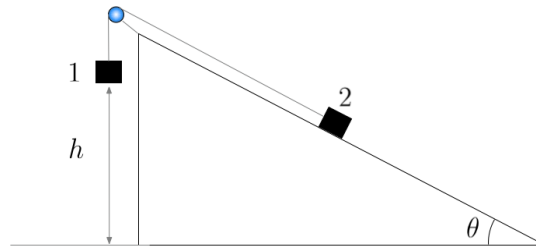


Test Allenamento Dinamica Sistemi

1 Piano inclinato

Due masse uguali di valore $m = 2 \text{ kg}$ sono connesse da un filo inestensibile di massa trascurabile e sono disposte come in figura. L'angolo del piano inclinato è $\theta = 39^\circ$. Inizialmente la massa 1 si trova ad un'altezza $h = 1.5 \text{ m}$ dal suolo. All'istante iniziale la massa 1 comincia a scendere sotto l'azione della gravità e la massa 2 scivola sul piano inclinato scabro che ha un coefficiente di attrito dinamico $\mu = 0.25$. Si calcoli l'accelerazione a delle due masse, la velocità del corpo 1 quando tocca il suolo e il percorso complessivo d lungo il piano inclinato compiuto dalla massa 2 fino al suo arresto. Quale deve valere il coefficiente di attrito statico μ_s affinché la massa 2, dopo essersi arrestata, non cominci a scivolare verso il basso.



Soluzione Prima equazione cardinale

$$\begin{aligned}ma &= mg - T \\ma &= T - mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta\end{aligned}$$

da cui

$$a = \frac{g}{2} (1 - \sin \theta - \mu \cos \theta) = 0.865 \text{ m/s}^2$$

La velocità all'impatto col suolo è

$$v_1 = v_2 = \sqrt{2ah} = 1.611 \text{ m/s}$$

Quando 1 tocca il suolo, 2 ha abbastanza energia cinetica per proseguire un po' prima che venga in parte convertita in energia potenziale gravitazionale e in parte dissipata dalle forze di attrito

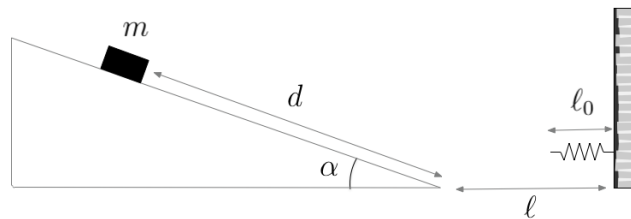
$$\frac{1}{2}mv_2^2 = mg(\sin\theta + \mu\cos\theta)\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{v_2^2}{2g(\sin\theta + \mu\cos\theta)} = 16\text{ cm}$$

$$d = h + \Delta x = 1.66\text{ m}$$

$$\mu_s = \tan\theta \approx 0.81$$

2 Piano inclinato e molla

Un corpo di massa $m = 60\text{ kg}$ scivola su un piano liscio, inclinato di $\alpha = 5^\circ$ rispetto all'orizzontale. All'istante iniziale la sua velocità è nulla e la distanza percorsa lungo il piano inclinato vale $d = 4\text{ m}$. Alla fine del piano inclinato la massa scivola su un tratto



orizzontale liscio lungo $\ell = 2\text{ m}$ e urta una molla di massa nulla e lunghezza a riposo $\ell_0 = 50\text{ cm}$ fissata ad un muro.

Si calcoli in N/m quanto deve valere la costante elastica K della molla affinché il corpo tocchi il muro con velocità nulla.

Se, invece, il piano orizzontale avesse un coefficiente di attrito dinamico $\mu = 0.14$, quale dovrebbe essere il valore di K ?

Infine, quanto dovrebbe valere il coefficiente di attrito del piano orizzontale μ' perché il corpo toccasse la molla con velocità nulla?

Soluzione Altezza di partenza del corpo sul piano inclinato

$$h = d \sin\alpha = 0.3486\text{ m}$$

Energia cinetica all'uscita del piano inclinato

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = mgh = 205.2\text{ J}$$

Conservazione energia

$$\frac{1}{2}K\ell_0^2 = E_k \Rightarrow K = \frac{2E_k}{\ell_0^2} \approx 1641.6 \text{ N/m}$$

Se il piano orizzontale avesse coefficiente di attrito $\mu = 0.14$

$$mgh - \mu mg\ell = \frac{1}{2}K'\ell_0^2 \Rightarrow K' = 323.13 \text{ N/m}$$

Infine, affinché il corpo arrivi ad urtare la molla con velocità nulla

$$mgh - \mu' mg(\ell - \ell_0) = 0 \Rightarrow \mu' = \frac{h}{\ell - \ell_0} \approx 0.23$$

3 Corpo con molla su piano e secondo corpo

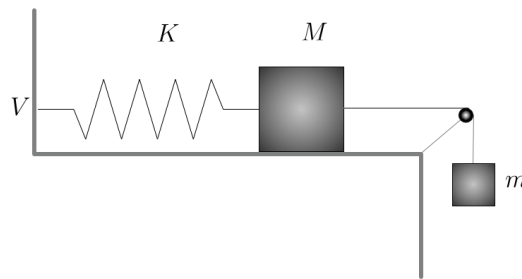
Un corpo di massa $M = 2.5 \text{ kg}$ poggia su un piano liscio. Da un lato è attaccato ad un vincolo fisso V tramite una molla di costante elastica $K = 75 \text{ N/m}$ e lunghezza a riposo $\ell_0 = 21 \text{ cm}$. Dall'altro lato è attaccato per mezzo di un filo inestensibile ideale, tramite una carrucola ideale, ad un peso di massa $m = 1.4 \text{ kg}$ che è soggetto alla forza di gravità. All'istante iniziale il corpo M è mantenuto in quiete applicando un'ulteriore forza che comprime la molla di una lunghezza $\delta = 0.1 \text{ m}$.

Calcolare il valore della pulsazione ω del sistema quando il corpo M viene rilasciato.

Calcolare la distanza massima dal vincolo V raggiunta dal corpo M .

Calcolare la velocità massima v_M raggiunta dal corpo M .

Calcolare il valore minimo T_m e massimo T_M della tensione a cui è soggetto il filo.



Soluzione L'origine della coordinata x sia posta in corrispondenza della posizione del corpo M quando la molla è a riposo.

Equazioni del moto (filo inestensibile $\Rightarrow a_1 = a_2 \equiv a$)

$$ma = mg - T$$

$$Ma = -kx + T$$

$$(m + M) a = -Kx + mg$$

$$\ddot{x} = -\frac{K}{m + M}x + \frac{m}{m + M}g$$

$$\omega^2 = \frac{K}{m + M} \Rightarrow \omega = 4.385 \text{ rad/s}$$

Soluzione equazione omogenea associata

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \Rightarrow x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Soluzione particolare equazione $x = B$

$$0 = -KB + mg \Rightarrow B = \frac{mg}{K}$$

Soluzione generale

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + \frac{mg}{K}$$

Condizioni iniziali:

$$x(0) = -\delta, \quad \dot{x}(0) = 0 \Rightarrow \varphi = 0, \quad A = -\left(\frac{mg}{K} + \delta\right)$$

$$x(t) = -\left(\frac{mg}{K} + \delta\right) \cos \omega t + \frac{mg}{K}$$

Distanza massima dal vincolo

$$d_M = l_0 + \delta + 2\frac{mg}{K} = 67.6 \text{ cm}$$

$$v(t) \equiv \dot{x}(t) = \omega \left(\frac{mg}{K} + \delta\right) \sin \omega t$$

$$v_M = \omega \left(\frac{mg}{K} + \delta\right) = 1.242 \text{ m/s}$$

$$a(t) \equiv \ddot{x}(t) = \omega^2 \left(\frac{mg}{K} + \delta\right) \cos \omega t$$

$$T = m(g - a)$$

$$T_m = m \left(g - \omega^2 \left(\frac{mg}{K} + \delta\right)\right) = 6.11 \text{ N}$$

$$T_M = m \left(g + \omega^2 \left(\frac{mg}{K} + \delta\right)\right) = 21.36 \text{ N}$$