leq \mu_s N \tag{175}$$

Unendo le informazioni a nostra disposizione possiamo quindi passare a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} N = F\sin\theta \\ F_a = mg - F\cos\theta \leq \mu_s N \end{cases} \tag{176}$$

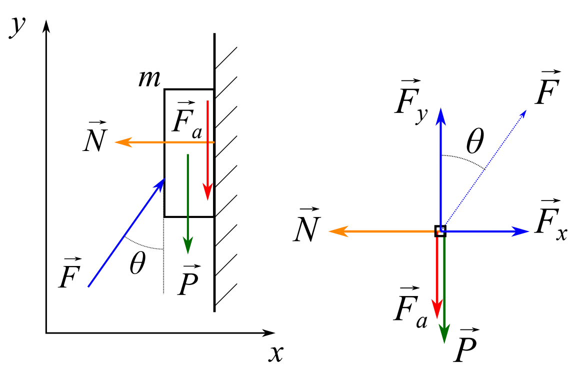
Da questa ricaviamo facilmente:

$$F \leq \frac{mg}{\cos\theta + \mu_s \sin\theta} = 51.6\,N \tag{177}$$

Caso 2.) In questo caso la domanda ci pone nella condizione opposta, e cioè valutare il modulo massimo di $\vec{F}$ tale per cui il blocco non scivoli verso l'alto.

Chiaramente in questo caso $\vec{F}_a$ per opporsi al moto relativo tra le due superfici, deve essere orientata in verso opposto al caso precedente.

Quindi reimpostiamo il disegno e la descrizione del problema data questa nostra nuova considerazione, e ripercorriamo la stessa logica svolta finora, stando però attenti alle conseguenze di aver invertito il verso di $\vec{F}_a$.



$$\Sigma_i \vec{F}_i = \vec{F} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_a = m\vec{a} = 0 \text{ (condizione di equilibrio statico)} \tag{178}$$

$$\begin{cases} F_x - N = 0 \\ F_y - F_a - P = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} F \sin\theta - N = 0 \\ F \cos\theta - F_a - mg = 0 \end{cases} \tag{179}$$

Dalla risoluzione del sistema ricaviamo:

$$\begin{cases} N = F \sin\theta \\ F_a = -mg + F\cos\theta \leq \mu_s N \end{cases} \tag{180}$$

E pertanto:

$$F \leq \frac{mg}{\cos\theta - \mu_s \sin\theta} = 71.3\, N \tag{181}$$

Esiste quindi un intervallo di valori di F per i quali il blocco non si muove rispetto la parete: $51.6 \leq F \leq 71.3$. È però importante notare che a ciascun diverso valore di F in quell'intervallo corrisponde un diverso valore sia di N che di F_a:

$$\begin{cases} N = F \sin\theta \\ F_a = \pm mg \mp F\cos\theta \end{cases} \tag{182}$$

Caso 3.) Nel caso sappiamo il modulo della forza esterna applicata $F = 65\, N$, possiamo innanzitutto domandarci se questo determini ancora una condizione di equilibrio statico.

Il modulo di F rientra in effetti nell'intervallo precedentemente calcolato, quindi siamo già sicuri che il corpo rimane sospeso e che si sviluppa una forza di attrito statico.

Non sappiamo però a priori in quale verso sia orientata $\vec{F_a}$ in questo caso.

Per risolvere il problema possiamo innanzitutto formulare un'ipotesi, imponendo arbitrariamente un verso per $\vec{F_a}$. Consideriamo ad esempio di definire $\vec{F_a}$ come orientata verso l'alto.

Ci riconduciamo pertanto alla condizione già vista nel caso 1.), per la quale abbiamo già derivato le equazioni del moto.

Sappiamo però che il sistema di equazioni si riduce al seguente:

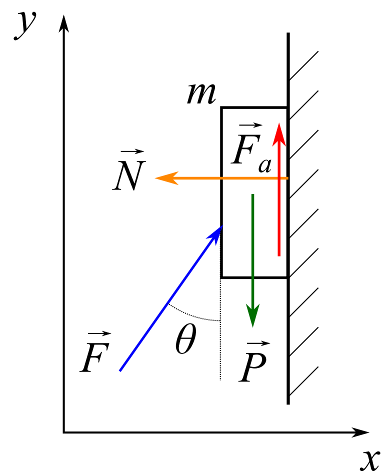
$$\begin{cases} F \sin\theta - N = 0 \\ F \cos\theta + F_a - mg = 0 \end{cases} \tag{183}$$

E quindi possiamo semplicemente ricavare:

$$F_a = mg - F\cos\theta = -4.2\, N \tag{184}$$

Il modulo ottenuto è negativo. Questo ci informa che l'ipotesi da noi formulata non era corretta, e che la forza d'attrito in questo specifico caso è orientata verso il basso.

Volendo riscrivere $\vec{F_a}$ in notazione vettoriale rispetto il sistema di riferimento presentato in figura scriviamo:



$$\vec{F}_a = -4.2\hat{j}\,N \tag{185}$$

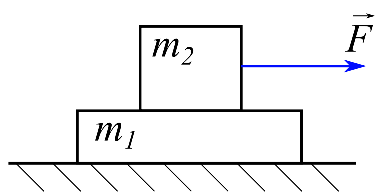
Esercizio 2 Un corpo di massa m_2 è appoggiato su di una piastra di massa m_1, a sua volta appoggiata su di un piano. Tra i copri 1 e 2 vi è attrito, con coefficienti statico e dinamico rispettivamente μ_s e μ_d, mentre non vi è attrito tra il corpo 2 e il piano. Sul corpo 2 è esercitata una forza $\vec{F}$, diretta parallelamente al piano, e il sistema è inizialmente fermo.

Determinare:

1. quale sia il modulo massimo della forza F^0_{max} da poter esercitare affinché i due corpi non si muovano (né 1, né 2)

2. il massimo valore del modulo della forza F^1_{max} perché i due corpi si muovano solidali tra loro

3. le accelerazioni dei due blocchi nel caso in cui imprimessi una forza di modulo $F > F^1_{max}$



La rappresentazione delle forze in gioco nel sistema, per quanto semplice può inizialmente trarre in inganno.

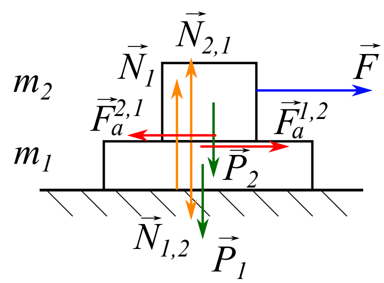
Dobbiamo infatti considerare la presenza di tutte le forze in campo, anche quelle di reazione generate in luce del terzo principio della dinamica.

Il sistema sarà caratterizzato, oltre che dalla forza esterna $\vec{F}$ e dalle due forze peso $\vec{P}_1$ e $\vec{P}_2$, dalla forza di reazione $\vec{N}_1$ del piano, che agisce solo sul corpo 1, e della coppia di forze di reazione associate al vincolo che sussiste tra i corpi 1 e 2. Affinché il corpo 2 non compenetri nel corpo 1 deve infatti essere presente una forza di reazione $\vec{N}_{2,1}$ (da leggersi come reazione vincolare agente sul corpo 2, data dalla presenza del corpo 1). Questa forza non è però isolata. Il terzo principio della dinamica implica che esista una seconda forza, diretta come la precedente, con ugual modulo e verso opposto. Questa forza si sviluppa appunto alla interfaccia tra le due superfici, ed agisce sul corpo 1 alla luce dell'azione del corpo 2; la possiamo pertanto indicare come $\vec{N}_{1,2}$.

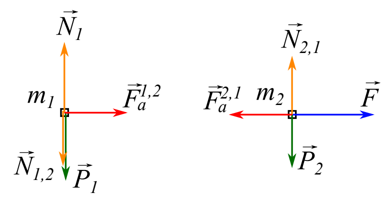
Un discorso analogo va compiuto per la forza di attrito radente. La forza di attrito, opposta al moto delle due superfici, si genera in 2 come opposta in verso a $\vec{F}$ (in assenza di forza di attrito, il corpo si muoverebbe nella direzione e verso date appunto dalla forza esterna): $\vec{F}^{2,1}_a$. Nuovamente però dobbiamo considerare che la forza d'attrito non è isolata, ma è frutto dell'interazione tra le superfici del corpo 1 e il corpo 2. Esiste pertanto $\vec{F}^{1,2}_a$ che agisce su 1, ed è opposta in verso a $\vec{F}^{2,1}_a$, quindi è orientata nello stesso verso della forza esterna $\vec{F}$.

È fondamentale porre attenzione quando si includono le rappresentazioni delle forze nello schema del problema, includendo sempre anche le forze dovute alla (corretta) applicazione del terzo principio della dinamica.

Possiamo a questo punto disegnare il sistema rappresentando tutte le forze in gioco:



E passare poi alla rappresentazione di corpo libero:



Da questa possiamo scrivere le equazioni del moto per i due corpi:

$$\begin{cases} \vec{P}_1 + \vec{N}_1 + \vec{N}_{1,2} + \vec{F}_a^{1,2} = m_1\vec{a}_1 \\ \vec{P}_2 + \vec{N}_{2,1} + \vec{F}_a^{2,1} + \vec{F} = m_2\vec{a}_2 \end{cases} \tag{186}$$

Dall'applicazione del terzo principio però sappiamo inoltre che le coppie di forze hanno stesso modulo, ma verso opposto, quindi possiamo semplificare la notazione scrivendo:

$$\begin{cases} \vec{N}_{2,1} = -\vec{N}_{1,2} = \vec{N}_2 \\ \vec{F}_a^{1,2} = -\vec{F}_a^{2,1} = \vec{F}_a \end{cases} \tag{187}$$

E quindi:

$$\begin{cases} \vec{P}_1 + \vec{N}_1 - \vec{N}_2 + \vec{F}_a = m_1\vec{a}_1 \\ \vec{P}_2 + \vec{N}_2 - \vec{F}_a + \vec{F} = m_2\vec{a}_2 \end{cases} \tag{188}$$

Scegliamo a questo punto un sistema di riferimento consono per lo studio del problema. Utilizziamo a tale scopo un sistema di riferimento cartesiano con asse x orientata lungo il piano in verso concorde a $\vec{F}$, e asse y verticale, orientato verso l'alto.

A questo punto possiamo separare le equazioni nel moto nelle componenti:

$$
\begin{cases}
F_a = m_1 a_{1,x} \\
-P_1 + N_1 - N_2 = m_1 a_{1,y} = 0 \\
-F_a + F = m_2 a_{2,x} \\
-P_2 + N_2 = m_2 a_{2,y} = 0
\end{cases}
\tag{189}
$$

caso 1.) Affinché nessuno dei due blocchi si muova, occorre che $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = 0$. Dalla prima equazione del sistema in Eq.189 è evidente che questo si ottiene esclusivamente nel caso in cui la forza di attrito sia nulla.

Questo a suo volta comporta, dallo studio della terza equazione del sistema, che anche il modulo di $\vec{F}$ deve essere nullo.

Quindi non è possibile che, in presenza di una forza trainante $\vec{F}$ non nulla, il sistema non si muova.

caso 2.) Perché i blocchi si muovano solidali è evidente che deve sussistere la condizione di attrito statico: nessuno scorrimento relativo tra le superfici dei blocchi 1 e 2.

Possiamo quindi considerare le condizioni aggiuntive al problema:

$$
\begin{cases}
F_a \leq \mu_s N_2 \\
\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a}
\end{cases}
\tag{190}
$$

Quindi possiamo procedere a risolvere il sistema in funzione di F per ricavare la massima forza possibile sotto le condizioni appena descritte F^1_{max}. Per farlo, possiamo semplificare la risoluzione ponendoci nella condizione limite in cui F_a è pari al massimo possibile $F_a^{max} = \mu_s N_2$.

$$
\begin{cases}
F_a^{max} = m_1 a_x \\
-P_1 + N_1 - N_2 = 0 \\
-F_a^{max} + F^1_{max} = m_2 a_x \\
-P_2 + N_2 = 0
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
N_2 = m_2 g \\
N_1 = (m_1 + m_2) g \\
a_x = \mu_s \frac{m_2}{m_1} g \\
F^1_{max} = \mu_s m_2 g (1 + \frac{m_2}{m_1})
\end{cases}
\tag{191}
$$

caso 3.) Per $|\vec{F}| > F^1_{max}$ si instaura uno slittamento tra i due copri, e quindi una condizione di attrito radente. Il corpo 2 scivola rispetto il corpo 1, pur trascinandolo però nel moto, che avverrà con una diversa accelerazione per i due corpi.

Per specializzare le equazioni del sistema Eq.189 al caso di attrito dinamico dobbiamo pertanto considerare condizioni diverse da quelle riportate in Eq.190, e cioè:

$$
\begin{cases}
F_a = \mu_d N_2 \\
\vec{a}_1 \neq \vec{a}_2
\end{cases}
\tag{192}
$$

Quindi possiamo infine ricavare le accelerazioni dei due blocchi:

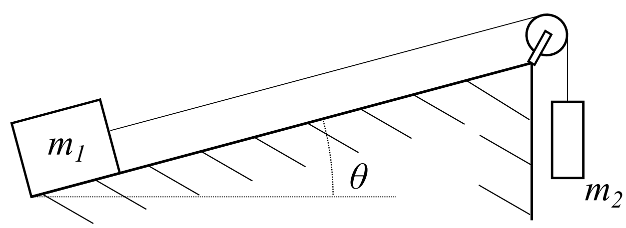
$$\begin{cases} F_a = m_1 a_{1,x} \\ -P_1 + N_1 - N_2 = 0 \\ -F_a + F = m_2 a_{2,x} \\ -P_2 + N_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} N_2 = m_2 g \\ N_1 = (m_1 + m_2) g \\ a_{1,x} = \mu_d \frac{m_2}{m_1} g \\ a_{2,x} = \frac{F - \mu_d m_2 g}{m_2} \end{cases} \tag{193}$$

Esercizio 3 Per sollevare un oggetto di massa $m_1 = 200\,kg$ su di una rampa inclinata rispetto l'orizzontale di un angolo $\theta = 15°$ viene collegato ad esso, tramite una corda di massa trascurabile (approssimabile quindi come ideale), un contrappeso di massa $m_2 = 70\,kg$. Il contrappeso è libero di muoversi lungo la verticale per mezzo di una carrucola (anch'essa approssimabile ad ideale) sulla quale la corda scorre liberamente. Per facilitare il sollevamento del blocco 1, l'attrito tra questo e la rampa è ridotto attraverso l'utilizzo di un lubrificante, presentando un coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0.11$.

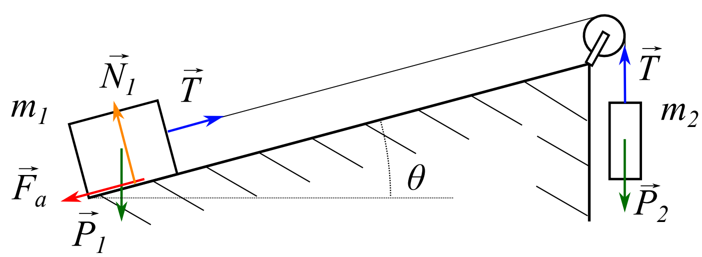
Calcolare:

1. se il blocco 1, originariamente fermo all'inizio della rampa, inizi a muoversi liberamente, o se sia necessario applicare ad esso una ulteriore spinta $\vec{F}$ per dare il via al moto. Nel caso sia necessaria, si consideri la spinta $\vec{F}$ come diretta parallelamente al piano inclinato, e presente solo all'istante iniziale del moto.

2. si osserva che dopo $t = 3.5\,s$ dall'inizio del moto il blocco 2 cala la sua quota di $\Delta y = 2.3\,m$; calcolare il coefficiente di attrito dinamico μ_d e la tensione a cui è soggetta la fune



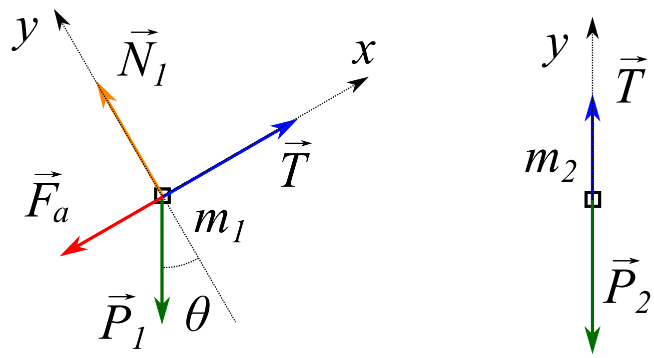
La dinamica del sistema è completamente rappresentabile con le forze rappresentate in figura:



E quindi con i diagrammi di corpo libero:

A questo corrispondono le equazioni del moto vettoriali:

$$\begin{cases} \vec{P}_1 + \vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{F}_a = m_1\vec{a}_1 \\ \vec{P}_2 + \vec{T} = m_2\vec{a}_2 \end{cases} \tag{194}$$



Lo studio del moto può essere chiaramente svolto secondo un sistema di riferimento cartesiano orientato secondo le direzioni orizzontale-verticale. Il corpo 1 è però libero di muoversi solo lungo la direzione parallela al piano inclinato, quindi il vettore accelerazione $\vec{a}_1$ formerà un angolo θ rispetto l'orizzontale. In un sistema di riferimento di questo tipo (orizz.-vert.) il moto del corpo 1 verrebbe pertanto descritto da due equazioni, una per ciascuna componente dell'accelerazione, rendendone lo studio meno immediato.

Possiamo semplificare lo studio del problema ponendoci in un sistema di riferimento con gli assi orientati in direzione parallela (x) e perpendicolare (y) al piano inclinato.

Il corpo 2 è invece soggetto ad un moto che si sviluppa puramente lungo la verticale, quindi possiamo considerare per quest'ultimo di descriverlo rispetto la direzione del moto.

$$\begin{cases} -P_1 \sin\theta + T - F_a = m_1 a_{1,x} \\ -P_1 \cos\theta + N_1 = m_2 a_{1,y} = 0 \\ -P_2 + T = m_2 a_2 \end{cases} \tag{195}$$

Bisogna poi considerare che, data la condizione di inestensibilità della corda, l'accelerazione di 1 lungo il piano è uguale in modulo all'accelerazione di 2 lungo la verticale. Vale però la pena notare che per descrivere un ipotetico moto di salita di 1 lungo il piano: $a_{1,x}$ è positiva, e al tempo stesso a_2 è negativa, rispetto il sistema di riferimento scelto. Quindi possiamo riscrivere le equazioni del moto utilizzando la notazione $a_{1,x} = -a_2 = a$ come:

$$\begin{cases} -P_1 \sin\theta + T - F_a = m_1 a \\ -P_1 \cos\theta + N_1 = 0 \\ -P_2 + T = -m_2 a \end{cases} \tag{196}$$

Per rispondere alla domanda 1.) è possibile domandarsi se la forza di attrito statico (di cui sappiamo il massimo modulo $F_a^{max} = \mu_s N_1$) sia sufficiente per mantenere per mantenere i corpi fermi ($a = 0$).

$$
\begin{cases} -P_1 \sin\theta + T - F_a = 0 \\ -P_1 \cos\theta + N_1 = 0 \\ -P_2 + T = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} F_a = -P_1 \sin\theta + P_2 \\ N_1 = P_1 \cos\theta \\ T = P_2 \end{cases} \tag{197}
$$

Quindi:

$$
F_a \overset{?}{\leq} F_a^{max} \, (= \mu_s N_1) \tag{198}
$$

$$
-m_1 \sin\theta + m_2 \overset{?}{\leq} \mu_s m_1 \cos\theta \tag{199}
$$

$$
\tag{200}
$$

Dove quindi possiamo testare la disuguaglianza:

$$
-m_1 \sin\theta + m_2 = 18.2\, N \leq \mu_s m_1 \cos\theta = 21.3\, N \tag{201}
$$

Essendo verificata la disuguaglianza, possiamo concludere che la forza d'attrito statico è sufficiente a mantenere il sistema, inizialmente fermo, in quiete.

È pertanto necessario applicare una spinta iniziale $\vec{F}$, al fine di rompere la condizione di attrito statico, e passare al regime di attrito dinamico. Assumendo che $\vec{F}$ sia applicata lungo la direzione del piano inclinato, il minimo modulo della forza $\vec{F}$ sufficiente a causare tale cambio di regine è appunto la differenza tra il massimo della forza d'attrito statico, e la forza d'attrito appena calcolata.

$$
F > F_a^{max} - F_a = \mu_s m_1 \cos\theta + m_1 \sin\theta - m_2 = \tag{202}
$$

$$
= m_1(\mu_s \cos\theta + \sin\theta) - m_2 = 3.0\, N \tag{203}
$$

A questo punto i due blocchi iniziano a muoversi e la forza d'attrito $\vec{F_a}$ a cui è soggetto il corpo 1 è di tipo dinamico, per cui sappiamo valere la relazione empirica $F_a = \mu_d N_1$.

Le equazioni del moto si possono facilmente riscrivere come:

$$
\begin{cases} -P_1 \sin\theta + T - F_a = m_1 a \\ -P_1 \cos\theta + N_1 = 0 \\ -P_2 + T = -m_2 a \end{cases} \qquad \begin{cases} -P_1 \sin\theta + T - \mu_d N_1 = m_1 a \\ -P_1 \cos\theta + N_1 = 0 \\ -P_2 + T = -m_2 a \end{cases} \tag{204}
$$

Conoscendo di quanto si sposta il contrappeso in un tempo t partendo da fermo, possiamo usare la nostra conoscenza della cinematica per calcolare l'accelerazione a cui esso è soggetto:

$$
\begin{cases} a(t) & = a = const. \\ v(t) & = \cancel{v_0} + \int_0^t a(t)dt = at \\ y(t) & = y_0 + \int_0^t v(t)dt = y_0 + \frac{1}{2}at^2 \end{cases} \tag{205}
$$

da cui otteniamo:

$$a = \frac{2\Delta y}{t^2} \tag{206}$$

Quindi possiamo risolvere il sistema delle equazioni del moto per trovare i parametri richiesti:

$$\begin{cases} -P_1 \sin\theta + T - \mu_d N_1 = m_1 a \\ -P_1 \cos\theta + N_1 = 0 \\ -P_2 + T = -m_2 a \end{cases} \qquad \begin{cases} -m_1 g \sin\theta + T - \mu_d N_1 = m_1 \frac{2\Delta y}{t^2} \\ -m_1 g \cos\theta + N_1 = 0 \\ -m_2 g + T = -m_2 \frac{2\Delta y}{t^2} \end{cases} \tag{207}$$

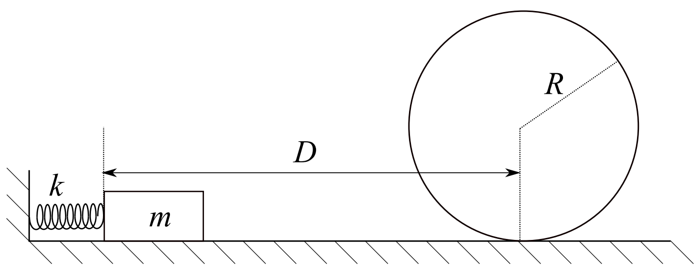
$$\begin{cases} \mu_d = \frac{m_2 g - (m_1 + m_2)\frac{2\Delta y}{t^2} - m_1 g \sin\theta}{m_1 g \cos\theta} = 0.07 \\ T = m_2 \left(g - \frac{2\Delta y}{t^2} \right) = 660\,N \end{cases} \tag{208}$$

Esercizio 4 Una macchinina giocattolo di massa m è posizionata a contatto con un sistema di lancio in cui è presente una molla di costante elastica k, inizialmente mantenuta compressa di Δx. Liberata la molla, la macchinina è soggetta ad una spinta di brevissima durata $\Delta t = 10^{-2}\,s$ ed è poi libera di muoversi lungo una guida liscia, di cui possiamo considerare trascurabile l'attrito con l'automobilina. A distanza D dal punto di lancio la guida forma una circonferenza di raggio R nel piano verticale (un "giro della morte").

Determinare:

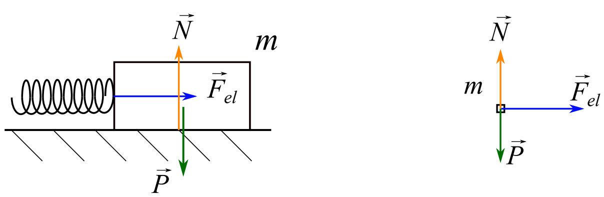
1. le condizioni per le quali la macchinina riuscirà a completare il giro della morte senza staccarsi dalla guida e cadere

2. quale tra le seguenti condizioni del percorso occorra modificare nel caso questo non accada: la distanza D; il raggio R.



La molla, una volta liberata, esercita una forza di modulo $F_{el} = k\Delta x$.

Nella primissima fase del moto, la macchinina risentirà delle forze rappresentate in figura:



Da cui le equazioni del moto risultano:

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{el} = m\vec{a} \qquad (209)$$

Rispetto un sistema di riferimento con gli assi orientati secondo l'orizzontale (x) e la verticale (y) possiamo scrivere:

$$\begin{cases} F_{el} = ma_x \\ -P + N = ma_y = 0 \end{cases} \qquad (210)$$

Quindi identifichiamo l'accelerazione a cui è soggetta la macchinina nei primissimi istanti del suo moto:

$$a_x = \frac{k\Delta x}{m} \tag{211}$$

Mentre l'estremo libero della molla risentirà della forza di richiamo, e invertirà quindi il suo moto, la macchinina è totalmente libera di muoversi lungo l'asse x, con attriti totalmente trascurabili (come specificato dal testo) con il piano. La molla esaurisce velocemente (in un intervallo Δt molto piccolo) il suo ruolo di propulsore della macchinina, e si può assumere quindi che l'accelerazione fornita in questo intervallo di tempo si mantenga pressappoco costante.

Così possiamo calcolare la velocità impressa all'automobilina dopo l'accelerazione:

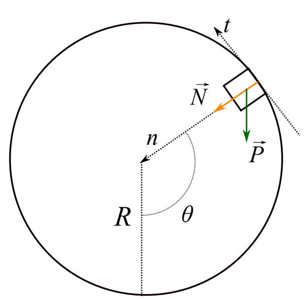
$$v(t) = \cancel{v_0} + \int_0^{\Delta t} a(t)dt = \frac{k\Delta x}{m}\Delta t \tag{212}$$

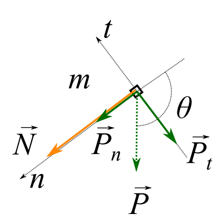
Al termine della fase di accelerazione iniziale l'automobilina è soggetta ad una risultante delle forze nulla, data dalla sommatoria vettoriale della forza peso e della reazione vincolare del piano. Sappiamo pertanto che, alla luce del primo principio della dinamica, la macchina mantiene il proprio stato di moto, muovendosi di moto rettilineo uniforme fino ad incontrare il "giro della morte".

Un volta incontrata la traiettoria circolare, la macchinina cambia il suo stato di moto in funzione della posizione lungo la guida.

Valutiamo le forze agenti in un punto generico della circonferenza. Lungo la verticale chiaramente continueremo ad avere la forza peso $\vec{P}$. La reazione vincolare della guida invece dipende dalla posizione del corpo, in quanto è sempre orientata in direzione normale alla guida stessa.

Per descrivere le equazioni del moto è opportuno portarsi in un sistema di riferimento in cui identifichiamo le direzioni tangenziale t e normale n alla guida nel punto considerato.





Dove è evidente che forze lungo la direzione normale non sono in equilibrio. Scriviamo quindi le equazioni del moto:

$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{a} \tag{213}$$

Laddove adesso proiettando lungo le due componenti otteniamo:

$$\begin{cases} -P_t = ma_t \\ P_n + N = ma_n \end{cases} \quad \begin{cases} -mg\sin\theta = ma_t \\ -mg\cos\theta + N = ma_n \end{cases} \tag{214}$$

Dove ricordiamo la forma delle componenti dell'accelerazione calcolate rispetto le direzioni tangenziale e normale ad una traiettoria nel punto considerato:

$$\begin{cases} a_t = \frac{dv}{dt} \\ a_n = \frac{v^2}{\rho} \end{cases} \tag{215}$$

Nel caso di traiettoria circolare, possiamo quindi scrivere:

$$\begin{cases} -mg\sin\theta = m\frac{dv}{dt} = mR\frac{d\omega}{dt} \\ -mg\cos\theta + N = m\frac{v^2}{R} = mR\omega^2 \end{cases} \tag{216}$$

La condizione necessaria perché la macchinina non cada è ovviamente che questa non si distacchi dalla guida nel corso di tutto il moto. Questo si traduce con la richiesta che la reazione vincolare della guida non si annulli in nessun punto della traiettoria del corpo:

$$N = mR\omega^2 + mg\cos\theta > 0 \tag{217}$$

Bisogna però fare attenzione a non incappare nell'errata convinzione che si possa considerare la velocità angolare ω come una costante del moto. In effetti la prima delle equazioni del moto della Eq.216 ci informa di come varia ω in funzione dell'angolo θ. Questa equazione può essere risolta con un qualche passaggio.

In primis, applichiamo la regola di derivazione a catena a $\omega(\theta)$:

$$-mg\sin\theta = mR\frac{d\omega(\theta)}{dt} = \tag{218}$$

$$= mR\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \tag{219}$$

$$= mR\frac{d\omega}{d\theta}\omega \tag{220}$$

Questa è una equazione differenziale simile ad altre già incontrate, che possiamo risolvere tramite il metodo di separazione delle variabili:

$$-g\sin\theta = R\frac{d\omega}{d\theta}\omega \tag{221}$$

$$-\sin\theta d\theta = \frac{R}{g}\omega d\omega \tag{222}$$

$$\int_0^\theta -\sin\theta d\theta = \frac{R}{g}\int_{\omega(\theta=0)=\omega_0}^{\omega(\theta)} \omega d\omega \tag{223}$$

$$[\cos\theta]_0^\theta = \frac{R}{2g}\left[\omega^2\right]_{\omega_0}^{\omega(\theta)} \tag{224}$$

$$\cos\theta - 1 = \frac{R}{2g}\left(\omega(\theta)^2 - \omega_0\right) \tag{225}$$

Questo ci porta finalmente a rendere esplicita la dipendenza della velocità angolare del corpo dall'angolo:

$$\omega(\theta) = \sqrt{\omega_0 + \frac{g}{R}\left(\cos\theta - 1\right)} \tag{226}$$

Volendo calcolare la velocità tangenziale:

$$v(\theta) = R\omega(\theta) = R\sqrt{\omega_0 + \frac{g}{R}\left(\cos\theta - 1\right)} \tag{227}$$

$$= \sqrt{v_0 + Rg\left(\cos\theta - 1\right)} \tag{228}$$

$$\tag{229}$$

Dove v_0 è la velocità con la quale la macchinina entra nella circonferenza (quindi quella ottenuta dopo l'accelerazione iniziale).

Possiamo quindi portarci a calcolare il modulo della reazione vincolare in funzione dell'angolo:

$$N(\theta) = mR\omega(\theta)^2 + mg\cos\theta = \tag{230}$$

$$= m\frac{v(\theta)^2}{R} + mg\cos\theta \tag{231}$$

Per verificare se la macchinina riuscirà a compiere il suo moto attorno al "giro della morte" possiamo porci nel caso piu' sfavorevole, e cioè quello per $\theta = \pi$ (alla sommità della traiettoria). In quel punto la reazione vincolare è pari a:

$$N(\theta = \pi) = m\left(\frac{v_0}{R} + g\left(\cos\pi - 1\right) + g\cos\pi\right) \tag{232}$$
$$= m\left(\frac{v_0}{R} - 3g\right) \tag{233}$$
$$= m\left(\frac{k\Delta x\Delta t}{mR} - 3g\right) \tag{234}$$
$$\tag{235}$$

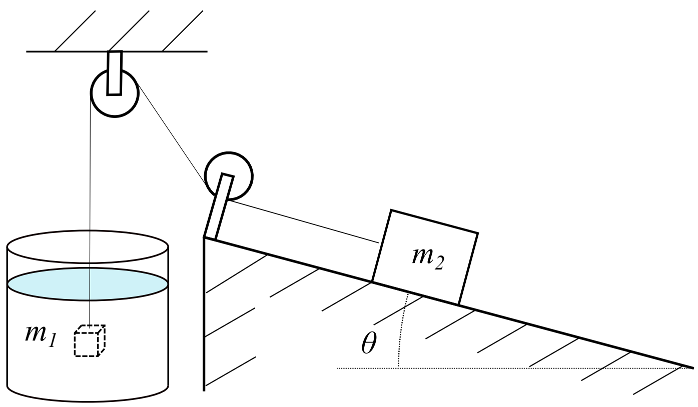
È evidente dalla forma di $N(\theta)$ appena ricavata che per impedire alla macchinina di staccarsi dalla guida durante il moto, potremmo agire sul percorso diminuendo R a parità degli altri parametri del problema.

In alternativa, potremmo agire sulla molla del sistema di lancio, aumentandone la compressione Δx (o sostituendo la molla con una di piu' elevata costante elastica).

Sotto le ipotesi di attrito macchina-guida trascurabile il parametro D non influisce in alcun modo sul moto del corpo, così come possiamo attenderci dal primo principio della dinamica.

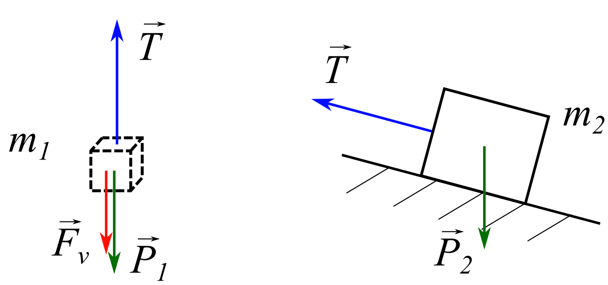
Esercizio 5 Un corpo di massa m_1 è immerso in una cisterna piena di un fluido. Il coefficiente di attrito viscoso tra il corpo e il fluido è stato calcolato ed è pari a b. Per estrarre questo oggetto dalla cisterna questo è stato collegato tramite una fune ed un sistema di carrucole ad un blocco di massa m_2, libero di scivolare su di una rampa ben oliata (per la quale possiamo quindi considerare trascurabile l'attrito). Il blocco 2 è inizialmente fermo. Trascurando la spinta di Archimede a cui il corpo m_1 è soggetto, determinare:

1. come ci aspettiamo che evolva la velocità del corpo 1 e la sua profondità rispetto al pelo del fluido in funzione del tempo
2. come varia il moto una volta che il copro 1 è stato estratto dalla cisterna

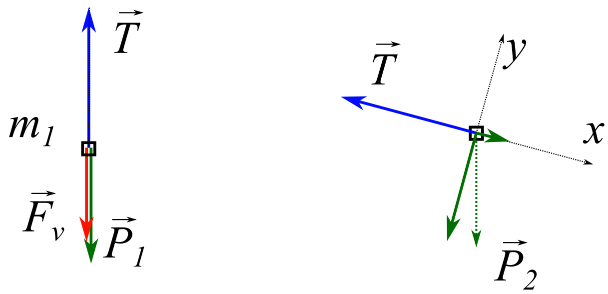


Il corpo 2 è soggetto alla forza peso $\vec{P}_2$, alla tensione della fune $\vec{T}$, e alla reazione vincolare del piano inclinato sul quale si muove $\vec{N}$.

Il corpo 1 è invece soggetto, oltre che alla forza peso $\vec{P}_1$ e alla tensione della fune $\vec{T}$, ad una forza di attrito viscoso $\vec{F}_v$, orientata in direzione opposta alla direzione del moto di 1, e quindi concorde in direzione e verso alla forza peso $\vec{P}_1$.



Scriviamo quindi le equazioni del moto per i due corpi:



$$\begin{cases} \vec{P}_1 + \vec{F}_v + \vec{T} = m_1 \vec{a}_1 \\ \vec{P}_2 + \vec{N} + \vec{T} = m_2 \vec{a}_2 \end{cases} \tag{236}$$

Passando alle proiezioni rispetto i sistemi di riferimento scelti per descrivere il problema:

$$\begin{cases} -P_1 - F_v + T = m_1 a_1 \\ +P_2 \sin\theta - T = m_2 a_{2,x} \\ -P_2 \cos\theta + N = m_2 a_{2,y} = 0 \end{cases} \tag{237}$$

Dove al solito ricordiamo che, per effetto dell'inestensibilità delle funi ideali $a_1 = a_2 = a$.

Il moto del corpo 1 è dato dalla soluzione delle equazioni del moto appena ricavate, ricordando che la forza di attrito viscoso agisce come una forza che si oppone al moto del corpo e ha modulo proporzionale alla sua velocità: $\vec{F}_v = -b\vec{v}$.

$$-m_1 g + m_2 g \sin\theta - bv = (m_1 + m_2)a = (m_1 + m_2)\frac{dv}{dt} \tag{238}$$

Questa equazione differenziale sembra particolarmente complessa, ma possiamo compiere alcuni cambi di variabili per semplificare la notazione e ricondurci ad un caso facilmente affrontabile.

Poniamo:

$$\begin{cases} \frac{-m_1 g + m_2 g \sin\theta}{m_1 + m_2} = A \\ \frac{b}{m_1 + m_2} = B \end{cases} \tag{239}$$

Così da poter utilizzare una notazione piu' compatta:

$$A - Bv(t) - \frac{dv}{dt} = 0 \tag{240}$$

Facciamo il seguente cambio di variabili:

$$y = A - Bv(t) \tag{241}$$

Per cui notiamo valere:

$$\frac{dy}{dt} = -B\frac{dv(t)}{dt} \tag{242}$$

Questo ci permette di riscrivere l'equazione Eq.240 come:

$$y = -\frac{1}{B}\frac{dy}{dt} \tag{243}$$

E a questo punto possiamo procedere con integrazione:

$$\frac{dy}{y} = -Bdt \tag{244}$$

$$\int_{y(t=0)=y_0}^{y(t)} \frac{dy}{y} = \int_0^t -Bdt \tag{245}$$

$$\ln\left(\frac{y(t)}{y_0}\right) = -Bt \tag{246}$$

$$y(t) = y_0 e^{-Bt} \tag{247}$$

Riportandoci alle variabili iniziali:

$$v(t) = \frac{-m_1 g + m_2 g \sin\theta}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m_1+m_2}t}\right) \tag{248}$$

Notiamo che asintoticamente i corpi 1 e 2 tenderebbero a muoversi di moto uniforme, con velocità costante pari a $\frac{-m_1g+m_2g\sin\theta}{b}$. In pratica, questo avviane già dopo un intervallo di tempo finito, per il quale $(\frac{b}{m_1+m_2}t)$ diventa molto piccolo.

La costante $\tau = \frac{m_1+m_2}{b}$, che ha le stesse unità di misura del tempo t, è detta *costante di tempo* di questo specifico moto.

Per t maggiori di poche unità di τ si può verificare che il corpo si trova molto vicino alla condizione di velocità limite, dato che l'esponenziale $e^{-t/\tau}$ tende velocemente a zero.

Possiamo infine procedere ad integrare nuovamente per ottenere la legge oraria del corpo 1 (il calcolo dell'integrale è lasciato a questo punto come esercizio):

$$y(t) = y_0 + \int_0^t \frac{-m_1 g + m_2 g \sin\theta}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m_1+m_2}t}\right) dt = \tag{249}$$

$$= \ldots \tag{250}$$

$$\tag{251}$$

All'uscita dal fluido il corpo 1 non è piu' soggetto all'attrito viscoso, e quindi il moto dei due corpi diventa uniformemente accelerato, con un'accelerazione pari a:

$$a' = \frac{m_2 \sin\theta - m_1}{m_1 + m_2} g \tag{252}$$

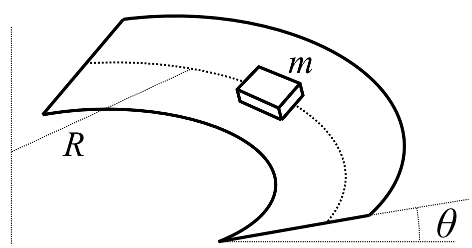
Esercizio 6 [Prof. S. Lacaprara] Un carrellino di massa $m = 12\,kg$ percorre una curva "parabolica" di raggio $R = 2.8\,m$ inclinata di un angolo $\theta = 25°$ rispetto l'orizzontale.

Calcolare:

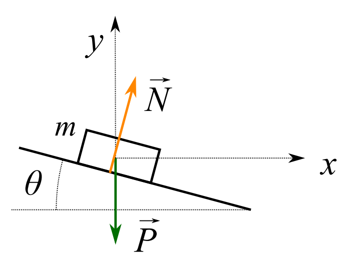
1. la velocità v_0 necessaria per percorrere la curva senza attrito
2. la reazione vincolare $\vec{N}_0$ in questo caso

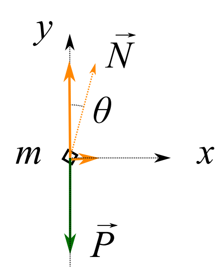
Nell'ipotesi invece che il coefficiente di attrito statico tra carrello e guida sia $\mu_s = 0.13$ determinare:

3. la reazione vincolare $\vec{N}_1$ se il modulo della velocità è pari a $4\,m/s$
4. la forza d'attrito presente
5. la velocità massima e minima possibile perché si mantenga questo tipo di moto
6. la reazione vincolare massima e minima nei due casi



Caso senza attrito Il carrello è libero di muoversi senza attrito rispetto la guida. In questo caso il sistema è descritto dalla forza peso $\vec{P}$ e dalla reazione vincolare della guida $\vec{N}_0$, a cui corrispondono le equazioni del moto:





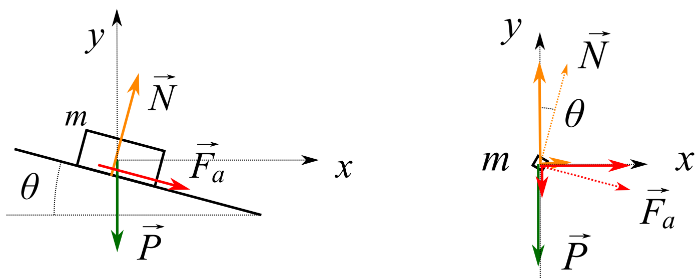
$$\vec{P} + \vec{N}_0 = m\vec{a}_0 \tag{253}$$

Utilizzando un sistema di riferimento con gli assi indicati come in figura, possiamo descrivere il moto nelle due componenti radiale e verticale come:

$$\begin{cases} -P + N_0 \cos\theta = ma_{0,y} = 0 \\ N_0 \sin\theta = ma_{0,x} = m\frac{v_0^2}{R} \end{cases} \quad \begin{cases} N_0 \cos\theta = \frac{mg}{\cos\theta} = 130\,N \\ v_0 = \sqrt{Rg\tan\theta} = 3.6\,m/s \end{cases} \tag{254}$$

Caso con attrito Affinché il corpo si muova lungo la guida, ma non scivoli trasversalmente rispetto al piano inclinato, deve sussistere un attrito statico (non dinamico) tra il carrello e la guida stessa.

Le forze applicate sul carrello adesso sono rappresentate come in figura, dove $\vec{F}_a$ è diretta al solito nella direzione opposta al moto relativo che si avrebbe tra le superfici in assenza di attrito. La domanda al punto 4.) ci informa che la velocità del carrello v_1 è maggiore della velocità v_0. Sotto questa condizione in assenza di attrito il corpo tenderebbe a muoversi verso l'esterno, incrementando il proprio raggio di curvatura. Pertanto la forza di attrito è diretta verso l'interno della curva.



Possiamo quindi riformulare le equazioni del moto specializzandole alla nuova condizione appena descritta:

$$\vec{P} + \vec{N}_1 + \vec{F}_a = m\vec{a}_1 \tag{255}$$

E quindi:

$$\begin{cases} -P + N_1 \cos\theta - F_a \sin\theta = ma_{1,y} = 0 \\ N_1 \sin\theta + F_a \cos\theta = ma_{1,x} = m\frac{v_1^2}{R} \end{cases} \tag{256}$$

$$\begin{cases} N_1 & = m\left(g\cos\theta + \frac{v_1^2}{R}\sin\theta\right) = 135.7\,N \\ F_a & = m\left(-g\sin\theta + \frac{v_1^2}{R}\cos\theta\right) = 17.6\,N \end{cases} \tag{257}$$

Esiste un intervallo di velocità possibili perché questo moto avvenga in presenza di attrito statico, e non si dia inizio ad uno slittamento passando quindi ad un regime di attrito dinamico. Abbiamo già visto che in presenza di velocità $v > v_0$ la forza d'attrito è diretta verso l'interno della curva. Per velocità $v < v_0$ invece la forza d'attrito inverte il suo verso, ed è diretta verso l'esterno della curva, impedendo al carrello di scivolare verso il basso.

Chiaramente in entrambi i casi esistono delle condizioni limite, dettate dal fatto che il modulo della forza d'attrito è limitato dalla nota relazione empirica $F_a \leq \mu_s N$.

Valutiamo quindi i due casi:

$v > v_0$ La descrizione della dinamica per questo caso, così come le equazioni del moto, sono già state discusse in precedenza.

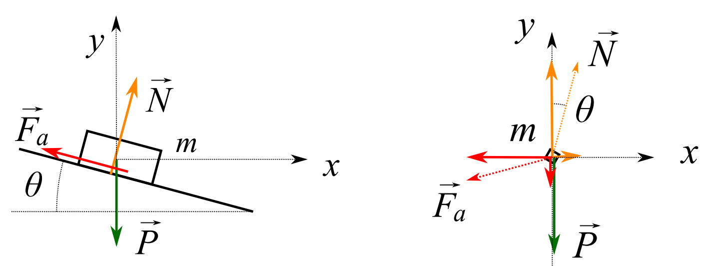
Per ricavare la massima velocità possibile in regime di attrito statico, e il corrispondente valore della reazione vincolare in questo caso, poniamoci nella condizione limite per l'attrito statico per cui $F_a = \mu_s N_1^{max}$:

$$\begin{cases} -mg + N_1^{max}\cos\theta - \mu_s N_1^{max}\sin\theta = 0 \\ N_1^{max}\sin\theta + \mu_s N_1^{max}\cos\theta = m\frac{v_{1,max}^2}{R} \end{cases} \tag{258}$$

quindi:

$$\begin{cases} N_1^{max} = \frac{mg}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta} = 138.1\,N \\ v_1^{max} = \sqrt{Rg\frac{(\sin\theta + \mu_s\cos\theta)}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}} = 4.2\,m/s \end{cases} \tag{259}$$

$v < v_0$ In questo caso la direzione della forza d'attrito si inverte.



Analogamente al caso precedente, consideriamo il massimo della forza d'attrito, in questo caso per ottenere la minima possibile velocità e il corrispondente valore della reazione vincolare.

$$\begin{cases} -mg + N_1^{min}\cos\theta + \mu_s N_1^{min}\sin\theta = 0 \\ N_1^{min}\sin\theta - \mu_s N_1^{min}\cos\theta = m\frac{v_{1,min}^2}{R} \end{cases} \tag{260}$$

quindi:

$$\begin{cases} N_1^{min} = \frac{mg}{\cos\theta + \mu_s\sin\theta} = 122.3\,N \\ v_1^{min} = \sqrt{Rg\frac{(\sin\theta - \mu_s\cos\theta)}{\cos\theta + \mu_s\sin\theta}} = 2.9\,m/s \end{cases} \tag{261}$$