ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE FRA MASSE ESTESE

1. Dimostrazione

Le coordinate cartesiane x, y e z si esprimono in coordinate polari sferiche come

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \quad y = r\sin\theta\sin\varphi \quad z = r\cos\theta$$

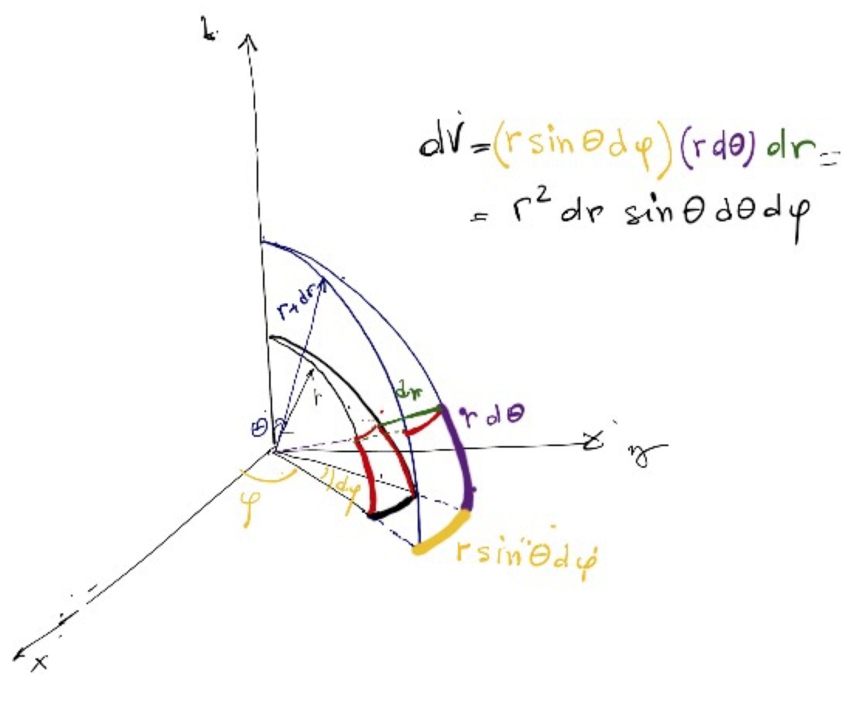
Lo Jacobiano della trasformazione è

$$\mathrm{J} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

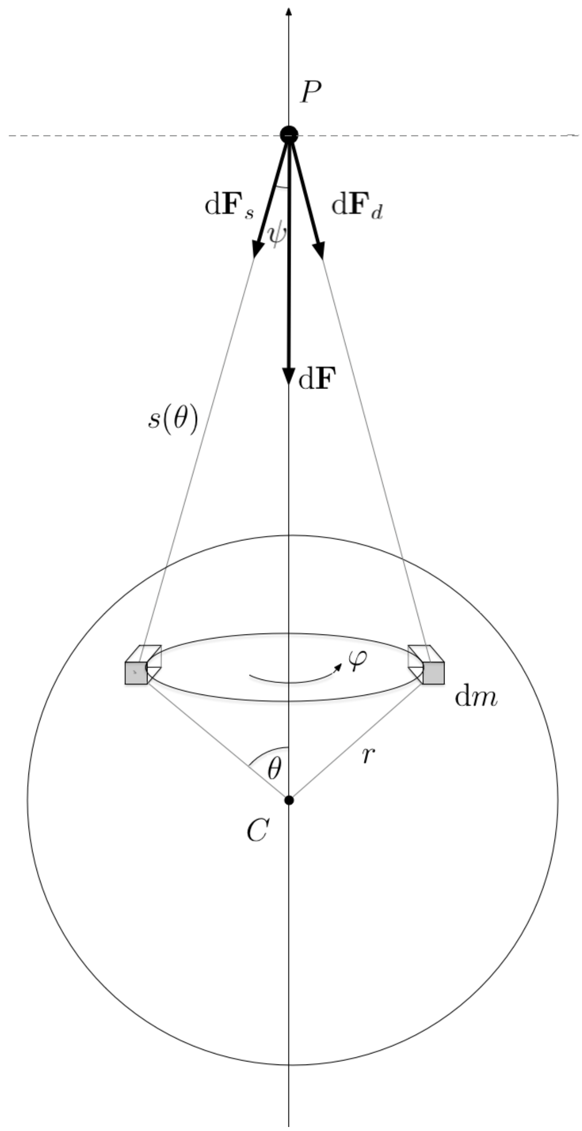
e il suo modulo vale $|\mathrm{J}| = r^2\sin\theta$. e dunque l'elemento infinitesimo di volume in coordinate polari è dato da

$$\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

Graficamente lo si vede nella figura seguente



Il confronto positivo fra la caduta di un grave sulla Terra e la “caduta” della Luna causata dall’attrazione gravitazionale terrestre mostra che la teoria produce il risultato corretto come se tutta la massa dei corpi estesi fosse concentrata in un punto materiale posizionato nel loro centro. Vogliamo ora dimostrare come questo sia vero e non soltanto un’approssimazione.



Facciamo riferimento alla figura qui sopra. Si abbia la Terra che ipotizziamo abbia forma sferica di raggio R e prendiamo un sistema di coordinate con origine O nel suo centro. Un corpo P di massa M sia posizionato sull’asse verticale a distanza z da O. Consideriamo due elementi infinitesimi di massa $\mathrm{d}m = \rho r^2 \mathrm{d}r \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi$ simmetrici rispetto all’asse z. ρ è la densità di massa che per semplicità supponiamo che sia uniforme. Siano r la distanza dei volumetti dal centro, $s(\theta)$ la loro distanza dal punto P. ψ è l'angolo formato dalla semiretta $s(\theta)$ con l'asse verticale. Infine sia φ l'angolo di rotazione intorno all'asse verticale.

Per prima cosa notiamo la simmetria del sistema rispetto ad una rotazione intorno a z. Siccome non vi è nulla che dipende da φ tutte le successive integrazioni su φ daranno semplicemente il valore 2π. Pertanto, attesa questa simmetria, possiamo già rimpiazzare l'elemento infinitesimo di massa con $\mathrm{d}m = 2\pi r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$.

Sul corpo in P i due elementi infinitesimi di massa simmetrici contribuiscono le forze infinitesime $\mathrm{d}\mathbf{F}_d$ e $\mathrm{d}\mathbf{F}_s$ la cui proiezioni su un asse ortogonale a quello verticale sono uguali e contrarie e pertanto si sommano a zero, mentre le loro proiezioni lungo l'asse verticale sono uguali e concordi e dunque si sommano rinforzandosi. Dobbiamo allora calcolare questa componente. Ogni elemento di massa infinitesimo contribuisce lungo l'asse z la forza

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = -\left[\mathcal{G}\frac{M}{s^2(\theta)}\right]\cos\psi\,\mathrm{d}m\,\hat{u}_z$$

La forza totale si otterrà integrando opportunamente. Per far ciò servono alcune relazioni fra le grandezze geometriche che compaiono nella figura. Abbiamo

$$\begin{aligned} z &= r\cos\theta + s\cos\psi \\ 0 &= r\sin\theta - s\sin\psi \end{aligned}$$

Facendo il quadrato di queste due relazioni e sommandole insieme, si ottiene

$$z^2 + s^2 - 2sz\cos\psi = r^2$$

s da cui

$$\cos\psi = \frac{z^2 + s^2 - r^2}{2sz}$$

Le due relazioni precendenti si possono anche riscrivere come

$$\begin{aligned} s\cos\psi &= z - r\cos\theta \\ s\sin\psi &= r\sin\theta \end{aligned}$$

dalle quali si può eliminare ψ quadrandole e sommandole insieme ottenendo

$$s^2 = z^2 + r^2 - 2zr\cos\theta$$

Se differenziamo rispetto a θ quest'ultima relazione, otteniamo

$$2s\mathrm{d}s = 2rz\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

ovvero

$$\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{s}{zr}\mathrm{d}s$$

che sostituiremo nell'elemento infinitesimo di massa.

Ora possiamo calcolare il modulo della forza

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}F &= 2\pi\rho r^2 \mathrm{d}r\,(\sin\theta \mathrm{d}\theta)\left[-\mathcal{G}\frac{M}{s^2}\right]\frac{z^2+s^2-r^2}{2sz} \\
&= 2\pi\rho r^2\left(\frac{s}{zr}\right)\left[-\mathcal{G}\frac{M}{s^2}\right]\frac{z^2+s^2-r^2}{2sz}\mathrm{d}s\mathrm{d}r \\
&= \underbrace{\pi\rho\frac{r}{z^2}\left(-\mathcal{G}M\right)}\frac{z^2-r^2+s^2}{s^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Siamo passati quindi dall'integrazione sulle variabili θ ed r a quella sulle variabili s e r. Il termine sottolineato dalla graffa non dipende da s e, siccome l'ordine di integrazione è arbitrario perché i domini sono normali, integriamo prima su s la frazione a destra.

Per trovare gli estremi di integrazione su s, ricordo che s è funzione di θ: per $\theta = 0$, $s(0) = z - r$ mentre per $\theta = \pi$, $s(\pi) = z + r$, come si evince facilmente dalla figura. Abbiamo allora

$$\int_{z-r}^{z+r}\left[1+\frac{z^2-r^2}{s^2}\right]\mathrm{d}s = 2r + \left(z^2-r^2\right)\left(\frac{1}{z-r}-\frac{1}{z+r}\right) = 4r$$

Resta ora da svolgere l'integrazione su r

$$F = \pi\int_0^R \rho\left[-\mathcal{G}\frac{M}{z^2}\right]4r^2\,\mathrm{d}r = -\frac{\mathcal{G}M}{z^2}\left(\frac{4\pi}{3}\rho R^3\right) = -\frac{\mathcal{G}MM_T}{z^2}$$

dove $M_T = (4/3)\pi\rho R^3$ è la massa della Terra. Da questo risultato si vede che conta solo la distanza z fra il centro della Terra ed il corpo come se tutta la massa della Terra fosse concentrata nel suo centro.