Compito Fisica 1

14 settembre 2020

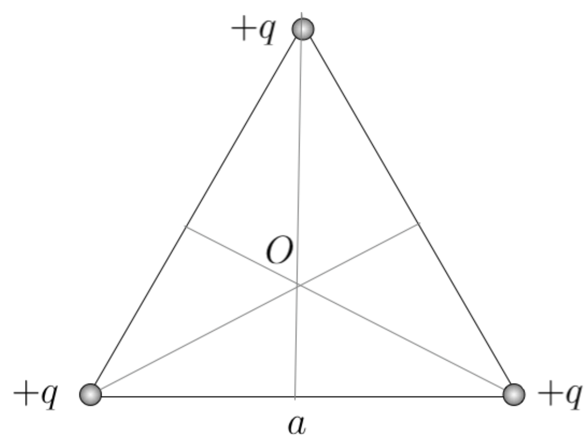
1 Tre cariche e un elettrone

Tre cariche positive puntiformi uguali, q, sono posizionate nei vertici di un triangolo equilatero di lato $a = 11\,\mathrm{cm}$. Per costruire questo sistema si è speso il lavoro $W = 2.451\,\mathrm{mJ}$. Si determini il valore di q e si determini il valore del potenziale nel baricentro del triangolo V_0

Successivamente, un elettrone viene lanciato con velocità iniziale $v_0 = 2 \times 10^7\,\mathrm{m/s}$ lungo l'asse z normale al piano delle cariche a partire dal baricentro O del triangolo. Si determinino:

il valore del potenziale elettrostatico V_1 nella posizione in cui l'elettrone inverte il suo moto;

la distanza z_1 dal baricentro in cui l'elettrone inverte il suo moto



Soluzione

$$W = \frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 a W}{3}} = 10^{-7}\,\mathrm{C}$$

La distanza di ogni carica dal baricentro è

$$d = \frac{a}{\sqrt{3}} = 6.35\,\mathrm{cm}$$

e il potenziale elettrostatico in O vale

$$V_0 = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 d} = \frac{3\sqrt{3}q}{4\pi\epsilon_0 a} = 42455.1\,\mathrm{V}$$

Per il teorema delle forze vive

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = e\left(V_0 - V_1\right) \Rightarrow V_1 = V_0 - \frac{1}{2e}mv_=^2 = 41317.9\,\mathrm{V}$$

La distanza dell'elettrone da ciascuna carica vale

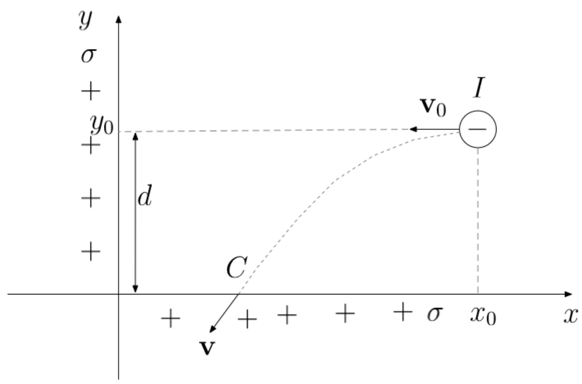
$$r^2 = d^2 + z^2$$

Se z_1 è la coordinata in cui il potenziale vale V_1 si ottiene

$$V_1 = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z_1^2 + a^2/3}} \Rightarrow z_1 = \sqrt{\left(\frac{3q}{4\pi\epsilon_0 V_1}\right)^2 - \frac{a^2}{3}} = 1.5\,\mathrm{cm}$$

2 Due piani di carica ed uno ione

Due piani isolanti indefiniti di carica sono posti ortogonalmente tra loro. La densità di carica è uguale per i due e vale $\sigma = 1.5 \times 10^{-6}\,\mathrm{C/m^2}$. Uno ione negativo I, con rapporto carica su massa $q/m = 2.78 \times 10^6\,\mathrm{C/kg}$, all'istante iniziale transita nel punto di coordinata (x_0, y_0) con $x_0 \gg y_0 = d = 1.5\,\mathrm{m}$ con una velocità diretta nel verso negativo dell'asse x e di modulo $v_0 = 2.5 \times 10^6\,\mathrm{m/s}$. Si calcoli il valore dell'accelerazione a dello ione nel punto



iniziale (x_0, y_0).

Si calcoli il valore dell'intervallo di tempo tra l'istante iniziale e il momento del contatto dello ione e il piano di carica orizzontale ed il modulo della velocità v in questo istante.

Si calcoli la differenza di potenziale tra il punto iniziale ed il punto C.

Soluzione Il campo elettrico di una distribuzione piana indefinita di carica con densità σ è costante

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Nel punto iniziale il campo elettrico risultante è dato dalla sovrapposizione dei campi elettrici dei due piani di carica. In modulo

$$E = \sqrt{2}\frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 119.79\,\mathrm{kV/m}$$

e quindi l'accelerazione dello ione è costante

$$a = \frac{q}{m}E = 3.33 \times 10^{11}\,\mathrm{m/s^2}$$

Il moto è uniformemente accelerato. Lungo l'asse y si ha

$$y = y_0 - \frac{1}{2}\frac{q}{m}\frac{\sigma}{2\epsilon_0}t^2$$

Lo ione intercetta il piano $y = 0$ all'istante

$$t = \sqrt{\frac{4\epsilon_0 y_0}{\sigma}\frac{m}{q}} = 3.57 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$$

con velocità

$$v_y = -\frac{q}{m}\frac{\sigma}{2\epsilon_0}t = -0.84 \times 10^6\,\mathrm{m/s}$$

$$v_x = -v_0 - \frac{q}{m}\frac{\sigma}{2\epsilon_0}t = -3.34 \times 10^6\,\mathrm{m/s}$$

il cui modulo vale

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 3.44 \times 10^6\,\mathrm{m/s}$$

Sfruttando la conservazione dell'energia fra il punto iniziale e quello finale, detto V_I e V_C il potenziale elettrostatico nei punti iniziale e finale, si ha

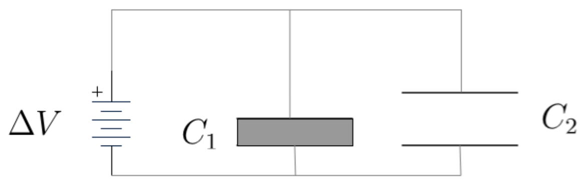
$$\frac{1}{2}mv_0^2 + qV_I = \frac{1}{2}mv^2 + qV_C$$

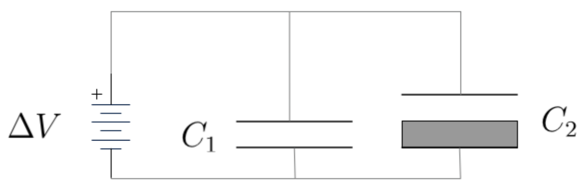
si ottiene

$$\Delta V \equiv V_C - V_I = \frac{m}{2q}\left(v_0^2 - v^2\right) = -1.01 \times 10^6\,\mathrm{V}$$

3 Due condensatori

Due condensatori piani a facce parallele hanno la stessa superficie $S = 1\text{m}^2$ ma la distanza tra le due armature del primo, $d = 7.5\text{mm}$, è metà di quella tra le armature del secondo $2d$. Lo spazio fra le armature del primo condensatore è riempito completamente di dielettrico di costante dielettrica relativa $K = 2.6$ mentre il secondo condensatore è vuoto. I due condensatori sono connessi tra loro in parallelo come nella parte alta della figura. I





condensatori sono alimentati da un generatore di forza elettromotrice costante $\Delta V = 2\,\text{kV}$.

Dopo, il dielettrico viene rimosso dal primo condensatore e inserito nel secondo, come mostrato nella parte bassa della figura. Si calcolino:

il valore della capacità iniziale del sistema C_i;

il valore della capacità finale del sistema C_f;

il lavoro compiuto dall'esterno W per spostare il dielettrico tra i due condensatori;

il valore della differenza di potenziale ΔV_d tra l'armatura superiore di C_2 e la superficie del dielettrico nella configurazione finale del sistema.

Soluzione La capacità del primo condensatore, se fosse vuoto, sarebbe

$$C_{1,0} = \frac{\epsilon_0 S}{d} = 1.18\,\text{nF}$$

mentre con il dielettrico la capacità a vuoto aumenta di un fattore K

$$C_1 = KC_{1,0} = 3.07\,\text{nF}$$

La capacità a vuoto del secondo vale

$$C_{2,0} = \frac{\epsilon_0 S}{2d} = \frac{C_{1,0}}{2} = 0.59\,\text{nF}$$

I due condensatori sono in parallelo e quindi la capacità del sistema è

$$C_1 = KC_{1,0} + \frac{C_{1,0}}{2} = C_{1,0}\left(K + \frac{1}{2}\right) = 3.66\,\mathrm{nF}$$

Nella configurazione finale, il condensatore 2 è riempito a metà di dielettrico e si può quindi considerare come 2 condensatori in serie

$$C_f = C_{1,0} + \left[\frac{1}{C_{1,0}} + \frac{1}{KC_{1,0}}\right]^{-1} = C_{1,0}\left(\frac{1+2K}{1+K}\right) = 2.03\,\mathrm{nF}$$

Il lavoro fatto dall'esterno per spostare il dielettrico è uguale alla differenza di energia elettrostatica fra le due configurazioni

$$W = \frac{1}{2}\Delta V^2\left(C_f - C_i\right) = -3.25\,\mathrm{mJ}$$

Nel condensatore riempito a metà, il campo elettrico nel dielettrico è ridotto di un fattore K rispetto al campo nella parte vuota. La differenza di potenziale fra l'armatura superiore del condensatore e la superficie del dielettrico vale

$$\Delta V_d = \frac{K}{1+K}\Delta V = 1.44\,\mathrm{kV}$$