1 Urti e fenomeni impulsivi

1.1 Esercizio 1

Un disco di raggio $R = 35\ cm$ e massa $M_{disco} = 1.3\ kg$ è libero di ruotare senza attrito nel piano orizzontale attorno al proprio asse. Inizialmente fermo, il disco viene posto in moto tramite un motore che eroga una potenza $P_{mot} = 55\ W$ e un momento torcente $\vec{M}_{mot}$ $17Nm$ fino ad arrivare a regime, e poi scollegato. Un'asta di lunghezza $L_{asta} = 20\ cm$ e massa $M_{asta} =\ 300\ g$, originariamente lanciata con una forza $\vec{F}$ diretta verso l'asse del disco, viene a collidere con il bordo esterno del disco, su cui vi rimane conficcata per un suo estremo. Successivamente, nel corso della rotazione del sistema, l'asta urta con il suo estremo libero un corpo di dimensioni trascurabili di massa $m = 150\ g$, inizialmente fermo e appoggiato sul piano. Il corpo scivola quindi su di un tratto di piano orizzontale scabro, con coefficiente di attrito dinamico $\mu_D = 0.3$, sino ad arrestarsi dopo aver compiuto una distanza $D = 27\ cm$.

Determinare:

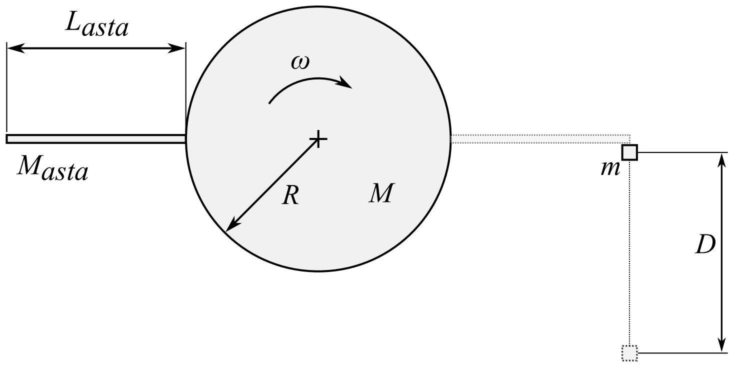
a) La velocità angolare del disco dopo essere stato posto in rotazione del motore e prima che l'asta vi si conficchi

b) la velocità angolare del sistema disco+asta prima dell'urto con il corpo puntiforme

c) la velocità del corpo puntiforme nell'istante subito successivo all'urto

d) la velocità angolare del sistema disco+asta dopo l'urto con il corpo puntiforme

e) l'energia cinetica dissipata dal sistema asta+disco nell'urto con il corpo puntiforme



---

a) Il disco è messo in moto da un motore che eroga una potenza che è legata alla velocità angolare e al momento delle forze esterne applicate attraverso la relazione (conseguenza del teorema delle forze vive):

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{M}^{(E)} \cdot \vec{\omega} \tag{1}$$

Pertanto il modulo della velocità angolare del disco, una volta posto in moto dal motore, risulta pari a:

$$\omega_0 = \frac{P_{mot}}{M_{mot}} = 3.24\ rad/s \tag{2}$$

b) Il momento angolare a cui il disco è soggetto prima dell'urto con l'asta è quindi dato dalla relazione:

$$\vec{L}_0 = I_0 \vec{\omega}_0 \tag{3}$$

Dove il momento d'inerzia I_0 è semplicemente dato dal momento d'inerzia del disco rispetto il proprio asse.

$$I_0 = \frac{1}{2} M_{disco} R^2 \tag{4}$$

Nell'impatto con l'asta si conserva il momento angolare del sistema. Non si conserva invece la quantità di moto. Non si conserva inoltre l'energia cinetica: l'urto è totalmente anelastico in quanto l'asta rimane conficcata nel disco.

L'unica forza esterna a carattere impulsivo presente nel sistema è quella dovuta al vincolo dell'asse di rotazione del disco. Scegliendo appositamente la posizione del perno a supporto del disco come polo O, il momento delle forze esterne impulsive non apporta alcun contributo alla seconda equazione cardinale della dinamica, e pertanto vale:

$$\Delta \vec{L} = \vec{L}_1 - \vec{L}_0 = 0 \tag{5}$$

Si calcola il momento d'inerzia del sistema dopo l'aggiunta dell'asta, attraverso l'applicazione del teorema di Huygens-Steiner:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} M_{disco} R^2 + \frac{1}{12} M_{asta} L_{asta}^2 + M_{asta} (R + \frac{L}{2})^2 && (6) \\ &= \frac{1}{2} M_{disco} R^2 + \frac{1}{3} M_{asta} L_{asta}^2 + M_{asta} R^2 + M_{asta} R L_{asta} = 0.1414\, kgm^2 && (7) \end{aligned}$$

E si descrive la conservazione del momento angolare:

$$\begin{aligned} \vec{L}_1 &= \vec{L}_0 && (8) \\ I_1 \vec{\omega}_1 &= I_0 \vec{\omega}_0 && (9) \\ \omega_1 &= \frac{I_0 \omega_0}{I_1} = && (10) \\ &= 1.822\, rad/s && (11) \end{aligned}$$

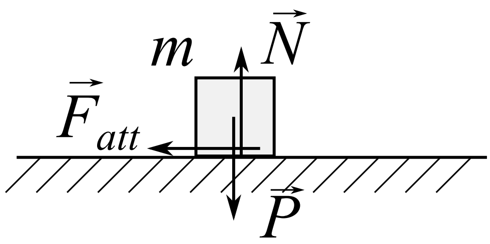
c) L'impatto con il blocco è nuovamente un urto nel quale non si conserva la quantità di moto ma si conserva il momento angolare (per le stesse ragioni viste in precedenza). Non è però fornita alcuna informazione riguardo la possibilità che ci si trovi di fronte ad un urto elastico, quindi nulla si può concludere sull'eventuale conservazione dell'energia cinetica del sistema.

La conservazione del momento angolare, sempre riferita rispetto al centro di rotazione del disco, porta a scrivere:

$$\begin{aligned} \vec{L}_2 &= \vec{L}_1 && (12) \\ I_1 \vec{\omega}_2 + \vec{r} \times m\vec{v} &= I_1 \vec{\omega}_1 && (13) \end{aligned}$$

Dove è stata chiaramente inclusa la componente di momento angolare del corpo puntiforme, messo in moto dall'urto con l'asta. Non è nota a priori la velocità $\vec{v}$ del blocco subito dopo l'urto, ma è possibile inferirla dal percorso compiuto in presenza di attrito dinamico.

Il blocco è infatti soggetto alla forza peso $\vec{P}$, alla reazione vincolare del piano $\vec{N}$, e alla forza di attrito dinamico $\vec{F}_{att}$:



L'unica forza a cui è soggetto il punto materiale nella direzione del moto è la forza di attrito dinamico, che essendo non conservativa contribuisce appunto a dissipare l'energia cinetica disponibile subito dopo l'urto con l'asta.

$$\begin{aligned} E_f &= E_i - |\Delta E| && (14) \\ 0 &= \frac{1}{2} m v^2 - F_{att} D && (15) \end{aligned}$$

Pertanto:

$$v = \sqrt{\frac{2F_{att}D}{m}} = \sqrt{2\mu_D g D} = 1.26\, m/s \tag{16}$$

d) Tornando alla applicazione della conservazione del momento angolare è possibile scrivere:

$$\begin{aligned}
I_1\vec{\omega}_2 + \vec{r} \times m\vec{v} &= I_1\vec{\omega}_1 && (17)\\
\omega_2 &= \frac{I_1\omega_1 - rmv}{I_1} = && (18)\\
&= \frac{I_1\omega_1 - (R + L_{asta})mv}{I_1} = && (19)\\
&= \omega_1 - \frac{(R + L_{asta})mv}{I_1} = && (20)\\
&= 1.087\, rad/s && (21)
\end{aligned}$$

e) Nell'urto il sistema (inteso come sistema che comprende disco, asta e massa puntiforme) dissipa energia cinetica. Non si tratta quindi di un urto elastico.

L'energia dissipata è semplicemente data dalla differenza delle energie cinetiche tra gli instanti subito prima e dopo l'urto.

$$\begin{aligned}
E_k^2 &= E_k^1 - |\Delta E| && (22)\\
\Delta E &= E_k^1 - E_k^2 = && (23)\\
&= \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 - (\frac{1}{2}I_1\omega_2^2 + \frac{1}{2}mv^2) = && (24)\\
&= \frac{1}{2}\left(I_1\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right) - mv^2\right) = && (25)\\
&= 3.21 \cdot 10^{-2} J = && (26)\\
&= 32.1\, mJ && (27)
\end{aligned}$$

1.2 Esercizio 2

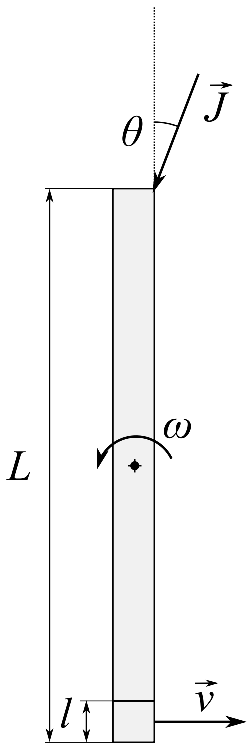
Un'asta lunga $L = 1.2\ m$ di materiale omogeneo di densità lineare $\lambda = 3.12\ kg/m$ è imperniata nel suo centro di massa e libera di ruotare nel piano verticale ($g = 9.81\ m/s^2$), senza attriti rispetto al perno. Inizialmente l'asta si trova in quiete e orientata come in figura. Una martellata, prodotta con un angolo $\theta = 18°$ rispetto la verticale colpisce l'estremo superiore dell'asta fornendo un impulso di modulo $J = 78\ Ns$. Nell'urto si verifica inoltre la completa frattura di una piccola porzione di materiale, di dimensione $l = L/20$, dall'estremo opposto dell'asta. Questo frammento è successivamente osservato muoversi di moto puramente traslatorio con velocità $v = 4.7\ m/s$, orientata perpendicolarmente rispetto l'asta come rappresentato in figura.

a) Assumendo che la martellata si sviluppi in un tempo $\Delta t = 0.012\ s$, determinare la forza media esercitata nell'urto.

b) Calcolare il momento d'inerzia dell'asta dopo il distacco del frammento, calutato rispetto il perno

c) Determinare la velocità angolare dell'asta subito dopo l'urto l'avvenuto distacco del frammento

d) Calcolare la velocità del centro di massa al successivo passaggio lungo l'asse verticale



---

a) La martellata fornisce un impulso $\vec{J}$ non nullo al sistema come risultato della presenza di una forza esterna a carattere impulsivo. L'impulso è definito come:

$$\vec{J} = \int_{t_0}^{t_0+\delta t} \vec{F}^{(E)} dt \tag{28}$$

Volendo calcolare la forza media nell'intervallo di tempo dell'impatto (considerata quindi costante durante il tempo δt), si può riscrivere:

$$\vec{J} = \int_{t_0}^{t_0+\delta t} \vec{F}^{(E)}_{media} dt = \vec{F}^{(E)}_{media} \delta t \tag{29}$$

Pertanto si ricava semplicemente:

$$F^{(E)}_{media} = \frac{J}{\delta t} = 6.5\ kN \tag{30}$$

Dove chiaramente direzione e verso di $F^{(E)}_{media}$ sono concordi a quelle dell'impulso $\vec{J}$.

b) Nell'urto si sviluppano forze esterne a carattere impulsivo. L'impulso $\vec{J}$ è rappresentativo dell'apporto della martellata, ma non è da trascurare la presenza del vincolo (il piolo), che impedisce al sistema di muoversi liberamente. Su di esso si sviluppa una ulteriore forza a carattere impulsivo, più complessa da descrivere data la nostra conoscenza a priori del sistema.

Il sistema quindi non conserva la quantità di moto. Inoltre, non si conserva neppure il momento angolare del sistema, in quanto non è possibile ricondursi a calcolare il momento angolare del sistema rispetto ad un polo relativamente al quale poter considerare nullo il contributo di entrambi i momenti delle forze esterne impulsive.

La scelta più conveniente, date le informazioni a disposizione, è di far coincidere il polo con la posizione del vincolo, annullando quindi il contributo del momento delle forze esterne di reazione, ignote a priori.

Rispetto questa scelta possiamo scrivere:

$$\vec{L}^i_O = 0 \tag{31}$$

$$\vec{L}^f_O = I^{asta\ residua}_O \vec{\omega} + \vec{r} \times m\vec{v} \tag{32}$$

E la differenza tra i momenti angolari iniziale e finale è semplicemente data dal contributo dei momenti delle forze impulsive rispetto il polo.

$$\Delta\vec{L} = \vec{L}^f_O - \vec{L}^i_O = \vec{R}_O \times \int_0^{\delta t} \vec{F}^{(E)} dt = \vec{R}_O \times \vec{J} \tag{33}$$

E' necessario ricavare il momento d'inerzia della porzione residua di asta dopo il distacco del frammento, ricordando che l'asta sarà libera di ruotare solo attorno all'asse del piolo. Per fare questo è possibile applicare la definizione risolvendo il noto integrale, o utilizzare il teorema di Huygens-Steiner. Nel secondo caso, si può ricondurre il momento d'inerzia al calcolo di I dell'asta "corta" (di lunghezza $L - l$, e massa $M - m$) rispetto al proprio centro di massa; a questo viene sommato il contributo della massa dell'asta corta $(M-m)$ moltiplicato per il quadrato della distanza D tra il centro di massa dell'asta corta e il piolo.

$$\begin{aligned}
I^{asta\ residua}_O &= I^{asta\ corta}_{CM} + M^{asta\ corta} D^2 = && (34)\\
&= \frac{1}{12}(M-m)(L-l)^2 + (M-m)D^2 = && (35)\\
&= \frac{1}{12}(M-m)(L-l)^2 + (M-m)\left(\frac{l}{2}\right)^2 = && (36)\\
&= \frac{1}{12}\lambda(L-l)^3 + \lambda(L-l)\left(\frac{l}{2}\right)^2 = && (37)\\
&= \frac{1}{4}\lambda(L-l)\left(\frac{1}{3}(L-l)^2 + l^2\right) = && (38)\\
&= 3.88 \cdot 10^{-1}\ kg\, m^2 && (39)\\
& && (40)
\end{aligned}$$

c) Rispetto all'asse del piolo (ad esempio posto come asse z) è quindi possibile ricondursi alla forma:

$$I^{asta\ residua}_O \omega - rmv = RJ \sin\theta \tag{41}$$

Dove r è la distanza tra il polo e il baricentro del frammento (di lunghezza finita l), mentre R è la distanza tra il polo e il punto di applicazione dell'impulso J.

$$I_O^{asta\ residua}\omega + \frac{L-l}{2}\lambda l v = \frac{L}{2}J\sin\theta \tag{42}$$

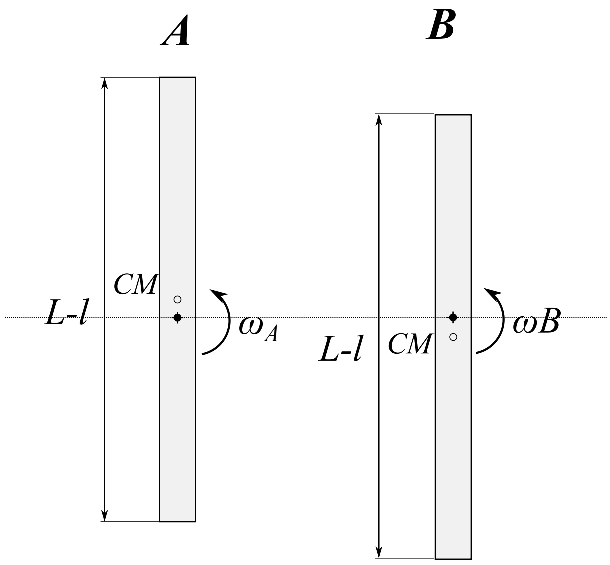
$$\omega = \frac{LJ\sin\theta - (L-l)\lambda l v}{2I_O^{asta\ residua}} \tag{43}$$

$$= 35.9\ rad/s \tag{44}$$

$$\tag{45}$$

d) Il centro di massa dell'asta dopo l'urto non si viene più chiaramente a trovare in una posizione coincidente con quella del piolo, pertanto il CM compie un moto circolare attorno al polo O. Essendo l'asta libera di ruotare nel piano verticale, il moto non sarà però circolare uniforme, in quanto l'asta è soggetta all'accelerazione di gravità.

Si può però studiare il moto dell'asta dopo l'urto considerando la conservazione dell'energia meccanica totale, non essendo presenti forze non conservative.



Considerate le due configurazioni A e B rappresentate in figura è immediato scrivere l'energia meccanica totale del sistema nei due casi:

$$E_A = \frac{1}{2}I_O^{asta\ residua}\omega_A^2 + (M-m)gh_A \tag{46}$$

$$E_B = \frac{1}{2}I_O^{asta\ residua}\omega_B^2 + (M-m)gh_B \tag{47}$$

$$\tag{48}$$

Da queste è possibile ricondursi alla velocità angolare dell'asta al passaggio per la configurazione B:

$$\frac{1}{2}I_O^{asta\ residua}\omega_B^2 + (M-m)gh_B = \frac{1}{2}I_O^{asta\ residua}\omega_A^2 + (M-m)gh_A \tag{49}$$

$$\omega_B = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}I_O^{asta\ residua}\omega_A^2 + (M-m)g(h_A-h_B)}{\frac{1}{2}I_O^{asta\ residua}}} = \tag{50}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{1}{2}I_O^{asta\ residua}\omega_A^2 + \lambda(L-l)gl}{\frac{1}{2}I_O^{asta\ residua}}} = \tag{51}$$

$$= 36.1\ rad/s \tag{52}$$

$$\tag{53}$$

E infine, ci si riconduce alla velocità del centro di massa in B:

$$v_{\underset{B}{CM}} = \frac{l}{2}\omega_B = \tag{54}$$

$$= 1.08\ m/s \tag{55}$$

$$\tag{56}$$

1.3 Esercizio 3

Con una stecca da biliardo si esercita un impulso $\vec{J_0}$ di modulo $J_0 = 0.9\ Ns$ su di una biglia inizialmente ferma sul piano di un biliardo di dimensioni $L = 1.2\ m$ e $H = 2.24\ m$ (approssimato per semplicità come completamente liscio quindi senza attriti tra biglie e piano). La biglia A viene quindi ad urtare una sponda con un angolo di incidenza $\theta_i = 25°$ rispetto la normale alla sponda. Tra la biglia e la sponda vi è attrito. Si genera quindi una forza esterna a carattere impulsivo. Si può osservare che nell'urto la componente normale della velocità $\vec{v}_\perp$ si conserva in modulo, invertendone chiaramente il verso nel corso dell'urto. Nel proseguire il suo moto, la biglia A urta quindi una seconda biglia B, di eguale massa $m_A = m_B = 300\ g$. Dopo l'urto, la biglia B finisce in buca (in C), mentre la biglia A prosegue parallelamente all'asse y.

Si considerino le biglie alla stregua di punti materiali, e si considerino le seguenti coordinate iniziali per le posizioni delle due biglie:

$$\begin{cases} x_A &= 32\ cm \\ y_A &= 1.38\ m \end{cases} \qquad \begin{cases} x_B &= 85\ cm \\ y_B &= 1.54\ m \end{cases} \tag{57}$$

Determinare:

a) Attraverso considerazioni geometriche, calcolare l'angolo rispetto la normale alla sponda con cui la biglia A prosegue il suo moto dopo l'urto con la sponda (e prima dell'urto con B).

b) La componente x del vettore impulso $\vec{J_A}$ agente sulla biglia A nell'urto con la sponda.

c) Attraverso considerazioni geometriche, calcolare l'angolo con cui la biglia B si muove verso la buca C a fronte dell'urto subito con la biglia A. Si calcoli l'angolo rispetto la direzione normale alla sponda, come nel punto precedente.

d) Il modulo della velocità della biglia B quando entra in buca

e) A parità di velocità iniziale della biglia A, si vuole ora invece colpire quante più sponde possibili con un solo colpo. Assumendo che ad ogni urto si mantenga costante l'impulso trasferito alla sponda, quantificare l'energia cinetica dissipata in un urto con la sponda.

f) Calcolare quindi il massimo numero (valore intero) di sponde che è possibile colpire prima che la biglia A arresti il suo moto. (Non si consideri alcun urto con la biglia B per questa domanda)

---

a) La velocità iniziale della biglia A è chiaramente dettata dall'impulso $\vec{J_0}$ della forza esterna ad essa applicato. Partendo da ferma, la quantità di moto della biglia A dopo il colpo con la stecca è semplicemente:

$$\Delta\vec{p}_0 = \vec{J_0} \tag{58}$$

$$\vec{v}_0 = \frac{1}{m_A}\vec{J_0} \tag{59}$$

Non conservandosi l'energia cinetica nell'urto con la parete (urto con un vincolo esterno non liscio), non è concesso ipotizzare che l'angolo di uscita sia identico all'angolo di entrata.

Per di più, affinché la biglia A possa colpire la biglia B, è necessario (sotto l'approssimazione di biglie come punti materiali) che la direzione del moto della biglia all'uscita dell'urto con la sponda sia tale da passare per la posizione di B.

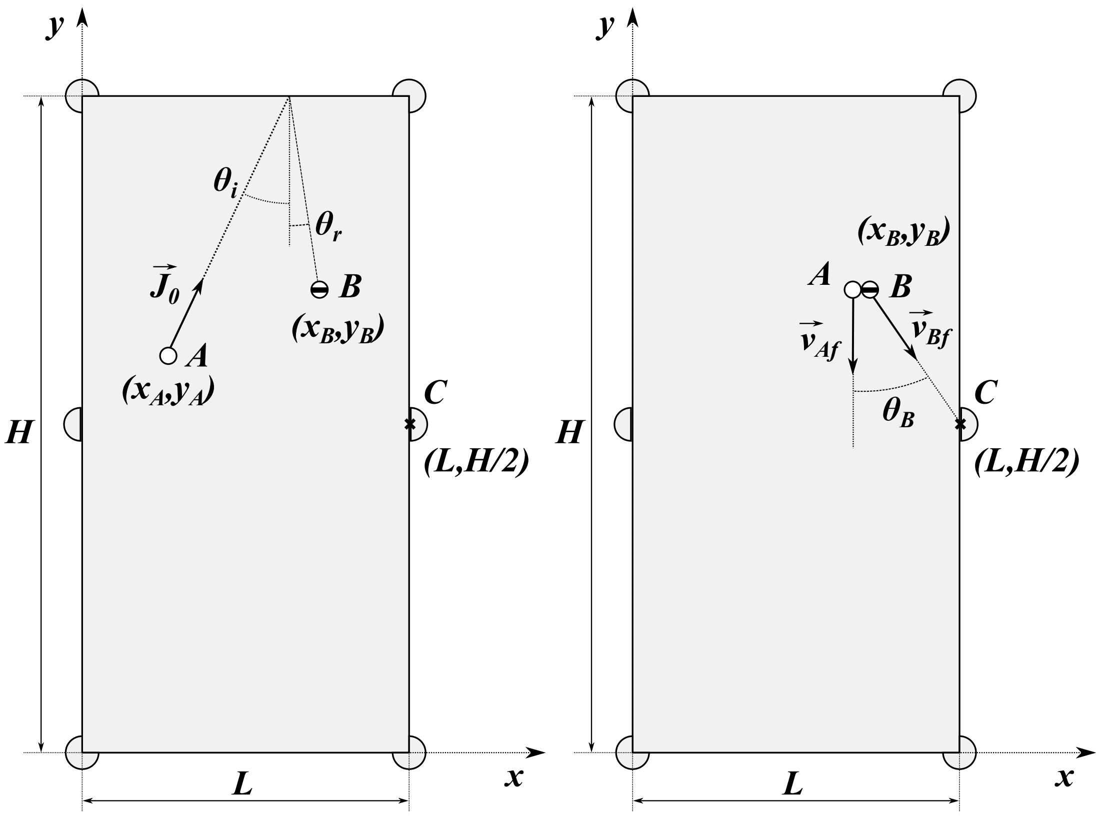
Questo implica di poter fare semplici considerazioni geometriche sull'angolo θ_r con il quale la biglia viene "riflessa" rispetto la sponda.

$$h_A = H - y_A \tag{60}$$

$$h_B = H - y_B \tag{61}$$

$$l_A = h_A \tan\theta_i \tag{62}$$

$$l_B = (x_B - x_A) - l_A \tag{63}$$



Da cui:

$$\tan\theta_r = \frac{l_B}{h_B} \tag{64}$$

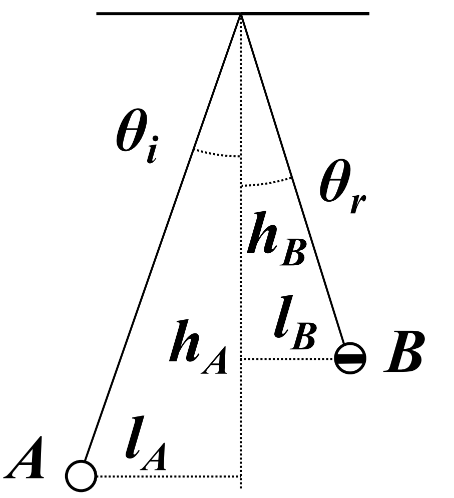
Pertanto:

$$\theta_r = \arctan\frac{l_B}{h_B} = 10.4° \tag{65}$$

b) La velocità della biglia dopo l'urto con la sponda sarà data da:

$$\vec{v}_A = v_{Ax}\hat{i} + v_{Ay}\hat{j} = \tag{66}$$

$$= v_{Ax}\hat{i} - v_{0y}\hat{j} \tag{67}$$



Noto l'angolo θ_r e una delle due componenti del vettore $\vec{v}_A$, ci si può ricondurre all'altra.

$$\begin{cases} v_{Ay} & = -v_{0y} = -v_0 \cos\theta_i \\ v_{Ax} & = \tan\theta_r v_{Ay} = \frac{l_B}{h_B}|v_{Ay}| = \frac{l_B}{h_B} v_{0y} = \\ & = \frac{l_B}{h_B} v_0 \cos\theta_i \end{cases} \tag{68}$$

E' quindi possibile ricavare l'impulso $\vec{J}_A$ trasferito nell'urto alla biglia:

$$\vec{J}_A = \Delta\vec{p}_A = m_A(\vec{v}_A - \vec{v}_0) = \tag{69}$$

$$= m_A(v_{Ax} - v_{0x})\hat{i} + m_A(v_{Ay} - v_{0y})\hat{j} = \tag{70}$$

$$= m_A(v_{Ax} - v_{0x})\hat{i} + m_A(-2v_{0y})\hat{j} = \tag{71}$$

$$= m_A v_0 \left((\frac{l_B}{h_B} \cos\theta_i - \sin\theta_i)\hat{i} - 2\cos\theta_i \hat{j} \right) = \tag{72}$$

$$= J_0 \left((\frac{l_B}{h_B} \cos\theta_i - \sin\theta_i)\hat{i} + (-2\cos\theta_i)\hat{j} \right) \tag{73}$$

La componente lungo x e' pari a:

$$J_{Ax} = J_0(\frac{l_B}{h_B} \cos\theta_i - \sin\theta_i) = -0.23\ Ns \tag{74}$$

Chiaramente la componente x dell'impulso è orientata in verso alla componente x della velocità.

c) Nel problema è noto θ_B da considerazioni puramente geometriche, dato che B è descritto andare in buca.

$$\tan\theta_B = \frac{L - x_B}{y_B - H/2} \tag{75}$$

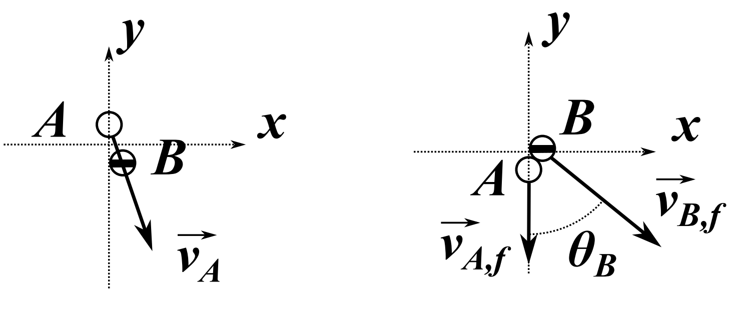
Quindi:

$$\theta_B = \arctan\frac{L - x_B}{y_B - H/2} = 39.8° \tag{76}$$

d) Tra A e B si sviluppa un urto in assenza di forze esterne impulsive, nel quale quindi si conserva la quantità di moto:

$$\Delta\vec{p} = 0 \tag{77}$$

$$\tag{78}$$



Il problema si descrive con il sistema generico di 2 equazioni in 3 incognite ($v_{A,f}$, $v_{B,f}$ e θ_B):

$$\begin{cases} \cancel{m_A} v_{Ax} & = +\cancel{m_B} v_{B,f} \sin\theta_B \\ -\cancel{m_A}|v_{Ay}| & = -\cancel{m_A} v_{A,f} - \cancel{m_B} v_{B,f} \cos\theta_B \end{cases} \tag{79}$$

Qui sono state utilizzate le notazioni v_{Ax} e v_{Ay} per rappresentare le componenti x e y della velocita' di A prima dell'urto. Ricordandosi che non vi e' attrito tra piano e biglie, la velocita' $\vec{v}_A$ della biglia prima dell'urto e' esattamente la velocita' calcolata dopo l'urto con la sponda.

Per questa valgono le relazioni ricavate in precedenza:

$$\begin{cases} v_{Ay} & = -v_0 \cos\theta_i \\ v_{Ax} & = \frac{l_B}{h_B} v_0 \cos\theta_i \end{cases} \tag{80}$$

Si è scelto quindi di utilizzare il valore assoluto per rendere più esplicito il segno attribuito alla componente v_{Ay} nel sistema di riferimento utilizzato.

Nel problema è anche noto θ_B, come calcolato in precedenza. Questo semplifica la descrizione del problema, rendendolo un sistema di 2 equazioni in 2 incognite ($v_{A,f}$ e $v_{B,f}$).

Il sistema porta quindi alla soluzione:

$$\begin{cases} v_{B,f} & = \frac{v_{Ax}}{\sin\theta_B} = 0.783\ m/s \\ v_{A,f} & = |v_{Ay}| - v_{B,f}\cos\theta_B = \\ & = |v_{Ay}| - \frac{v_{Ax}}{\tan\theta_B} = \\ & = 2.12\ m/s \end{cases} \tag{81}$$

e) L'assunzione della domanda prevede che ad ogni urto tra biglia e sponda si sviluppi un impulso pari a J_A. Con ogni impatto con la sponda quindi la biglia varia la sua quantità di moto esattamente di $\Delta\vec{p} = \vec{J}_A$, dissipando parte dell'energia cinetica iniziale.

$$\Delta v_A = v_0 - v_A = \tag{82}$$

$$= v_0 - \sqrt{v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2} = 0.235\, m/s \tag{83}$$

Ogni urto produce quindi un decremento dell'energia cinetica, calando la velocita' di A da v_A^i a $v_A^f = v_A^i - \Delta v_A$:

$$\Delta E_k = E_k^i - E_k^f = \tag{84}$$

$$= \frac{1}{2} m_A {v_A^i}^2 - \frac{1}{2} m_A (v_A^i - \Delta v_A)^2 = \tag{85}$$

$$= m_A v_A^i \Delta v_A - \frac{1}{2} m_A \Delta v_A^2 = 0.203\, J \tag{86}$$

f) Affinché la biglia si fermi dopo N impatti va verificata la condizione che dopo lo N-esimo urto l'energia cinetica della biglia si annulli. A tal fine è sufficiente imporre la seguente condizione:

$$E_k^i - N\Delta E_k \leq 0 \tag{87}$$

$$N \geq \frac{E_k^i}{\Delta E_k} = 6.63 \longrightarrow 7 \tag{88}$$

$$\tag{89}$$

Questo significa che dopo 6 urti con la sponda il sistema ha ancora una piccola quantità di energia cinetica residua, e solo con il settimo urto la biglia si arresta completamente.

1.4 Esercizio 4

Nel corso di una partita di baseball viene lanciata una palla veloce che raggiunge la posizione del battitore viaggiando a $h = 1\ m$ di altezza con una velocità di modulo $v_0 = 40\ m/s$, la cui direzione è ben approssimabile come esattamente parallela al terreno. Il battitore colpisce la palla con la mazza, approssimabile ad un'asta di lunghezza $L = 85\ cm$ e di massa $M = 1.8\ kg$ e impugnata a $l = 35\ cm$ da un suo estremo, realizzando un fuori-campo: la palla esce dal terreno di gioco, lungo $L_{campo} = 122\ m$, passando appena al di sopra di una staccionata di altezza $H_{fence} = 4\ m$.

Prima dell'impatto con la pallina il battitore imprime alla mazza un moto di pura traslazione verso la pallina lungo l'orizzontale con velocità di modulo $v_{CM} = 18\ m/s$.

Dopo l'urto alla pallina viene impressa una velocità orientata con un angolo $\theta = 30°$ rispetto l'orizzontale, come in figura.

Dopo l'impatto le mani del battitore esercitano un vincolo (per semplicità considerato totalmente rigido) al moto della mazza, come fosse un perno attorno al quale la mazza è vincolata a ruotare. Dopo l'urto la mazza ruota quindi nel piano orizzontale, senza traslare.

Il sistema è schematizzato nelle figure seguenti:

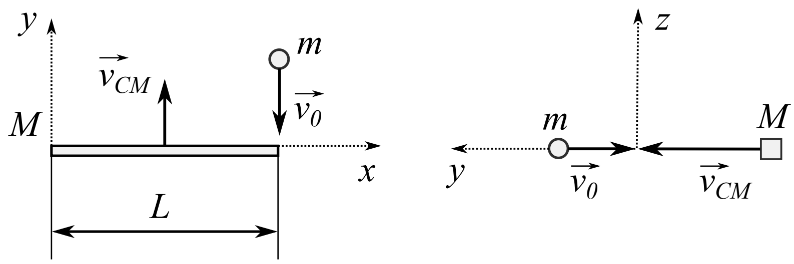


Figure 1: Condizione sistema prima dell'urto

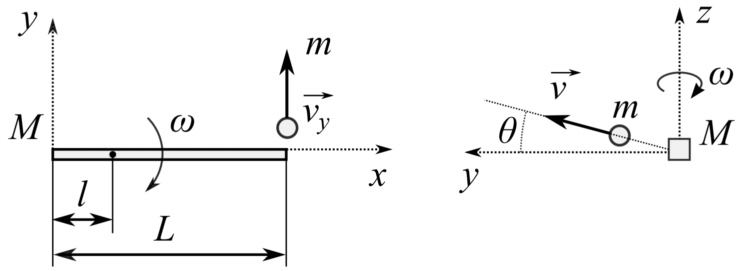


Figure 2: Condizione sistema dopo l'urto

Considerando la palla da baseball alla stregua di un punto materiale di massa $m = 142\ g$, determinare:

a) La velocità della pallina subito dopo l'urto (si consideri nullo l'attrito viscoso della palla con l'aria nel suo moto verso il fuoricampo)

b) Il modulo dell'impulso agente sulla pallina durante l'urto

c) Il momento d'inerzia della mazza calcolato rispetto al perno (le mani del battitore)

d) La velocità angolare della mazza subito dopo l'urto

---

a) Per conoscere la velocità della palla da baseball dopo l'urto possiamo fare una considerazione puramente dettata dalla cinematica. Dopo l'urto la palla compie un moto parabolico sotto l'azione della forza peso, partendo dalla posizione di battuta e finendo per passare subito al di sopra della staccionata a fondo campo. La descrizione della legge oraria del moto è chiaramente quella di un moto uniformemente accelerato lungo l'asse z, e rettilineo uniforme rispetto l'asse y:

$$\begin{cases} y(t) & = y_0 + v_{0,y}t \\ z(t) & = z_0 + v_{0,z}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{90}$$

$$\begin{cases} y(t) & = v\cos\theta t \\ z(t) & = h + v\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{91}$$

Possiamo imporre le condizioni di passaggio al limite della staccionata:

$$\begin{cases} L_{campo} & = v\cos\theta t' \\ H_{fence} & = h + v\sin\theta t' - \frac{1}{2}gt'^2 \end{cases} \tag{92}$$

$$\begin{cases} t' & = \frac{L_{campo}}{v\cos\theta} \\ H_{fence} & = h + v\sin\theta\frac{L_{campo}}{v\cos\theta} - \frac{1}{2}g(\frac{L_{campo}}{v\cos\theta})^2 \end{cases} \tag{93}$$

Da cui:

$$v = \sqrt{\frac{gL_{campo}^2}{2\cos^2\theta\,(L\tan\theta + h - H)}} = \tag{94}$$

$$= 38\ m/s \tag{95}$$

b) Dal teorema dell'impulso arriviamo a poter semplicemente scrivere che:

$$\vec{J} = \Delta\vec{p} = \tag{96}$$

$$= \vec{p}_f - \vec{p}_i = \tag{97}$$

$$= m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \tag{98}$$

$$= mv(\cos\theta\,\hat{j} + \sin\theta\,\hat{k}) - mv_0(-\hat{j})) = \tag{99}$$

$$= m(v\cos\theta + v_0)\,\hat{j} + mv\sin\theta\,\hat{k} \tag{100}$$

Dove si notano sia la componente di impulso lungo l'asse y di provenienza della pallina, che la componente lungo z.

Il modulo è semplicemente dato da:

$$J = \sqrt{J_y^2 + J_z^2} = \tag{101}$$

$$= m\sqrt{v_0^2 + v^2 + 2v_0 v\cos\theta} = \tag{102}$$

$$= 10.7\ Ns \tag{103}$$

$$\tag{104}$$

c) E' importante considerare che la mazza sarà libera di ruotare solo nel piano xy.

Possiamo calcolare il momento d'inerzia dell'asta rispetto a C applicando il teorema di Huygens-Steiner:

$$I_C = \frac{1}{12}ML^2 + M(\frac{L}{2} - l)^2 = 0.118\,kgm^2 \tag{105}$$

d) Nell'urto tra mazza e pallina si conserva il momento angolare. Per evitare l'insorgere di contributi di momenti dovuti da forze impulsive esterne, è possibile riferire lo studio del sistema ad un polo posizionato sul punto di contatto C tra le mani del battitore e la mazza (il "perno" in questo esercizio). Rispetto questo polo otteniamo:

$$\Delta\vec{L}_C = 0 \tag{106}$$

I momenti angolari delle due condizioni prima e dopo l'urto devono essere scritte con cautela.

$$\vec{L}_C^i = \vec{r} \times m\vec{v}_0 + \vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM} \tag{107}$$

$$\vec{L}_C^f = \vec{r} \times m\vec{v} + I_C\vec{\omega} \tag{108}$$

$$\tag{109}$$

Possiamo quindi riscrivere il momento angolare rispetto l'asse z come:

$$\vec{L}_{C,z}^i = \vec{r} \times m\vec{v}_0 + \vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM} = \tag{110}$$

$$= \left[-m(L-l)v_0 + M(\frac{L}{2} - l)v_{CM}\right]\ \hat{k} \tag{111}$$

$$\vec{L}_{C,z}^f = \vec{r} \times m\vec{v} + I_C\vec{\omega} = \tag{112}$$

$$= [m(L-l)v\cos\theta - I_C\omega]\ \hat{k} \tag{113}$$

Di conseguenza, la conservazione del momento angolare rispetto C permette di scrivere:

$$-m(L-l)v_0 + M(\frac{L}{2} - l)v_{CM} = m(L-l)v\cos\theta - I_C\omega \tag{114}$$

E quindi di giungere alla velocità angolare dell'asta dopo la battuta:

$$\omega = \frac{m(L-l)(v_0 + v\cos\theta) - M(\frac{L}{2} - l)v_{CM}}{I_C} = \tag{115}$$

$$= 23.2\ rad/s \tag{116}$$

Chiaramente questa velocità angolare è tutto fuorché realistica, date le numerose approssimazioni e semplificazioni incluse nel problema.

1.5 Esercizio 5

Un'asta sottile di massa $M = 5.7\,kg$ e di lunghezza $L = 1.78\,m$, è libera di ruotare (senza attrito) nel piano orizzontale attorno ad un'asse posto nel suo baricentro. Inizialmente in quiete, l'asta viene colpita in un suo estremo da un proiettile di massa $m = 235\,g$, che è in moto con velocità $\vec{v}$ di modulo $7.6\,m/s$, orizzontale e perpendicolare all'asta, e che vi rimane incollato dopo l'impatto.

Determinare:

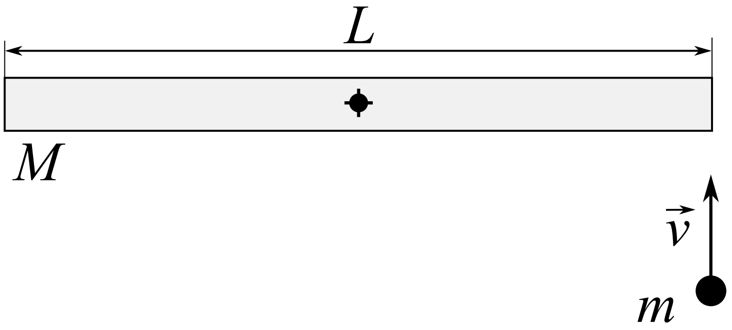
a) Il momento d'inerzia del sistema asta+proiettile rispetto al vincolo

b) La velocità angolare del sistema dopo l'urto

c) Il modulo dell'impulso fornito dal vincolo al sistema

d) Ad un dato istante, successivo all'urto precedentemente descritto, si rimuove l'asse senza l'azione di forze impulsive. Determinare il momento d'inerzia del sistema asta+proiettile rispetto al centro di massa

e) E determinare il modulo della velocità relativa v' della massa m rispetto al centro di massa del sistema dopo la rimozione del vincolo.



---

a) Nell'urto non si conserva la quantità di moto a causa della presenza del vincolo, nè l'energia cinetica trattandosi di un urto totalmente anelastico.

Si conserva però il momento angolare ponendo il polo in corrispondenza all'asse, rispetto il quale il braccio delle forze esterne impulsive (reazione del vincolo) è nullo.

$$\Delta\vec{L} = 0 \tag{117}$$

Risolvendo per un appropriato sistema di riferimento otteniamo:

$$\frac{L}{2}mv = I\omega \tag{118}$$

Dove

$$I = \left(\frac{1}{12}ML^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2\right) = \tag{119}$$

$$= \frac{1}{12}\left(M + 3m\right)L^2 = 1.691\,kgm^2 \tag{120}$$

b) Di conseguenza:

$$\omega = 6\frac{mv}{(M+3m)\,L} = \tag{121}$$

$$= 0.94\,rad/s \tag{122}$$

c) L'impulso del sistema equivale a:

$$\vec{J} = \int_0^{\Delta t} \vec{F}^{(E)} dt = \Delta \vec{p} \tag{123}$$

Dove quindi è necessario calcolare la quantità di moto del sistema negli istanti prima e dopo l'urto. Per fare questo è conveniente definire la velocità del centro di massa nei due istanti.

Prima dell'urto il sistema, di massa $M + m$ è caratterizzato dalla velocità del centro di massa:

$$v_{CM}^{i} = \frac{mv}{M+m} \tag{124}$$

Dopo l'urto il sistema inizia a ruotare con velocità angolare ω. La velocita' del centro di massa dopo l'urto e' quindi pari a:

$$v_{CM}^{f} = \frac{m\omega \frac{L}{2}}{M+m} \tag{125}$$

Di conseguenza, dato che $\vec{p}_i$ e $\vec{p}_f$ sono entrambi orientati lungo la stessa direttrice della velocita' iniziale, si può scrivere il modulo di $\vec{J}$ come:

$$J = m\left(\omega\frac{L}{2} - v\right) = -1.59\ Ns \tag{126}$$

Dove il segno negativo informa semplicemente del fatto che l'impulso è chiaramente orientato in verso opposto alla nostra scelta del sistema di riferimento operata qui implicitamente, e cioè definendo positivo il verso concorde a $\vec{v}$.

Il modulo del vettore $\vec{J}$ è chiaramente una quantità intrinsecamente positiva, e quindi:

$$|\vec{J}| = 1.59\ Ns \tag{127}$$

d) Nella rimozione dell'asse non agiscono forze impulsive esterne, quindi si conservano sia la quantità di moto del sistema che il momento angolare (rispetto a qualsiasi polo).

Il sistema prima della rimozione dell'asse compie un moto di pura rotazione nel piano orizzontale con velocità angolare ω. Dopo la rimozione del vincolo il sistema inizia un moto roto-traslatorio più complesso: il centro di massa, prima della rimozione del vincolo caratterizzato da una velocità tangenziale v'_{CM} prosegue nel suo moto rettilineo uniforme con questa stessa velocita'; l'asta continua a ruotare attorno al centro di massa con velocità angolare ω', a priori non nota.

$$\Delta \vec{p} = 0 \tag{128}$$

$$\Delta \vec{L} = 0 \tag{129}$$

Detta d la distanza tra il nuovo centro di massa del sistema (asta + massa) e il baricentro della sola asta, il momento d'inerzia rispetto il CM si puo' quindi scrivere come:

$$I' = \left(\frac{1}{12}ML^2 + Md^2\right) + m\left(\frac{L}{2} - d\right)^2 \tag{130}$$

Dove d e' semplicemente dato da:

$$d = \frac{m\frac{L}{2}}{M+m} \tag{131}$$

Quindi:

$$I' = \left(\frac{1}{12}ML^2 + Md^2\right) + m\left(\frac{L}{2} - d\right)^2 \tag{132}$$

$$= 1.684\, kgm^2 \tag{133}$$

e) Possiamo quindi scrivere, scelto arbitrariamente come polo la posizione in cui si trovava il vincolo, e detta d la distanza tra questo e il centro di massa del sistema:

$$(M+m)v_{CM} = (M+m)v'_{CM} \tag{134}$$
$$I\omega = (M+m)v_{CM}d + I'\omega' \tag{135}$$

Dove:

$$v'_{CM} = v_{CM} = \frac{m\omega\frac{L}{2}}{M+m} \tag{136}$$
$$\tag{137}$$

Da queste si può infine ricavare la nuova velocità angolare del sistema:

$$\omega' = \frac{I\omega - (M+m)v_{CM}d}{I'} = \tag{138}$$
$$= \omega\frac{I-(M+m)d^2}{I'} \tag{139}$$
$$\tag{140}$$

Dove è possibile notare che la velocità angolare di rotazione del sistema si conserva, avendo sfilato il vincolo senza l'azione di forze impulsive esterne.

$$\omega' = \omega \tag{141}$$

La velocità v' di m calcolata rispetto al centro di massa in moto sarà quindi semplicemente dovuta alla rotazione attorno al centro di massa.

$$v' = \omega'(L/2-d) = \tag{142}$$
$$= \omega\frac{I-(M+m)d^2}{I'}(L/2-d) = \tag{143}$$
$$= \omega(L/2-d) = \tag{144}$$
$$= 0.803\ m/s \tag{145}$$