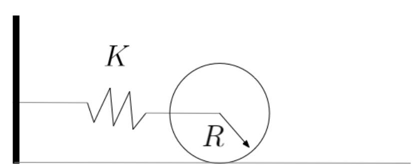
Pool Compitino 1

29 aprile 2021

Esercizi corpoRigido

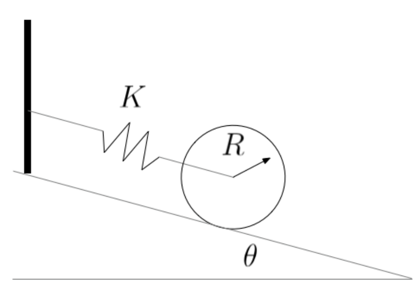
1 Ruota incernierata con molla *Corpo rigido e dinamica sistemi*

Una ruota sottile piena (assimilabile ad un disco) ha massa $m = 2\,\mathrm{kg}$ e raggio $R = 71.2\,\mathrm{cm}$. Il suo centro è connesso ad una parete fissa tramite una molla di costante elastica $K = 100\,\mathrm{N/m}$ e lunghezza a riposo $\ell_0 = 100$ cm. La ruota rotola senza strisciare. Si determini il valore della pulsazione ω_0 del moto della ruota.



Poi, la ruota viene messa in moto allungando la molla di una quantità $x_0 = \alpha\ell_0$ con $\alpha = 0.05$ e rilasciandola da ferma. Quale è il massimo valore x_M di allungamento della molla affinchè il moto resti di puro rotolamento se il coefficiente di attrito statico fra la ruota e il piano vale $\mu_s = 0.22$? In base alle condizioni iniziali a quale tipo di moto sottosta la ruota?

Successivamente, la ruota viene poggiata su un piano inclinato di un angolo $\theta = 15°$ rispetto all'orizzontale. Quanto vale in questo caso la pulsazione del moto del sistema ω_0'?



Quanto vale la posizione di equilibrio $\tilde{x}$? Nell'ipotesi di puro rotolamento, quanto vale l'escursione massima Δx se la ruota viene messa in movimento con velocità nulla con la molla in condizioni di riposo?

Soluzione Si prenda come origine della coordinata x la proiezione del centro della ruota con la mossa a riposo. Per applicare la seconda equazione cardinale della dinamica scelgo come polo il punto di contatto fra ruota e piano. Il momento di inerzia rispetto a questo polo vale

$$I = \frac{3}{2}mR^2 = 1.517\,\mathrm{kg\,m^2}$$

Il moto di puro rotolamento comporta che $\ddot{x} = -\alpha R$

$$I\alpha = KxR \Rightarrow \ddot{x} + \left(\frac{KR^2}{I}\right)x = 0$$

da cui

$$\omega_0^2 = \left(\frac{KR^2}{I}\right) \Rightarrow \omega_0 = 5.77\,\mathrm{rad/s}$$

Per avere puro rotolamento si ha la condizione

$$Kx_M \leq \mu_s mg \Rightarrow x_M \leq \frac{\mu_s mg}{K} = 0.043\,\mathrm{m}$$

Se l'allungamento iniziale è $\alpha\ell_0 = 0.05\,\mathrm{cm}$, la ruota striscia e rotola.

Quando la ruota è sul piano inclinato, la seconda equazione cardinale della dinamica si scrive, sempre prendendo come polo il punto di contatto e scegliendo l'asse x lungo il pinao inclinato

$$\ddot{x} + \left(\frac{KR^2}{I}\right)x - mgR\sin\theta = 0$$

L'azione della forza di gravità è solo quella di spostare il punto di equilibrio da $x = 0$ a

$$\tilde{x} = \frac{mg\sin\theta}{K} \approx 0.051\,\mathrm{m}$$

che è la nuova posizione di equilibrio, ma la pulsazione propria resta la stessa

$$\omega_0' = \omega_0$$

Date le condizioni iniziali, l'equazione del moto della molla è

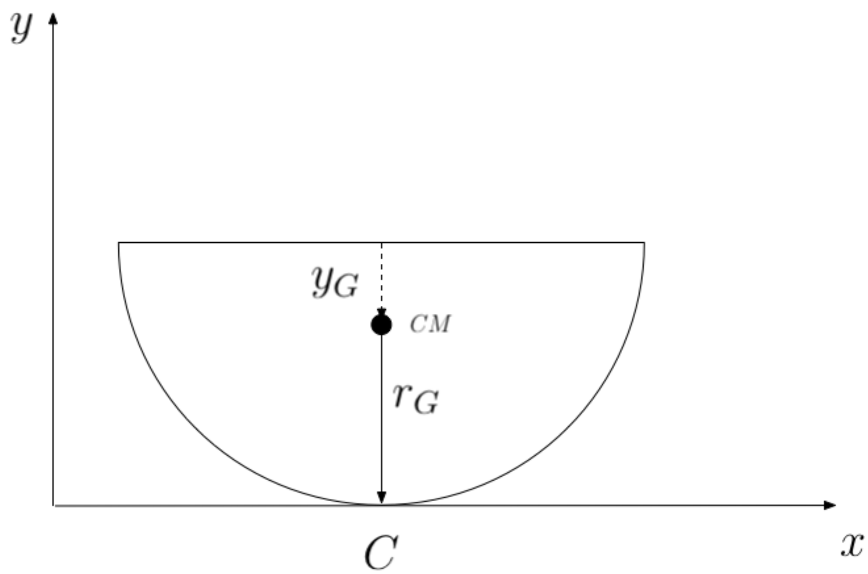
$$x(t) = \tilde{x}\left(1 - \cos\omega_0' t\right)$$

e l'escursione della molla è

$$\Delta x = 2\tilde{x} = 10.2\,\mathrm{cm}$$

2 Semidisco oscillante *Corpo rigido*

Un semidisco di raggio $R = 35\,\text{cm}$, uniforme con densità superficiale di massa $\sigma = 26\,\text{kg/m}^2$ poggia su un piano orizzontale come mostrato in figura. Si calcolino:



1- il valore della coordinata del baricentro r_G rispetto al punto di contatto C;

2- il valore del momento di inerzia rispetto al baricentro I_G

3- il valore della pulsazione ω delle piccole oscillazioni intorno ad un asse passante per il punto di contatto C e ortogonale al piano del disco.

NOTA BENE: conviene calcolare la posizione del baricentro y_G col semidisco appoggiato col diametro sul piano.

Soluzione Detta m la massa del disco, si ha

$$y_G = \frac{1}{m}\int_0^R\int_0^\pi \underbrace{(r\sin\theta)}_{y}\underbrace{\sigma r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}_{\mathrm{d}m} = \frac{4}{3\pi}R \approx 14.85\,\text{cm}$$

$$r_G = R - y_g = 20.15\,\text{cm}$$

Momento di inerzia rispetto al baricentro

$$
\begin{aligned}
I_G &= \int_0^R \int_0^\pi \left[\underbrace{(r\cos\theta)^2}_{(x-x_G)^2} + \underbrace{(r\sin\theta - y_G)^2}_{(y-y_G)^2} \right] \mathrm{d}m \\
&= \sigma \int_0^R \int_0^\pi \left(r^2 + y_G^2 - 2y_G r \sin\theta \right) r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta = m \left(\frac{R^2}{2} - y_G^2 \right) = 0.196\,\mathrm{kg\,m^2}
\end{aligned}
$$

Momento di inerzia rispetto al punto di contatto

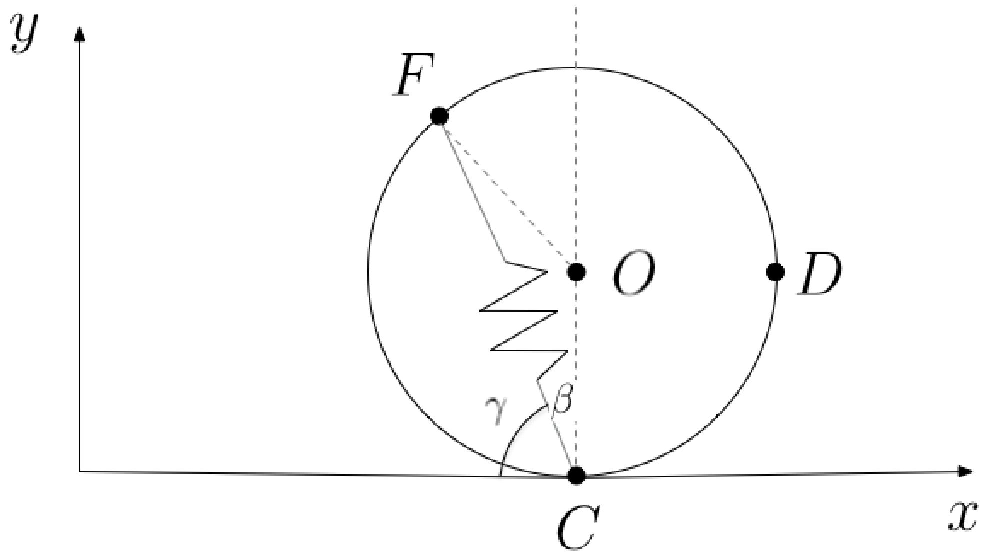
$$
I_C = I_G + m r_G^2 = m R^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi} \right) = 0.3991\,\mathrm{kg\,m^2}
$$

Equazione cardinale

$$
I_C \ddot{\theta} = -m g r_G \sin\theta \Rightarrow \omega^2 = \frac{m g r_G}{I_C} \Rightarrow \omega = 4.98\,\mathrm{rad/s}
$$

3 Ruota con molla *Corpo rigido*

Un disco omogeneo di raggio $R = 25\,\mathrm{cm}$ e massa $M = 1\,\mathrm{kg}$ è vincolato a ruotare per un asse passante per il suo centro O ortogonale alla superficie del disco stesso. Il vincolo è scabro ed esercita un momento frenante M_f. Il disco poggia su un piano orizzontale liscio. Tra



il punto di appoggio C e il punto F sulla superficie del disco è fissata una molla ideale, di lunghezza a riposo nulla e massa trascurabile, di costante elastica $K = 3\,\mathrm{N/m}$. Il segmento $\overline{FC}$, di lunghezza ℓ, forma un angolo $\gamma = 75°$ con l'asse x ($\gamma + \beta = 90°$).

Il disco, quando viene lasciato libero di muoversi, comincia a ruotare con accelerazione angolare $\alpha = 1.6\,\mathrm{rad/s^2}$.

Si calcolino:

1- il valore del momento frenante esercitato dal vincolo in O;

2- il valore iniziale della reazione vincolare totale sul disco;

3- il valore della velocità angolare del disco quando il punto di ancoraggio della molla al bordo del disco si è portato da F in D.

Soluzione La lunghezza iniziale della molla è

$$\ell = 2R \sin\gamma$$

Il momento di inerzia del disco rispetto ad un asse passante per il centro O vale

$$I_O = \frac{1}{2}MR^2$$

Il momento della forza elastica rispetto al polo O è

$$M_{el} = K\ell R \sin(\pi - \beta) = K\ell R \sin\beta = K\ell R \cos\gamma = 2KR^2 \sin\gamma \cos\gamma = KR^2 \sin 2\gamma$$

La seconda equazione cardinale della dinamica porge

$$KR^2 \sin 2\gamma - M_f = I_O \alpha$$

da cui

$$M_f = KR^2 \sin 2\gamma - I_O \alpha = 4.375 \times 10^{-2}\,\mathrm{N\,m}$$

Siccome il baricentro del disco resta fermo a causa dei vincoli, $M\mathbf{a}_{\mathrm{CM}} = 0$ e, dunque, detta $\mathbf{R}$ la reazione vincolare, proiettando lungo i due assi coordinati

$$\begin{aligned} R_x + K\ell\cos\gamma &= 0 \\ R_y - K\ell\sin\gamma - Mg &= 0 \end{aligned}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \left[(K\ell)^2 + (Mg)^2 + 2MgK\ell\sin\gamma\right]^{1/2} = 11.2\,\mathrm{N}$$

Infine, la conservazione dell'energia porge

$$\frac{1}{2}K\ell^2 = \frac{1}{2}I_O\omega^2 + \frac{1}{2}K\left(\sqrt{2}R\right)^2 + M_f\left(\gamma + \frac{\pi}{2}\right)$$

da cui

$$\omega = \left[\frac{-2KR^2\cos 2\gamma - M_f\,(2\gamma + \pi)}{I_O}\right]^{1/2} = 1.53\,\mathrm{rad/s}$$

4 Pendolo composto *Corpo rigido*

La pendola di un orologio si può considerare come un pendolo composto di massa $m = 2\,\mathrm{Kg}$ e di momento di inerzia rispetto al baricentro $I_G = 0.5\,\mathrm{kg\,m^2}$. La distanza del baricentro dall'asse di rotazione vale $d = 0.5\,\mathrm{m}$. In prima approssimazione si trascurino gli attriti meccanici. Si determinino:

1- il periodo T_0 del pendolo

2- la lunghezza ℓ del pendolo semplice equivalente a quello dato.

Posta uguale a zero l'energia potenziale del pendolo per $\theta = 0$, cioè quando il baricentro del pendolo passa per la verticale, si calcoli l'energia meccanica totale E del pendolo se l'ampiezza massima di oscillazione è $\theta_0 = 6°$.

La presenza degli attriti introduce un termine di smorzamento nell'equazione del moto del pendolo della forma $-\mu\dot{\theta}$. Sapendo che lo smorzamento è piccolo e che in un'ora l'ampiezza di oscillazione si è ridotta di un fattore e rispetto all'ampiezza iniziale, si determini il valore di μ.

Si calcoli la correzione frazionaria $|\delta\omega_0|/\omega_0$ alla frequenza propria ω_0 del pendolo non smorzato.

Soluzione Momento di inerzia del pendolo composto rispetto al punto di sospensione

$$I_O = I_G + md^2$$

Nell'approssimazione di piccole oscillazioni

$$\omega_0^2 = \frac{mgd}{I_O} = \frac{md}{I_G + md^2} g \;\Rightarrow\; \omega_0 = 3.13\,\mathrm{rad/s}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\,\mathrm{s}$$

La lunghezza del pendolo semplice equivalente è

$$\ell = \frac{I_G + md^2}{md} = 1\,\mathrm{m}$$

Energia meccanica totale

$$E = mgd(1 - \cos\theta_0) = 5.37 \times 10^{-2}\,\mathrm{J}$$

L'equazione del moto del pendolo smorzato è

$$I_O\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

Cerchiamo una soluzione dell'equazione del moto del pendolo smorzato nella forma $\theta \propto \mathrm{e}^{\lambda t}$. Otteniamo l'equazione caratteristica

$$I_O\lambda^2 + \mu\lambda + \omega_0^2 = 0$$

con soluzioni

$$\lambda = -\frac{\mu}{2I_O} \pm i\omega_1$$

con

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\mu}{2I_O}\right)^2}$$

La soluzione ha la forma per opportune condizioni iniziali

$$\theta(t) = \mathrm{e}^{-\mu t/2I_O}\theta_0 \cos\omega_1 t$$

Dopo un intervallo di tempo $t_1 = 3600\,\mathrm{s}$, l'ampiezza di oscillazione si è ridotta ad un fattore e dell'ampiezza iniziale.

Quindi

$$\mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-\mu t_1/2I_O} \ \Rightarrow\ \mu = \frac{2I_0}{t_1} = 5.56 \times 10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2/s}$$

La pulsazione del pendolo smorzato è

$$\omega_1 = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{\mu}{2I_O\omega_0}\right)^2} \approx \omega_0\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{2I_O\omega_0}\right)^2\right]$$

$$\left|\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right| \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{2I_O\omega_0}\right)^2 \approx 3.9 \times 10^{-9}$$

5 Ciclista *Teoremi dinamica*

Un ciclista percorre a velocità costante $v_0 = 15\,\mathrm{km/ora}$ una strada in salita con una pendenza di $\alpha = 6°$. La massa complessiva (persona più bici) è $M = 70\,\mathrm{kg}$, le ruote hanno raggio $R = 36$ e massa $m = 0.5\,\mathrm{kg}$ concentrata sulla loro circonferenza. La bici non presenta attriti interni ed è sostanzialmente costituita da due ruote collegate al telaio tramite i loro assi e, per quanto riguarda la ruota posteriore, anche tramite la catena. Il moto delle ruote è di puro rotolamento.

Si calcolino:

1- la potenza P sviluppata dalla persona;

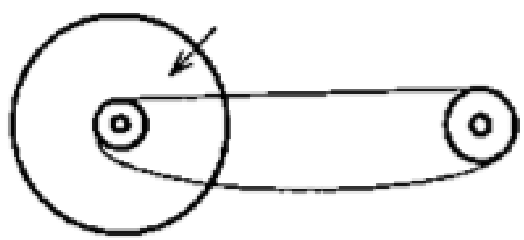
2- il lavoro totale W svolto da tutte le forze esterne (gravità, attrito) ed interne (muscoli) nell'unità di tempo.

3- il lavoro fatto dal ciclista per portarsi alla velocità v_0 partendo da fermo in un tratto di salita lungo $l = 20\,\mathrm{m}$.

Si determini poi in modulo e verso il valore della forza di attrito statico che si esercita sulla ruota posteriore $F_{s,p}$ (si prenda come positivo il verso nella direzione della salita).

Si determini il valore della forza di attrito statico sulla ruota anteriore $F_{s,a}$.

Si determini la tensione τ della catena nel punto superiore di attacco sull'ingranaggio posteriore di raggio $r = 4\,\mathrm{cm}$, sempre nell'ipotesi di velocità costante (la catena al di sotto dell'ingranaggio non è in tensione).



Ad un certo punto della salita, il ciclista si ferma e torna indietro senza pedalare. La forza di resistenza dell'aria ha la forma $F_v = -\gamma v^2$ dove v è la velocità e γ è una costante che dipende dalla sezione trasversa del sistema. La velocità limite raggiunta così dal ciclista è $v_f = 60\,\mathrm{km/ora}$. Si determini il valore di γ.

Soluzione Siccome la velocità è costante, la potenza sviluppata serve solo al guadagno di quota

$$\Delta E_p = Pt = Mg\sin\alpha v_0 t \;\Rightarrow\; P = Mgv_0\sin\alpha = 299\,\mathrm{W}$$

Per il terorema delle forze vive, il lavoro totale delle forze eguaglia la variazione di energia cinetica. Quindi il lavoro per unità di tempo di tutte le forze interne (muscoli) ed esterne (gravità) è nullo. Il lavoro della forza di attrito statico è nullo, perché istante per istante il punto di contatto ruota-suolo è fermo.

$$W = 0$$

Per portarsi a velocità v_0 in $l = 20\,\mathrm{m}$ il lavoro vale, poiché $\omega = v_0/R$,

$$W = \frac{1}{2}Mv_0^2 + 2\frac{1}{2}I\omega^2 + Mg\sin\alpha l = \frac{1}{2}Mv_0^2 + mv_0^2 + Mg\sin\alpha = 2050\,\mathrm{J}$$

Poiché l'accelerazione è nulla,

$$F_{s,p} = Mg\sin\alpha = 71.7\,\mathrm{N}$$

diretta verso la salita.

L'accelerazione angolare della ruota anteriore è nulla, perché la velocità è costante. Rispetto all'asse passante per il centro della ruota, la forza peso ha momento nullo e quindi il momento della forza di attrito deve essere nullo, da cui

$$F_{s,a} = 0$$

La tensione τ è data da

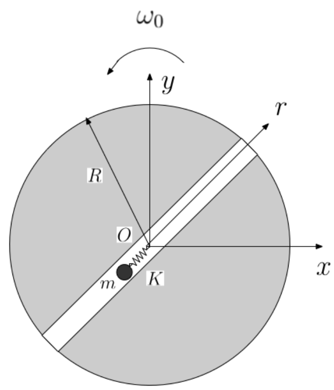
$$r\tau = F_sR = MgR\sin\alpha \;\Rightarrow\; \frac{MgR\sin\alpha\tau}{r} = 645.4\,\mathrm{N}$$

Nella discesa, la velocità limite si ottiene da

$$Mg\sin\alpha = \gamma v_f^2 \;\Rightarrow\; \gamma = \frac{Mg\sin\alpha}{v_f^2} = 0.258\,\mathrm{kg/m}$$

6 Disco con scanalatura *Moti relativi e Teoremi Dinamica*

Un disco di raggio $R = 100\,\mathrm{cm}$ e di massa $M = 25\,\mathrm{g}$ ruota in senso antiorario intorno al suo centro O in un piano orizzontale (x, y) con velocità angolare costante $\omega_0 = 8\pi\,\mathrm{rad/s}$. Una scanalatura lungo il diametro permette lo scivolamento senza attrito di una biglia di massa $m = 5\,\mathrm{g}$, legata al centro del disco da una molla elastica di lunghezza a riposo e massa nulle e costante elastica $K = 8\,\mathrm{N/m}$. Si calcoli la pulsazione ω del moto della biglia



attorno al centro del disco.

Supponiamo che la biglia oscilli con ampiezza uguale al raggio del disco con equazione oraria $r(t) = R\cos(\omega t)$. Per mantenere costante ω_0 è necessaria la presenza di un motore collegato all'asse del disco. Si calcoli la potenza massima P_M che il motore deve fornire per mantenere costante ω_0 ed il lavoro W compiuto dal motore in un periodo delle oscillazioni della biglia.

Successivamente, nel momento in cui la biglia raggiunge il bordo del disco, il motore viene scollegato e il disco è libero di ruotare intorno al proprio asse. Si calcolino il valore $\tilde{\omega}_0$ della frequenza angolare del disco ed il modulo v della velocità della biglia quando questa passa per il centro del disco.

NOTA BENE: Il moto del corpo è unidimensionale con coordinata posizionale r e va descritto nel sistema di riferimento non inerziale. La conservazione delle grandezze meccaniche va invece descritta nel sistema inerziale. Si ricordino l'accelerazione e la velocità di trascinamento.

Soluzione Nel sistema non inerziale, tenendo conto dell'accelerazione di trascinamento e dei vincoli lisci, si ha

$$m\ddot{r} = -Kr + m\omega_0^2 r^2$$

La pulsazione del moto della biglia è

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m} - \omega_0^2} = 31.12\,\mathrm{rad/s}$$

Nel sistema inerziale del laboratorio si ha per l'energia meccanica della biglia l'espressione

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2 + \frac{1}{2}Kr^2$$

Per il teorema delle forze vive, in assenza di attriti, la potenza fornita dal motore eguaglia la variazione dell'energia meccanica della biglia, visto che l'energia cinetica del disco è costante.

$$P(t) = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = m\dot{r}\ddot{r} + \left(m\omega_0^2 + K\right) r\dot{r} = \dot{r}\left[m\ddot{r} + \left(m\omega_0^2 + K\right) r\right]$$

L'equazione oraria della biglia è $r(t) = R\cos\omega t$ per cui $\dot{r} = -\omega R \sin\omega t$ e $\ddot{r} = -\omega^2 R\cos\omega t$ Sostituendo e raccogliendo

$$P(t) = -m\omega_0^2\omega R^2 \sin 2\omega t$$

La potenza massima vale

$$P_M = \underbrace{m\omega_0^2 R}_{\text{forza elastica}} \times \underbrace{\omega R}_{\text{velocità radiale}} = 98.28\,\mathrm{W}$$

Si vede subito che il lavoro fornito dal motore in un periodo di oscillazione della biglia è nullo

$$W \propto \int_0^{2\pi/\omega} \sin 2\omega t\,\mathrm{d}t = 0$$

Quando si scollega il motore il disco ruota liberamente ed il sistema è isolato. L'energia meccanica si conserva. La biglia, quando raggiunge il bordo del disco, inverte il suo moto e quindi la sua velocità lungo la scanalatura in quell'istante è nulla. La conservazione dell'energia meccanica e del momento angolare porge

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2R^2 + \frac{1}{2}KR^2 = \frac{1}{2}I\tilde{\omega}_0{}^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\left(I + mR^2\right)\omega_0 = I\tilde{\omega}_0$$

dove $I = MR^2/2$ è il momento di inerzia del disco ed $\tilde{\omega}_0$ e v sono la frequenza angolare del disco e la velocità della biglia quando questa transita per il centro. Si ottiene

$$\tilde{\omega}_0 = \omega_0\left(1 + \frac{2m}{M}\right) = 35.19\,\mathrm{rad/s}$$

e

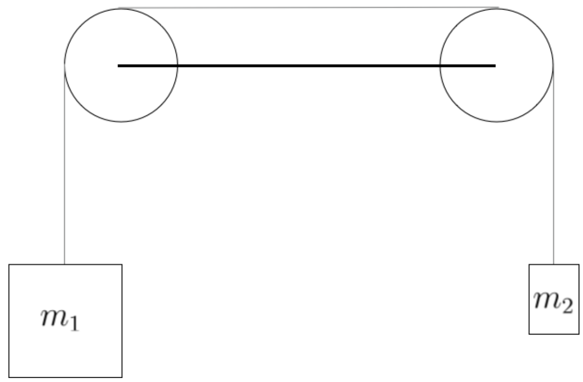
$$v^2 = \frac{1}{m}\left[I\left(\omega_0^2 - \tilde{\omega}_0^2\right) + \left(K + m\omega_0^2\right)R^2\right]$$

Sostituendo e raccogliendo si ha

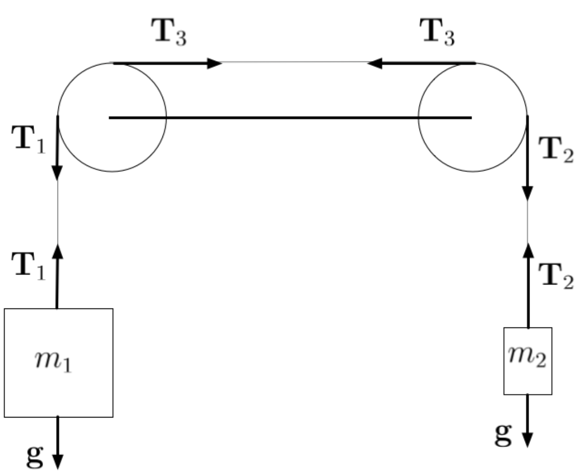
$$v = \left[\frac{KR^2}{m} - \omega_0^2 R^2\left(1 + \frac{2m}{M}\right)\right]^{1/2} = 27.75\,\mathrm{m/s}$$

7 Due carrucole e due pesi *Corpo rigido*

Due dischi uguali, di massa m e raggio R, disposti come in figura, possono ruotare liberamente intorno ai loro centri. Tramite un filo inestensibile di massa nulla sono connessi



ai due pesi di masse $m_1 = 22\,\mathrm{kg}$ ed $m_2 = m_1/4$. I due dischi sono mantenuti a distanza costante da un'asta rigida orizzontale. All'inizio tutto il sistema è in quiete e i due pesi sono fermi alla stessa altezza. Per $t = 0$ si lasciano i pesi liberi di muoversi. Un peso scende e l'altro sale e i dischi si mettono a ruotare. Quanto deve valere la massa dei dischi se si vuole che l'accelerazione di m_1 valga $g/4$? Si calcoli il valore della forza F con cui viene compressa l'asta e l'energia cinetica complessiva dei due dischi quando il peso più leggero è salito di $h = 2\,\mathrm{m}$ rispetto alla posizione iniziale.



Soluzione Momento di inerzia dei dischi

$$I = \frac{mR^2}{2}$$

Scelgo come positive la direzione verso il basso e per i momenti la direzione uscente dal foglio

$$\begin{aligned} m_1 g - T_1 &= m_1 a \\ T_2 - m_2 g &= m_2 a \\ (T_1 - T_3)\, R &= \frac{Ia}{R} \\ (T_3 - T_2)\, R &= \frac{Ia}{R} \end{aligned}$$

da cui

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + m} g = \frac{g}{4} \;\Rightarrow\; m = 38.5\,\mathrm{kg}$$

$$F = T_3 \;\Rightarrow\; T_3 = T_2 + \frac{mg}{8} = m_2(a+g) + \frac{mg}{8} = \left(\frac{5m_2}{4} + \frac{m}{8}\right) g = 114.65\,\mathrm{N}$$

Siccome il moto dei pesi è uniformemente accelerato, la loro velocità in modulo vale

$$v^2 = 2ah$$

Inoltre

$$v = \omega R$$

da cui, l'energia cinetica dei due dischi vale

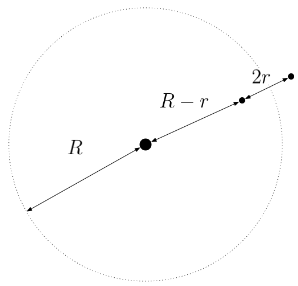
$$E_k = 2\frac{1}{2} I\omega^2 = 2\frac{1}{2}\frac{1}{2} mR^2 \left(\frac{v}{R}\right)^2 = mah = \frac{g}{4} mh = 188.8\,\mathrm{J}$$

Gravitazione

8 Satelliti e planetesimi in orbita intorno ad un pianeta

Gravitazione

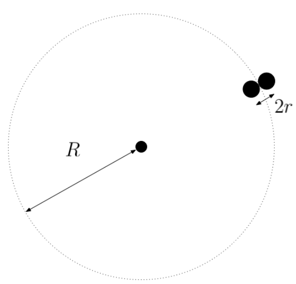
Due satelliti di massa uguale $m = 10^4$ kg orbitano entrambi intorno alla Terra di massa $M = 5.97 \times 10^{24}$ kg. I due satelliti si possono considerare puntiformi. Le loro orbite sono circolari complanari di raggi $R+r$ ed $R-r$, rispettivamente con $R = 45000$ km e $r = 10$ km, con $r \ll R$. Per $t = 0$ i due satelliti sono inizialmente allineati col pianeta. Trascurando



l'interazione gravitazionale mutua fra i due satelliti, si dica qual è la distanza angolare $\Delta\theta$ in gradi fra i due satelliti visti dalla Terra dopo 10 giorni, arrestandosi ai termini del primo ordine in r/R.

Sempre trascurando termini di ordine $(r/R)^2$ o superiore, si calcoli quanta forza aggiuntiva deve essere esercitata sul satellite interno F_1 e quale su quello esterno F_2, oltre a quella esercitata dal pianeta, affinché la velocità angolare sulle loro rispettive orbite sia uguale a quella che avrebbero sull'orbita di raggio R.

Consideriamo ora che i due corpi siano, invece, dei planetesimi sferici di raggio r, a contatto fra loro e allineati col pianeta. Tra loro si esercita l'attrazione gravitazionale di



due corpi puntiformi di massa m distanti $2r$ fra loro. Ammesso che la mutua interazione gravitazionale fosse sufficiente da mantenerli a contatto allineati col pianeta, si determini, al primo ordine in r/R la forza F che si esercita tra di loro e la velocità angolare del loro centro di massa.

Perché l'interazione attrattiva mutua non interviene nel calcolo?

Nota Bene: Lo sviluppo in serie necessario è $(1+\epsilon)^a \approx 1 + a\epsilon$ per $\epsilon \ll 1$.

Soluzione Siano $R_\pm = R \pm r$ e $\omega_\pm$ le distanze e le frequenze angolari orbitali dei due satelliti. Deve risultare

$$m\omega_\pm^2 R_\pm = \frac{\mathcal{G}mM}{R_\pm^2}$$

ovvero

$$\omega_\pm^2 = \frac{\mathcal{G}M}{R^3\left(1 \pm \frac{r}{R}\right)^3} \approx \frac{\mathcal{G}M}{R^3}\left(1 \mp 3\frac{r}{R}\right)$$

Posto

$$\omega_0^2 = \frac{\mathcal{G}M}{R^3} \ \Rightarrow\ \omega_0 \approx 6.61 \times 10^{-5}\mathrm{rad/s}$$

si ha

$$\omega_\pm \approx \omega_0\left(1 \mp \frac{3r}{2R}\right)$$

La differenza angolare in gradi vista tra i due satelliti dal pianeta dopo $t = 10\,$giorni vale

$$\Delta\theta = (\omega_- - \omega_+)\,t = 2.18^\circ$$

L'accelerazione centripeta dei due satelliti è dovuta all'interazione gravitazionale col pianeta. Abbiamo

$$m\omega_\pm^2 R_\pm = \frac{\mathcal{G}mM}{R_\pm^2}$$

Sostituiamo ad $\omega_\pm$ le espressioni trovate in precedenza per ottenere

$$m\omega_0^2 R_\pm \mp 3m\omega_0^2\left(\frac{r}{R}\right)R_\pm = \frac{\mathcal{G}mM}{R_\pm^2}$$

dove ω_0 è la frequenza angolare che avrebbero su un'orbita di raggio R. Sul pianeta interno si esercita la forza aggiuntiva

$$F_1 = -3m\omega_0^2\left(\frac{r}{R}\right)R_- \approx -3m\omega_0^2\left(\frac{r}{R}\right)R = -3\frac{\mathcal{G}mM}{R^2}\left(\frac{r}{R}\right) = -1.31\,\mathrm{N}$$

mentre è immediato vedere che

$$F_2 = -F_1$$

Se i due satelliti sono sostituiti da due planetesimi sferici a contatto, la reazione vincolare tra le superficie di contatto annulla l'interazione gravitazionale mutua e pertanto resta in gioco solo quella del pianeta. Questa ha risultante lungo l'asse tra il centro del pianeta e il centro di massa e vale, trascurando termini del secondo ordine o superiore in r/R,

$$F = \frac{\mathcal{G}mM}{(R+r)^2} + \frac{\mathcal{G}mM}{(R-r)^2} \approx \frac{\mathcal{G}(2m)M}{R^2} \approx 3933\,\mathrm{N}$$

Il centro di massa ha massa $2m$ ed ha velocità angolare

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{R^3}}$$

9 Satellite artificiale *Gravitazione*

Un satellite di massa $m = 1000\,\mathrm{kg}$ si muove su un'orbita circolare ad un'altezza $h_1 = 300\,\mathrm{km}$ dalla Terra (raggio terrestre $R_T = 6.4 \times 10^6\,\mathrm{m}$). Il centro di controllo vuole modificarne l'orbita portandolo ad un'altezza $h_2 = 600\,\mathrm{km}$ sempre su un'orbita circolare.

Si calcolino le velocità v_1 e v_2 a queste quote. Il cambiamento di orbita viene realizzato aumentando in un tempo molto breve (trascurabile) la velocità del satellite senza modificarne la direzione in modo da porlo su un'orbita ellittica con perielio a distanza h_1 e apogeo a distanza h_2 dalla Terra. Poi, quando il satellite ha raggiunto tale distanza, un secondo razzo ne modifica il modulo della velocità in modo da mantenervelo.

Si calcolino la velocità v_1' e v_2'dopo l'accensione del primo e del secondo razzo, rispettivamente, il lavoro speso da questo razzo e il lavoro speso dal secondo razzo.

Tuttavia, a causa di un malfunzionamento del secondo razzo, si osserva che il satellite si allontana definitivamente dalla Terra. Qual è stata, rispetto al valore v_2', la minima variazione di velocità prodotta δv dal secondo razzo?

Soluzione Siano $R_1 = R_T + h_1$ e $R_2 = R_T + h_2$ e $g = \mathcal{G}M/R_T^2$ con M massa della Terra.

$$mv_i^2/R_i = \frac{\mathcal{G}Mm}{R_i^2} = mg\left(\frac{R_T}{R_i}\right)^2 \qquad i = 1,2 \Rightarrow v_i^2 = g\frac{R_T^2}{R_i}$$

$$v_1 = R_T\sqrt{\frac{g}{R_1}} = 7744.2\,\mathrm{m/s}$$

$$v_2 = R_T\sqrt{\frac{g}{R_2}} = 7576.4\,\mathrm{m/s}$$

Dopo la spinta del primo razzo, su un'orbita ellittica momento angolare ed energia totale si conservano

$$v_1' R_1 = v_2' R_2$$

$$\frac{1}{2}m{v_1'}^2 - \frac{\mathcal{G}Mm}{R_1} = \frac{1}{2}m{v_2'}^2 - \frac{\mathcal{G}Mm}{R_2}$$

Risolvendo per v_i' $(i = 1,2)$ si ottiene

$$v_1' = v_1\sqrt{\frac{2R_2}{R_1 + R_2}} = 7828.5\,\mathrm{m/s}$$

$$v_2' = v_2\sqrt{\frac{2R_1}{R_1 + R_2}} = 7493.0\,\mathrm{m/s}$$

Il lavoro compiuto dal primo razzo è

$$W_1 = \frac{1}{2}m\left({v_1'}^2 - v_1^2\right) = 6.566 \times 10^8\,\mathrm{J}$$

Il lavoro compiuto dal secondo razzo (per frenare il satellite) è

$$W_2 = \frac{1}{2}m\left(v_2^2 - {v_2'}^2\right) = 6.285 \times 10^8\,\mathrm{J}$$

La velocità di fuga minima alla quota R_2 è definita da

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{\mathcal{G}M}{R_2} = 0 \Rightarrow v_f = \sqrt{2}v_2 = 10715\,\mathrm{m/s}$$

Pertanto, l'errore impartito alla velocità risulta

$$\delta v = v_f - v_2' = 3221.7\,\mathrm{m/s}$$

10 Cometa di Hale-Bopp *Gravitazione*

La cometa di Hale-Bopp ha un periodo orbitale pari a $T = 2550\,\text{anni}$. Al perielio è passata ad una distanza dal Sole pari a $d = 0.9\,\text{U.A.}$ ($1\,\text{U.A.} \equiv R = 1.5 \times 10^{11}\,\text{m}$). L'orbita della Terra si assume circolare. Sapendo che il periodo orbitale della Terra è $T_T = 1\,\text{anno}$, si determinino il semiasse maggiore a dell'orbita della cometa e la sua eccentricità e. Quanto vale la distanza dell'afelio D dal Sole? Si determinino le velocità della cometa al perielio e all'afelio, v_p e v_a.

NOTA BENE: Siccome la massa del Sole non è data, bisogna sostituirla con grandezze note. Inoltre, si esprima l'eccentricità con 4 cifre decimali.

Soluzione Siccome la massa del Sole non è data, bisogna arrangiarsi altrimenti. Si assume che l'orbita terrestre sia circolare. Quindi la sua velocità v_T è data da

$$v_T = \frac{2\pi R}{T_T} = 29.9\,\text{km/s}$$

e

$$\frac{\mathcal{G}M_S}{R} = v_T^2$$

dove M_S è la massa del Sole. Quindi

$$\mathcal{G}M_S = Rv_T^2$$

Dalle ellissi si ha $d = a(1-e)$ e dalla terza legge di Keplero $T^2/a^3 =$costante,

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_T^2}{R^3} \Rightarrow a = R\left(\frac{T}{T_T}\right)^{2/3} \approx 2.8 \times 10^{13}\,\text{m}$$

$$e = 1 - \frac{d}{a} \approx 0.9952$$

$$D = a(1+e) \approx 5.59 \times 10^{13}\,\text{m}$$

La conservazione dell'energia totale (meccanica) porge

$$\frac{1}{2}mv_a^2 - \frac{\mathcal{G}M_S m}{a(1+e)} = \frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{\mathcal{G}M_S m}{a(1-e)}$$

da cui

$$v_p^2 - v_a^2 = 2\frac{\mathcal{G}M_S}{a}\frac{2e}{1-e^2} = 2\frac{Rv_T^2}{a}\frac{2e}{1-e^2}$$

mentre la conservazione del momento angolare si traduce in

$$v_p a(1-e) = v_a a(1+e) \Rightarrow v_a = v_p\frac{1-e}{1+e}$$

Da queste ultime due equazioni si ottiene

$$v_p^2 = 4\frac{Rv_T^2}{a}\left(\frac{e}{1-e^2}\right)\left[1-\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^2\right]^{-1}$$

da cui

$$v_p \approx 44.5\,\mathrm{km/s}$$

$$v_a = v_p\frac{1-e}{1+e} \approx 0.11\,\mathrm{km/s}$$

11 Satellite artificiale

Un satellite artificiale è lanciato dalla Terra in modo che, ad un certo istante, quando si trova ad una distanza dal centro della Terra pari ad $R = 7.4 \times 10^6\,\mathrm{m}$, la sua velocità è diretta ortogonalmente alla congiungente il satellite stesso con il centro della Terra. La massa terrestre vale $M_T = 5.98 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$.

Si calcoli il valore limite v_L della velocità per cui si può avere un'orbita ellittica.

Se il satellite ha velocità $v = 0.9\,v_L$, si calcolino

- il semiasse maggiore a dell'orbita;
- i valori del perielio R_p e dell'afelio R_a;
- l'eccentricità e della stessa;
- il valore del semiasse minore b.

Soluzione Velocità limite

$$E = \frac{1}{2}mv_L^2 - \frac{\mathcal{G}mM_T}{R} = 0 \;\Rightarrow\; v_L = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_T}{R}} = 10.382\,\mathrm{km/s}$$

$$v = 0.9v_L = 9.344\,\mathrm{m/s}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}mM_T}{R} = -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}mM_T}{a} \;\Rightarrow\; a = \frac{\mathcal{G}M_T}{2\mathcal{G}M_T/R - v^2} = 1.9474 \times 10^7\,\mathrm{m}$$

$$R_p = R \qquad R_a = 2a - R = 3.15474 \times 10^7\,\mathrm{m}$$

$L = mrv$ si conserva. Si ha

$$E = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{2a}$$

$$e^2 = 1 + \frac{2\mu L^2}{(\mathcal{G}mM_T\mu)^2}E$$

con $\mu =$ massa ridotta. Ma $\mu \approx m$, da cui

$$e^2 = 1 - \frac{(Rv)^2}{\mathcal{G}M_T a} \;\Rightarrow\; e = 0.62$$

$$b = a\sqrt{1 - e^2} = 1.5279 \times 10^7\,\mathrm{m}$$