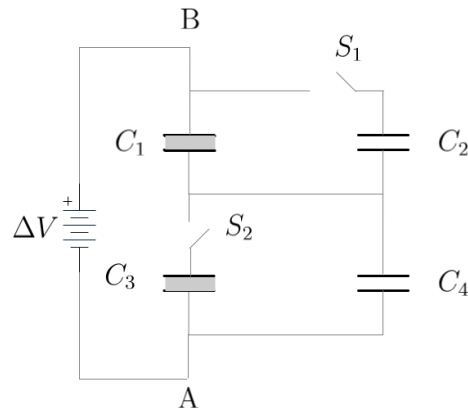


# Pool esercizi elettrostatica compito

3 Luglio 2020

## 1 Esercizio 1

Le armature di quattro condensatori uguali distano  $d = 0.25 \text{ mm}$  e hanno superficie  $S = 150 \text{ cm}^2$ . I condensatori  $C_1$  e  $C_3$  sono completamente riempiti di dielettrici differenti di costanti dielettriche relative  $K_1$  e  $K_3$  rispettivamente. I quattro condensatori sono collegati come in figura. Gli interruttori  $S_1$  e  $S_2$  sono inizialmente aperti. Tra i punti A e B è connesso un generatore di d.d.p.  $\Delta V = 1.2 \text{ kV}$ . Nella situazione iniziale si sa che il valore



del campo elettrico tra le armature del condensatore  $C_4$  vale  $E_4 = 4.073 \text{ MV/m}$ . Successivamente, sempre mantenendo connesso il generatore, vengono chiusi gli interruttori. Una volta raggiunta la situazione di regime si trova che il generatore ha speso un lavoro pari ad  $L = 1.4768 \text{ mJ}$ . Si calcolino

- 1 il valore della costante dielettrica  $K_1$ ;
- 2 il valore della carica di polarizzazione  $q_{p1}$  sul condensatore  $C_1$  nella situazione iniziale;
- 3 il valore della costante dielettrica  $K_3$
- 4 il valore della densità di carica di polarizzazione sul condensatore  $C_3$  nella situazione finale.

**Soluzione** Situazione iniziale:  $C_1$  in serie a  $C_4$

$$C_{e1} = C_0 \frac{K_1}{1 + K_1}$$

$$q = C_{e1} \Delta V$$

$$E_4 = \frac{C_{e1} \Delta V}{d C_4} = \frac{K_1}{1 + K_1} \frac{\Delta V}{d} \Rightarrow K_1 = \frac{d E_4 / \Delta V}{1 - d E_4 / \Delta V} = 5.6$$

$$\begin{aligned} q_{1p} &= \epsilon_0 (K_1 - 1) E_1 S \\ &= \epsilon_0 (K_1 - 1) S \frac{C_{e1} \Delta V}{C_1 d} \\ &= \epsilon_0 S \left( \frac{K_1 - 1}{K_1 + 1} \right) \frac{\Delta V}{d} = \underline{4.44 \times 10^{-7} \text{ C}} \end{aligned}$$

Dopo la chiusura degli interruttori (a regime):

$$L = (C_{e2} - C_{e1}) \Delta V^2$$

$$C_{e2} = C_0 \left[ \frac{(1 + K_1)(1 + K_3)}{2 + K_1 + K_3} \right]$$

Posto

$$\gamma = \frac{L}{C_0 \Delta V^2} + \frac{K_1}{1 + K_1} \Rightarrow K_3 = \frac{(2\gamma - 1) + K_1(\gamma - 1)}{1 + K_1 - \gamma} = 3.8$$

Ai capi del condensatore  $C_3$

$$\Delta V_3 = \Delta V \frac{C_1 + C_2}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4} = \frac{1 + K_1}{2 + K_1 + K_3} \Delta V = 694.9 \text{ V}$$

$$E_3 = \frac{\Delta V_3}{d} = 2.78 \times 10^6 \text{ V/m}$$

$$\sigma_{3p} = \epsilon_0 (K_3 - 1) E_3 = \underline{68.9 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2}$$

## 2 Esercizio 2

I centri di due sfere conduttrici  $S_1$  e  $S_2$  di raggio  $R_1 = 1$  cm e  $R_2 = 2.5$  cm, rispettivamente, distano fra loro  $d = 2$  m che è una distanza molto grande rispetto ai loro raggi. Sulla sfera  $S_1$ , isolata, è deposta una carica  $Q_1 = 89$  nC mentre la seconda sfera viene mantenuta a potenziale  $V_2 = 10500$  V rispetto all'infinito. Si trovino: il valore in V del potenziale a cui si trova la sfera  $S_1$ ; il valore della carica  $Q_2$  sulla sfera  $S_2$ ; il valore della forza  $F$  in N che si esercita fra le due sfere.

### Soluzione

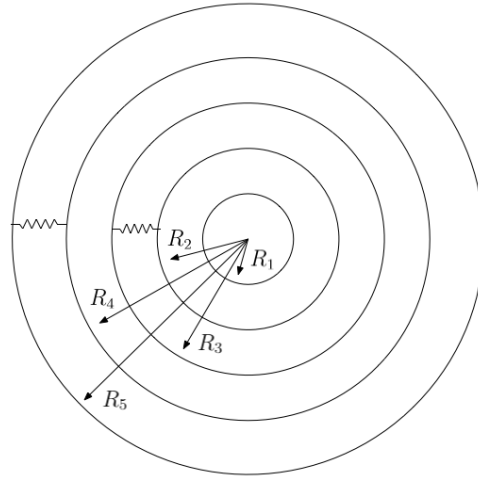
$$V_2(d) = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 d} \Rightarrow Q_2 = 4\pi\epsilon_0 R_2 V_2(d) - Q_1 \frac{R_2}{d} = 28.09 \text{ nC}$$

$$V_1(d) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 d} = 80.12 \text{ kV}$$

$$F(d) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 d^2} = 5.618 \mu\text{N}$$

### 3 5 sfere metalliche concentriche

Cinque gusci sferici metallici di raggi  $R_i$ ,  $i = 1 \dots 5$  sono posti concentrici uno entro l'altro e il sistema complessivo è isolato. I raggi, se espressi in mm, valgono  $R_i = (5 \times i)$  mm. I gusci di raggio  $R_2$  e  $R_3$  sono collegati da un sottile filo metallico come anche  $R_4$  e  $R_5$ , come in figura. Il sistema è inizialmente neutro. Poi, sul guscio più interno viene depositata la



carica  $q = 4.5 \times 10^{-10}$  C. Si calcolino i valori delle cariche che compaiono sulle superficie dei gusci.

Si calcoli il valore del campo elettrico  $E_{12}$  per  $r = (R_1 + R_2)/2$  tra i gusci 1 e 2 e il campo elettrico  $E_{45}$  tra i gusci 4 e 5 per  $r = (R_4 + R_5)/2$ .

Si calcoli la capacità equivalente del sistema  $C_e$ .

Si calcoli l'energia elettrostatica immagazzinata nel sistema

Si calcoli l'energia elettrostatica immagazzinata nel sistema  $U_1$ .

Successivamente il guscio esterno viene messo al potenziale di terra  $V_{\text{terra}} = 0$  V. Si calcoli la variazione di energia elettrostatica che occorre in questo processo.

#### Soluzione

$$q_1 = q; q_2 = q_4 = 0; q_3 = -q; q_5 = q$$

$$E_{12} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{R_1+R_2}{2}\right)^2} = 71.9 \text{ kV/m}$$

$$E_{45} = 0 \quad \text{ovunque}$$

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{R_3 - R_1}{R_3 R_1} + \frac{R_5 - R_3}{R_5 R_3} + \frac{1}{R_5} \right] = 0.556 \text{ pF}$$

$$U_1 = \frac{q^2}{2C_e} = 1.82 \times 10^{-7} \text{ J}$$

$$\Delta U = -\frac{q^2}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_5} = -3.64 \times 10^{-8} \text{ J}$$