Soluzione

1) Le due forze agenti sulla cassa sono la forza peso -che è rivolta verso il basso e la reazione vincolare del piano -che è perpendicolare al piano stesso.
Orientando l'asse x verso sinistra e l'asse y verso il basso, la forza peso vale:

$$\vec{P} = mg\hat{y}$$

Si consideri un altro sistema di coordinate con:
L'asse p orientato parallelamente al piano e in discesa
L'asse n orientato normalmente al piano e in salita
In questo sistema di coordinate la forza perso è scoposta come segue

$$\vec{P} = (mg\sin\alpha)\hat{p} - (mg\cos\alpha)\hat{n}$$

La reazione vincolare del piano compensa la componente perpendicolare allo stesso, quindi

$$\vec{N} = (mg\cos\alpha)\hat{n}$$

Per fermare la cassaè necessaria una forza lungo il piano inclinato pari a

$$\vec{F} = -(mg\sin\alpha)\hat{p}$$

2) Dimezzando la forza F, il corpo scende con una accelerazione pari a

$$\vec{a} = \left(\frac{1}{2}g\sin\alpha\right)\hat{p}$$

Lungo il piano si ha

$$d = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{4}gt^2\sin\alpha = 11.04m$$

Soluzione:
La forza $\overrightarrow{F}$ di modulo F nel sistema di riferimento cartesiano vale

$$\overrightarrow{F} = F\hat{x}$$

Scomposta nel sistema di riferimento con i versori $\hat{n}$ e $\hat{p}$ definiti come prima

$$\overrightarrow{F} = -F(\cos\alpha\hat{p} + \sin\alpha\hat{n})$$

Nota: Se avete problemi con l'algebra e con i segni potete convincervi della correttezza di questa scomposizione ragionando come segue. Intuitivamente la forza $\overrightarrow{F}$ spingerà la massa contro il piano quindi la componente con $\hat{n}$ deve essere negativa. Inoltre questa forza avrà come effetto quello di non fare cadere la massa e quindi anche la componente con $\hat{p}$ deve essere negativa. Infine, analizzando il caso limite $\alpha = 0$ ossia il caso di piano non inclinato vogliamo ottenere $\overrightarrow{F} = -F\hat{p}$ che è verificato mettendo le equazioni trigonometriche come in formula.
La componente normale $\overrightarrow{R_n}$ della forza totale $\overrightarrow{R}$ agente sul corpo è quindi

$$\overrightarrow{R_n} = \overrightarrow{P_n} + \overrightarrow{F_n} + \overrightarrow{N} = (-mg\cos\alpha - F\sin\alpha + N)\hat{n}$$

Poiché la massa non perfora il piano si impone $\overrightarrow{R_n} = 0$, si ottiene la normale N, e quindi la forza di attrito $\overrightarrow{Q}$ vale

$$\overrightarrow{Q} = -Q\hat{p} = -\mu_s N\hat{p} = -\mu_s(mg\cos\alpha + F\sin\alpha)\hat{p}$$

La componente parallela $\overrightarrow{R_p}$ della forza totale $\overrightarrow{R}$ agente sul corpo non è altro che

$$\overrightarrow{R_p} = \overrightarrow{Q} + \overrightarrow{F_p} + \overrightarrow{P_p} = (mg\sin\alpha - F\cos\alpha - \mu_s(mg\cos\alpha + F\sin\alpha))\hat{p}$$

La forza $\overrightarrow{F}$ è tale da non far muovere il corpo lungo il piano inclinato perciò anche $\overrightarrow{R_p} = 0$.
Dall'equazione precedente quindi si ricava F modulo di $\overrightarrow{F}$

$$F = \frac{\sin\alpha - \mu_s\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu_s\sin\alpha}mg$$

Poiché $\overrightarrow{F} = F\hat{x}$ allora

$$\overrightarrow{F} = \frac{\sin\alpha - \mu_s\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu_s\sin\alpha}mg\hat{x}$$

Soluzione:
1) Sotto le ipotesi del testo, le tre masse hanno in modulo la medesima accelerazione. La responsabile del moto in verso orario di A,B e C è la forza peso delle masse B e C.

$$\vec{F} = (m_b + m_c)\vec{g}$$

Dall'equazione di Newton si può ricavare l'accelerazione, usando la massa M del sistema

$$M = m_a + m_b + m_c$$

Il modulo dell'accelerazione vale quindi

$$a = \frac{M - m_a}{M} g$$

a) Quando la massa m_a è trascurabile rispetto alle altre due ci aspettiamo che il sistema acceleri con modulo g, ed effettivamente sotto questa ipotesi la frazione dell'equazione precendente tende a 1 e quindi $a = g$.
b) Nel caso opposto, in cui le masse m_b ed m_c sommate sono trascurabili rispetto a m_a allora si ha che $(M - m_a)/M \sim 0$ e quindi il sistema tenderebbe a non muoversi.
Per ricavare la tensione nel tratto richiesto occorre fare il diagramma delle forze agenti su C e scrivere l'equazione di Newton. Orientando positivamente il verso orario si ha

$$m_c g - T = m_c a \quad \rightarrow \quad T = m_c(g - a)$$

Soluzione:
Convenzione: assumiamo come positivo il verso anti-orario e sia $m_d = m_b + m_c$.
Analizziamo il lato sinistro del triangolo. L'equazione di Newton normale al piano ci dà

$$N = m_a g \cos\alpha$$

Dunque la forza di attrito statico in modulo vale

$$Q = \mu_s m_a g \cos\alpha$$

E' necessario capire se questa forza è rivolta verso il vertice alto del triangolo (verso orario) oppure verso il vertice in basso a sinistra (verso anti-orario). Per capirlo, va ricordato che la forza di attrito è una forza che si sviluppa lungo un piano scabro in verso opposto a quello del moto. Dunque va analizzato il problema in assenza di attrito: in particolare se il sistema procede in verso orario o anti-orario. Fatto ciò, si assegna alla forza di attrito il segno opposto di quello del moto. In questo caso, facendo attenzione ai dati: poiché $\sin\alpha \sim \sin\beta$ e poiché $m_a \gg m_d$, in assenza di attrito il moto sarebbe intuitivamente in verso anti-orario, pertanto l'attrito sul lato sinistro del triangolo si svilupa in verso orario. Quidi l'equazione di Newton delle forze agenti su m_a lungo il piano è

$$m_a g \sin\alpha - T - Q = m_a a \tag{2.1}$$

Occupiamoci ora del lato destro del triangolo. Il sistema composto dalle due masse m_b ed m_c può essere sostituito da un sistema con un'unica massa $m_d = m_b + m_c$. Il diagramma delle forze su m_d lungo il piano inclinato ci permette di scrivere

$$T - m_d g \sin\beta = m_d a \quad \rightarrow \quad T = m_d(g\sin\beta + a)$$

Sostituendo i valori ottenuti per T e per Q nell'equazione (2.1) si ottiene

$$a = g\sin\alpha - \frac{m_d}{m_a}(g\sin\beta + a) - \mu_s g\cos\alpha$$

Da cui si ricava a

$$a = g\left[\frac{m_a}{m_a + m_d}\sin\alpha - \frac{m_d}{m_a + m_d}\sin\beta - \frac{m_a}{m_a + m_d}\mu_s\cos\alpha\right] = 2.28\frac{m}{s^2}$$

2) Ci basta sostituire $m_d = 0$ nell'espressione precedente ottenendo

$$a = g(\sin\alpha - \mu_s\cos\alpha)$$

che è l'accelerazione che ha un corpo che scende lungo un piano inclinato scabro. Si noti che in assenza di attrito ($\mu_s = 0$) si ottiene semplicemente $a = g\sin\alpha$.