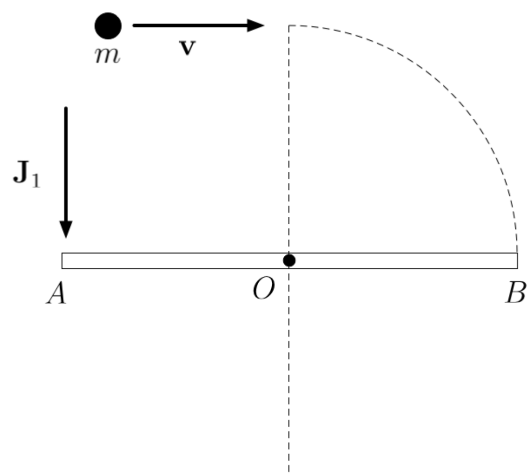
1 Asta con forza impulsive

Un'asta di massa $M = 5\,\mathrm{kg}$ e lunga $l = 75\,\mathrm{cm}$ può ruotare in un piano verticale attorno all'asse orizzontale passante per il suo centro O. L'asse esercita un momento di attrito



costante di valore $M_a = 0.37\,\mathrm{Nm}$ che si oppone alla rotazione dell'asta. All'inizio la sbarra è ferma in posizione orizzontale quando al suo estremo A viene impartito per mezzo di una martellata un impulso $\mathbf{J}_1$ diretto verso il basso. In seguito a tale colpo, l'asta inizia a ruotare con velocità angolare iniziale $\omega_0 = 10.8\,\mathrm{rad/s}$.

Quando l'asta raggiunge la posizione verticale, un piccolo corpo di massa $m = 175\,\mathrm{g}$ e velocità $v = 16.3\,\mathrm{m/s}$ la urta nell'estremo B. La velocità del corpo è diretta lungo l'orizzontale. In seguito all'urto, il corpo resta attaccato al bordo dell'asta.

Si calcolino:

1) il valore dell'impulso iniziale J_1 in $\mathrm{kg\,m/s}$;

2) la velocità angolare ω_1 in rad/s della sbarra appena prima dell'urto col corpo m;

3) la velocità angolare ω_2 in rad/s del sistema subito dopo l'urto;

4) il valore assoluto dell'impulso J_2 impartito dall'asse dell'asta.

Suggerimento: Si consideri la variazione dell'energia meccanica per valutare il lavoro dei momenti di attrito.

Soluzione Impulso di momento angolare iniziale:

$$I = \frac{1}{12} M l^2 = 0.2344\,\mathrm{kg\,m^2}$$

$$L_0 = I\omega_0 = \frac{l}{2} J_1 \Rightarrow J_1 = 6.75\,\mathrm{kg\,m/s}$$

Lavoro momenti di attrito = variazione di energia meccanica. La forza di gravità non interviene in quanto il baricentro dell'asta resta fisso.

$$\frac{1}{2} I \left(\omega_1^2 - \omega_0^2\right) = -M_a \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{\pi M_a}{I} \Rightarrow \omega_1 = 10.57\,\mathrm{rad/s}$$

Nell'urto il proiettile impartisce un impulso di momento angolare $\Delta L = mvl/2$

$$mv\frac{l}{2} - I\omega_1 = \left[I + m\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]\omega_2$$

$$I + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = 0.259\,\mathrm{kg\,m^2}$$

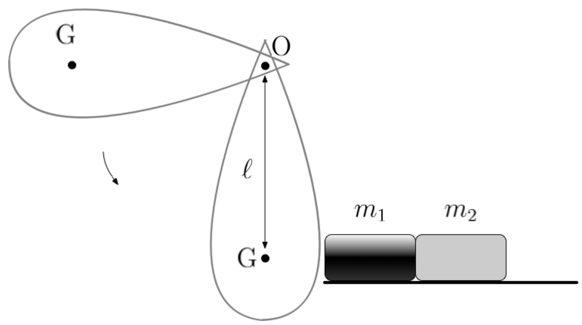
$$\omega_2 = 5.43\,\mathrm{rad/s}$$

Infine, il corpo m si muove inizialmente con velocità $v_2 = l\omega_2/2$

$$|J_2| = m|\left(\frac{\omega_2 l}{2}\right) - v| = 3.21\,\mathrm{kg\,m/s}$$

2 Clava rotante

Un corpo rigido è imperniato nel punto O intorno al quale può ruotare liberamente. La sua massa è $M = 20\,\mathrm{kg}$ e la distanza fra il punto O ed il suo centro di massa G è ℓ. Inizialmente



questo corpo viene ruotato fino a che la congiungente OG è orizzontale e in quiete. Poi viene rilasciato e ruota liberamente intorno ad O fino a che colpisce il sistema di due corpi di masse $m_1 = 4\,\mathrm{kg}$ e $m_2 = 2\,\mathrm{kg}$ rispettivamente posti su un piano scabro. Nell'urto il corpo si arresta mentre i due corpi, che sono in contatto fra loro, cominciano a muoversi di moto traslatorio. I due corpi hanno coefficienti di attrito dinamico rispetto al piano pari a $\mu_{1=0.22}$ e $\mu_2 = 0.56$. Trascorso l'intervallo di tempo $\Delta t = 2.5\,\mathrm{s}$ i corpi si arrestano. Si calcolino il valore della forza F che si esercita tra le superficie di contatto dei corpi durante il loro moto, la loro accelerazione a, la velocità iniziale del sistema dei due corpi v_0 e la velocità angolare del corpo rigido al momento dell'urto ω.

Soluzione Equazioni del moto dei due corpi in contatto: l'accelerazione è la stessa

$$m_1 a = -F - \mu_1 m_1 g \qquad m_2 a = F - \mu_2 m_2 g$$

Eliminando a

$$F = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\mu_2 - \mu_1)\, g = 4.447\,\mathrm{N}$$

Risolvendo per a

$$a = -g \frac{m_1 \mu_1 + m_2 \mu_2}{m_1 + m_2} = -3.27\,\mathrm{m/s^2}$$

$$v(\Delta t) = 0 \Rightarrow v_0 + a \Delta t = 0 \Rightarrow v_0 = |a| \Delta t = 8.175\,\mathrm{m/s}$$

Coservazione momento angolare (impulsivo) ed energia meccanica

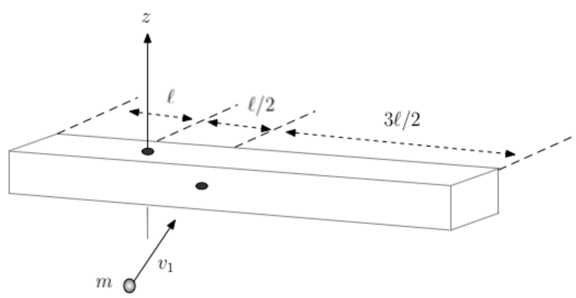
$$I\omega = (m_1 + m_2)\, v_0 \ell$$

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = M g \ell$$

$$\omega = \frac{2Mg}{(m_1 + m_2)\, v_0} = 8\,\mathrm{rad/s}$$

3 Asta imperniata

Una sottile asta rigida di massa $M = 3\,\mathrm{kg}$ e lunga $L = 3\ell$, con $\ell = 45\,\mathrm{cm}$, è imperniata ad un asse verticale z passante a distanza ℓ da un suo estremo attorno a cui può ruotare, come in figura.



Un proiettile di massa $m = 22\,\mathrm{g}$ e velocità $v_1 = 300\,\mathrm{m/s}$ colpisce l'asta nel suo centro e rimbalza all'indietro con velocità $v_2 = 50\,\mathrm{m/s}$. Il moto dell'asta e del proiettile avviene nello stesso piano orizzontale. Si calcolino la frequenza angolare dell'asta appena dopo l'urto ω_0, l'impulso J subito dall'asta al momento dell'urto e l'impulso subito dall'asse J_z.

Alla rotazione dell'asta si oppone un momento torsionale della forma $-k\theta$, se θ è l'angolo di rotazione rispetto alla posizione di equilibrio dell'asta al momento dell'urto. Si osserva che l'asta dopo l'urto compie piccole oscillazioni di periodo $T = 2.45\,\mathrm{s}$. Si calcoli in gradi l'ampiezza massima di oscillazione dell'asta θ_m.

Soluzione Bisogna calcolare il momento di inerzia dell'asta rispetto all'asse di rotazione utilizzando il teorema di Huygens-Steiner.

$$I = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = Ml^2 = 0.6075\,\mathrm{kg\,m^2}$$

Conservazione del momento angolare:

$$mv_1\frac{l}{2} = I\omega - mv_2\frac{l}{2}$$

da cui

$$\omega = \frac{ml}{2I}\left(v_1 + v_2\right) = 2.85\,\mathrm{rad/s}$$

e

$$J = M\omega_0\frac{l}{2} - m\left(v_1 + v_2\right) = -5.775\,\mathrm{N\,s}$$

$$J_z = -J = 5.775\,\mathrm{N\,s}$$

Conservazione energia:

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}k\theta_m^2$$

da cui

$$\theta_m = \omega_0\sqrt{\frac{I}{k}}$$

e, ricordando che $T = 2\pi\sqrt{I/k}$, si ha

$$\theta_m = \frac{\omega T}{2\pi} = 1.112\,\mathrm{rad} = 63.7^\circ$$