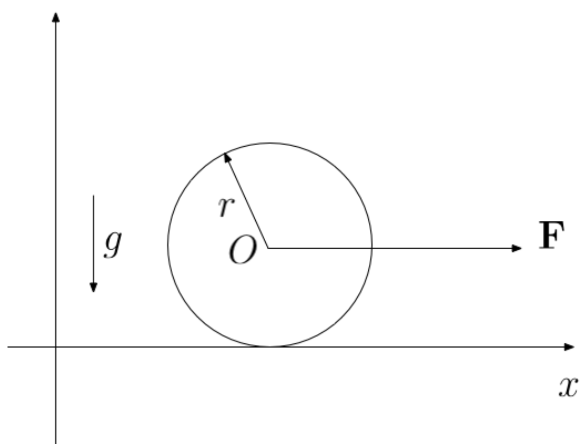
Test Allenamento Corpo Rigido

1 Sfera su piano 1

Un corpo sferico uniforme di massa $m = 5\,\mathrm{kg}$ e raggio $r = 10\,\mathrm{cm}$ rotola senza strisciare nella direzione positiva dell'asse x su un piano scabro orizzontale di coefficiente di attrito statico μ grazie all'azione di una forza $\mathbf{F}$ di valore $F = 24\,\mathrm{N}$ applicata nel suo baricentro O come mostrato in figura. Si calcolino:



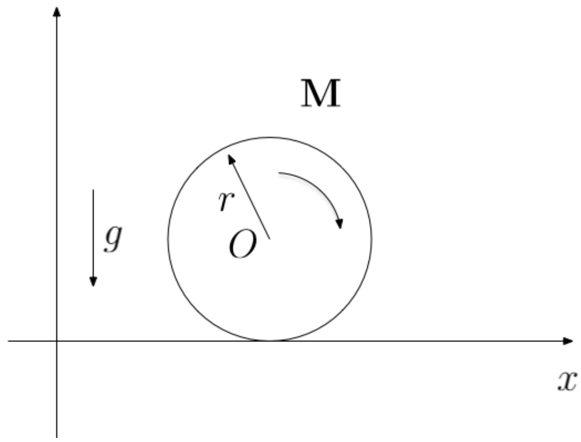
il valore dell'accelerazione a del baricentro in $\mathrm{m/s^2}$;

il valore (in N) della componente orizzontale f della reazione vincolare nel punto di contatto tra sfera e piano e la sua direzione;

il minimo valore del coefficiente di attrito statico μ_m affinché sia possibile il moto in questione.

Se $\mu < \mu_m$, a che tipo di moto è soggetta la sfera?

Successivamente la forza viene sostituita da un motore che applica un momento costante $\mathbf{M}$ di valore $M = 1\,\mathrm{Nm}$ all'asse passante per il baricentro della sfera in modo da farla rotolare nel verso positivo dell'asse come mostrato in figura. Quanto vale ora, in valore e segno Se il coefficiente di attrito statico vale $\mu = 0.22$, qual è il massimo valore M_M del momento per cui si ha puro rotolamento?



Soluzione Per permettere il rotolamento della sfera nella direzione positiva dell'asse x, la componente orizzontale della reazione vincolare f deve essere diretta nel verso negativo dell'asse.

Come polo per il calcolo dei momenti si scelga il baricentro O. Il momento di inerzia della sfera rispetto al baricentro è $I = (2/5)mr^2 = 0.02\,\mathrm{kg/m^2}$.

La componente verticale della reazione vincolare è

$$N = mg$$

. La prima equazione cardine della dinamica porge

$$F - f = ma$$

e la seconda, nel caso di puro rotolamento, porge

$$rf = I\frac{a}{r} = \frac{2}{5}mr^2\frac{a}{r} = \frac{2}{5}mra \Rightarrow f = \frac{2}{5}ma$$

Eliminando f tra queste due si ottiene

$$a = \frac{5}{7}\frac{F}{m} \approx 3.43\,\mathrm{m/s^2}$$

Inoltre,

$$f = \frac{2}{7}F \approx 6.86\,\mathrm{N}$$

Per il puro rotolamento $f \leq \mu mg$, da cui

$$\mu_m = \frac{f}{mg} \approx 0.14$$

Per $\mu < \mu_m$ la sfera striscia e rotola.

Dopo la sostituzione della forza con un momento, la componente orizzontale della reazione vincolare deve essere diretta nel verso positivo dell'asse. Le equazioni della dinamica in questo caso porgono

$$M - rf = I\frac{a}{r}$$

e

$$f = ma$$

da cui si ricava

$$a = \frac{5}{7}\frac{M}{mr}$$

e

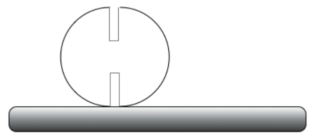
$$f = \frac{M - Ia/r}{r} = \frac{5}{7}\frac{M}{r}$$

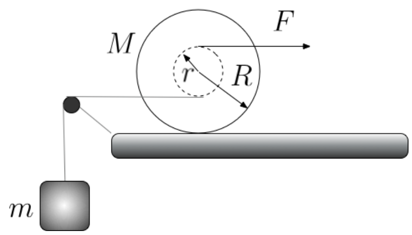
Da $f \leq \mu mg$ si ottiene

$$M_M = \frac{7}{5}\mu mrg \approx 1.51\,\mathrm{Nm}$$

2 Sfera su piano 2

Una sfera di massa $M = 44\,\text{kg}$ e raggio $R = 0.25\,\text{m}$ poggia su un piano orizzontale scabro. Il coefficiente di attrito statico vale $\mu = 0.35$. Una trascurabile scanalatura è praticata nella





sfera intorno alla quale è avvolto un filo inestensibile cui è attaccato un corpo di massa m soggetto all'azione della gravità. Il raggio della scanalatura attorno a cui si avvolge il filo è $r = 11\,\text{cm}$. Alla scanalatura è applicata una forza F verso destra tale per cui si mantiene il sistema in equilibrio statico.

Si calcolino

1 il valore di m in kg per cui si ha equilibrio statico;

2 il valore corrispondente in N della forza applicata F.

Si recide poi il filo cui è attaccata la massa m. La sfera comincia a muoversi sotto l'azione della forza F prima determinata. Si calcoli, nell'ipotesi di puro rotolamento, l'accelerazione del baricentro del sistema a_G.

Soluzione Detta $f = M\mu g$ la reazione vincolare, all'equilibrio si ha:

$$T = mg$$

$$F - mg + f = 0 \qquad Fr - fR + mgr = 0$$

$$m = \frac{M\mu}{2}\left(1 + \frac{R}{r}\right) = 25.2\,\text{kg}$$

$$F = \frac{f}{2r}(R - r) = \frac{M\mu g}{2r}(R - r) = 96.14\,\text{N}$$

Dopo il taglio del filo: Momento di inerzia rispetto al centro di massa G

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

Equazioni cardinali

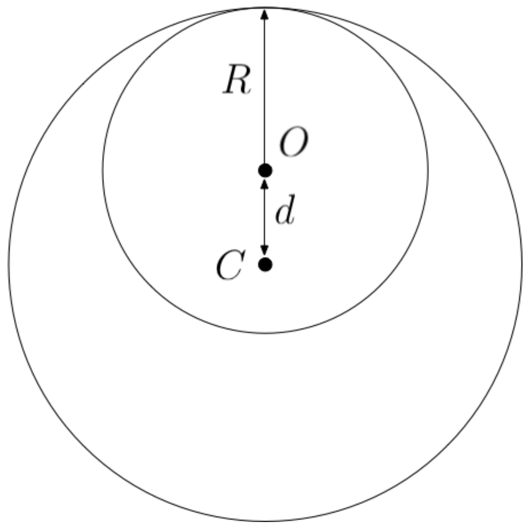
$$F + f = Ma_G$$

$$Fr - fR = I\alpha = I\frac{a_G}{R} = \frac{2}{5}MRa_G$$

$$F\frac{R + r}{\left(1 + \frac{2}{5}\right)R} = Ma_G \qquad a_G = \frac{5F}{7M}\left(1 + \frac{r}{R}\right) = 2.247\,\mathrm{m/s^2}$$

3 Disco entro anello

Un disco rigido di massa $m_d = 47\,\mathrm{kg}$ e raggio $R = 28\,\mathrm{cm}$ è disposto orizzontalmente e può ruotare liberamente intorno ad un asse verticale passante per il punto C a distanza $d = 12\,\mathrm{cm}$ dal suo centro. Il bordo del disco striscia su un anello di raggio $r = R + d$ il cui centro coincide con C e di massa $m_d = 32\,\mathrm{kg}$. Questo, tramite un opportuno dispositivo non raffigurato, può ruotare liberamente intorno allo stesso asse.



Quando si ha moto relativo tra disco e anello, si sviluppa una forza di attrito radente $F = 7.5\,\mathrm{N}$, tangente all'anello. Non vi sono altre forze agenti sul sistema. Inizialmente il sistema è fermo. per $t = 0$, viene applicato un momento motore $M = 8.3\,\mathrm{Nm}$ all'asse e viene messo in rotazione il disco mentre l'anello è tenuto fermo. Si calcoli la velocità angolare ω_1 raggiunta dal disco all'istante $t_1 = 12\,\mathrm{s}$.

Trascorso questo intervallo di tempo, viene sbloccato l'anello che può ora essere trascinato in rotazione dal disco. Si calcoli la velocità angolare ω_2 dell'anello all'istante $t_2 = 17\,\mathrm{s}$.

Per $t = t_2$ viene rimosso il motore e si osserva che all'istante t_3 disco ed anello hanno la stessa velocità angolare ω_3. Si calcoli l'energia cinetica del sistema nel suo complesso a questo istante t_3.

Si calcoli in valore assoluto il lavoro delle forze di attrito fra $t = 0$ e $t = t_3$.

Soluzione Il momento di inerzia del disco rispetto al centro di rotazione è

$$I_d = \frac{1}{2} m_d R^2 + m_d d^2 = 2.519\,\mathrm{kg\,m^2}$$

mentre quello dell'anello vale

$$I_a = m_a r^2 = 5.12\,\mathrm{kg\,m^2}$$

Sul disco, con anello fermo, si esercita un momento meccanico tale che

$$I_d\alpha = M - (R+d)F = M - rF$$

che provoca un'accelerazione angolare de disco

$$\alpha = \frac{M - rF}{I_d} = 2.104\,\mathrm{rad/s^2}$$

Al tempo t_1 la velocità angolare del disco risulta

$$\omega_1 = \alpha t_1 = 25.25\,\mathrm{rad/s}$$

Quando l'anello viene sbloccato, la sua accelerazione angolare α_2 è data da

$$I_a\alpha_2 = rF$$

e quindi

$$\alpha_2 = \frac{rF}{I_a} = 0.586\,\mathrm{rad/s^2}$$

All'istante t_2 la velocità angolare dell'anello vale

$$\omega_2 = \alpha_2\,(t_2 - t_1) = 2.93\,\mathrm{rad/s}$$

mentre il disco ha raggiunto la velocità angolare

$$\omega_1' = \omega_1 + \alpha\,(t_2 - t_1) = 35.765\,\mathrm{rad/s}$$

Dopo la rimozione del motore, il sistema è isolato e si conserva il momento angolare

$$I_a\omega_2 + I_d\omega_1' = (I_a + I_d)\,\omega_3 \Rightarrow \omega_3 = 13.758\,\mathrm{rad/s}$$

L'energia cinetica vale a questo istante vale

$$E_k = \frac{1}{2}\,(I_a + I_d)\,\omega_3^2 = 722.98\,\mathrm{J}$$

e il lavoro delle forze di attrito viene compiuto finché le velocità di rotazione del disco e dell'anello sono diverse, cioè fino a $t = t_2$. Il suo valore assoluto è

$$W_{\mathrm{att}} = \frac{1}{2}\alpha_1 t_2^2 rF = 912\,\mathrm{J}$$