1 Urti e fenomeni impulsivi

1.1 Esercizio 1

Un bilanciere è composto da un'asta di lunghezza $l = 1.60\ m$ e massa $m = 2.5\ kg$, e due masse $M = 4.0\ kg$ identiche, approssimabili a puntiformi e montate alle estremità dell'asta.

Il bilanciere è libero di muoversi orizzontalmente su di un piano perfettamente liscio, ed è inizialmente in moto con velocità $v_0 = 3.75\ m/s$.

Nel suo moto il bilanciere urta elasticamente un piolo rigido posto ad una distanza dal centro di massa tale per cui dopo l'urto il centro di massa del bilanciere sia completamente fermo.

L'urto si sviluppa in un lasso di tempo pari a $\Delta t = 2\ ms$.

Determinare:

a) Il momento d'inerzia del bilanciere rispetto il suo centro di massa

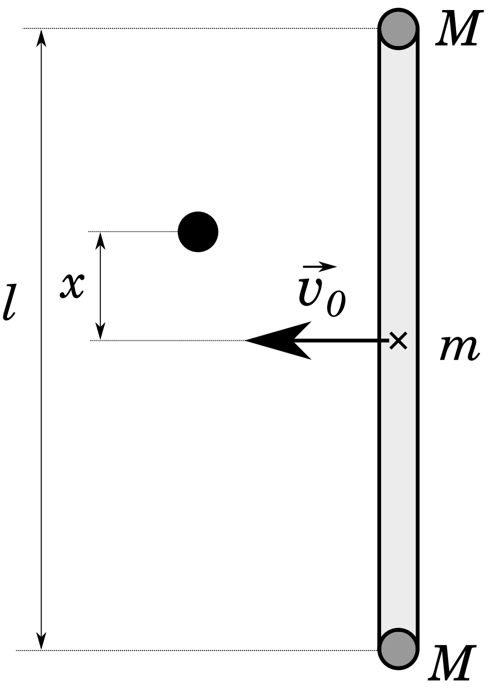
b) La velocità angolare del bilanciere subito dopo l'urto

c) La distanza tra centro di massa del bilanciere e piolo all'istante dell'urto

d) Il modulo dell'impulso fornito dal piolo nell'urto

e) La forza media esercitata nel corso dell'urto

f) Cosa accade dopo che il bilanciere urta nuovamente il piolo dopo aver compiuto una rotazione di $\theta = \pi$



---

a) Il momento d'inerzia del sistema comprendente l'asta e le due masse M. Rispetto il centro di massa dell'asta si ottiene:

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{12}ml^2 + 2M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = && (1)\\
&= \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{2}Ml^2 = && (2)\\
&= \frac{1}{12}(m+6M)l^2 = && (3)\\
&= 5.65\ kgm^2 && (4)\\
& && (5)
\end{aligned}
$$

b) L'urto tra bilanciere e piolo è elastico, pertanto si conserva l'energia cinetica del sistema:

$$\Delta E_k = 0 \tag{6}$$

Quindi, dato che dopo l'urto il centro di massa del piolo è completamente fermo:

$$\frac{1}{2}(m+2M)v_0^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{7}$$

Da cui:

$$\omega = \sqrt{\frac{m+2M}{I}}v_0 = 5.11\ rad/s \tag{8}$$

c) Il sistema conserva inoltre il momento angolare, calcolato rispetto al piolo.

$$\Delta \vec{L}_O = 0 \tag{9}$$

L'istante prima dell'urto il momento angolare vale (dove si è preso come verso positivo la direzione uscente dal foglio rispetto il disegno del problema riportato in precedenza):

$$L_O^i = x(m+2M)v_0 \tag{10}$$

Mentre dopo l'urto il sistema ruota semplicemente attorno al centro di massa, essendo quest'ultimo completmente fermo. La rotazione avviene in senso orario, di conseguenza il vettore ω è entrante nel foglio, da cui il segno negativo:

$$L_O^f = -I\omega \tag{11}$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{I\omega}{(m+2M)v_0} = && (12)\\
&= \frac{I\sqrt{\frac{m+2M}{I}}v_0}{(m+2M)v_0} = && (13)\\
&= \sqrt{\frac{I}{m+2M}} = 0.733\ m && (14)
\end{aligned}
$$

d) Nell'urto non si conserva la quantità di moto del sistema a causa della presenza delle forze esterne impulsive sotto forma della reazione vincolare del piolo.

Per il teorema dell'impulso possiamo scrivere che:

$$
\begin{aligned}
J &= |\vec{p}_f - \vec{p}_i| = && (15)\\
&= |(m+2M)v_0| = 39.4\ Ns && (16)
\end{aligned}
$$

e) E' possibile calcolare la forza impulsiva media sviluppata nel corso dell'urto tramite la:

$$J = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} F(t)dt = \tag{17}$$

$$= F_m \Delta t \tag{18}$$

Di conseguenza:

$$F_m = \frac{J}{\Delta t} = \frac{(m+2M)v_0}{\Delta t} = 19690\ N \tag{19}$$

f) Si può arrivare alla soluzione senza alcun calcolo, considerando la conservazione del vettore momento angolare, e dell'energia. Dopo il secondo urto non può accadere altro se non che il bilanciere arresti la sua rotazione e inizi a muoversi con velocità nella stessa direzione e verso della velocità v_0 iniziale. Volendo però procedere analiticamente si possono fare le seguenti considerazioni:

Dopo un angolo $\theta = \pi$ il bilanciere si trova ad urtare nuovamente il piolo, dal lato opposto. L'urto si manterrà elastico, e si conserverà chiaramente il momento angolare.

Queste due condizioni impongono che, data una generica nuova velocità finale v' e una generica velocità angolare finale ω':

$$\begin{cases} \frac{1}{2}I\omega^2 & = \frac{1}{2}(m+2M)v'^2 + \frac{1}{2}I\omega'^2 \\ I\omega & = x(m+2M)v' + I\omega' \end{cases} \tag{20}$$

Risolvendo il sistema ci si ritrova velocemente nella condizione seguente:

$$\begin{cases} \omega' & = \omega - \frac{x(m+2M)}{I}v' \\ 0 & = v'^2 \left\{ \frac{1}{2}(m+2M)\left[1 + \frac{x^2(m+2M)}{I}\right]\right\} - v'\left[\omega x(m+2M)\right] \end{cases} \tag{21}$$

Da quest'ultima si vede chiaramente che vi sono due possibili soluzioni.

$$\begin{cases} \omega' & = \omega \\ v' & = 0 \end{cases} \tag{22}$$

Questa è chiaramente la soluzione triviale che descrive esattamente la stessa condizione con la quale il bilanciere si sta muovendo prima del secondo urto (abbiamo infatti velocità del centro di massa nulla, e velocità angolare pari a quella trovata in precedenza).

L'altra soluzione, non triviale, invece porta a:

$$\begin{cases} \omega' & = \omega - \frac{x(m+2M)}{I}v' \\ v' & = \frac{\left\{\frac{1}{2}(m+2M)\left[1+\frac{x^2(m+2M)}{I}\right]\right\}}{[\omega x(m+2M)]} \end{cases} \tag{23}$$

Ricordando le soluzioni trovate in precedenza per x e ω, si semplificano notevolmente entrambe le equazioni, tanto da ricavare:

$$\begin{cases} \omega' & = 0 \\ v' & = v_0 \end{cases} \tag{24}$$

2 Elettrostatica

2.1 Esercizio 1

Nel circuito descritto in figura è presente un generatore di forza elettromotrice $\mathcal{E} = 50\ V$ e resistenza interna $r = 2.5\ \Omega$. Due condesatori $C_1 = 6.5\ nF$ e $C_2 = 22.1\ nF$, sono collegati al generatore di f.e.m. tramite due interruttori S_1 e S_2, inizialmente entrambi aperti.

Determinare:

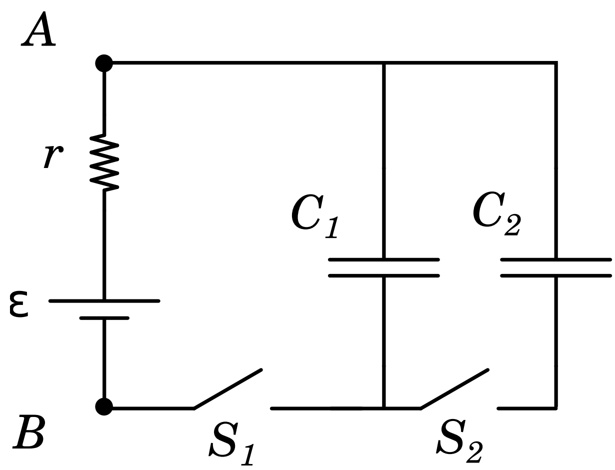
a) La differenza di potenziale tra i punti A e B del circuito quando S_1 è aperto

b) La massima carica che si prevede di immagazzinare sulle armature di C_1 quando il circuito si porta asintoticamente in condizioni stazionarie una volta chiuso S_1 (mantenendo S_2 aperto)

c) La costante di tempo del circuito τ quando S_1 e S_2 sono entrambi chiusi

d) Partendo da sistema completamente scarico ($q_1 = q_2 = 0$), si chiudono entrambi gli interruttori e si aspetta un tempo t pari a 3τ. Determinare, all'istante t la corrente i circolante attraverso la resistenza interna del generatore

e) E la potenza P dissipata dalla resistenza interna del generatore



---

a) A circuito aperto la differenza di potenziale ai capi di un generatore di forza elettromotrice è pari alla sola $\mathcal{E}$, pertanto:

$$V_{AB} = \mathcal{E} = 50\ V \tag{25}$$

b) Dopo la chiusra di S_1, il circuito RC composto dal generatore di forza elettromotrice, dalla resistenza interna r e dal condensatore C_1 inzierà ad essere percorso da corrente elettrica. Asintoticamente, questa diminuirà fino a portari a zero quanto il condensatore C_1 risulterà completamente carico. In questa condizione quindi non circola corrente nel circuito, e la differenza di potenziale ai capi di C_1 è nuovamente pari a $\mathcal{E}$, pertanto la carica che si avrà immagazzinato sulle armature di C_1 sarà pari a:

$$q_1 = C_1 V_{AB} = C_1 \mathcal{E} = 3.25 \times 10^{-7}\ C \tag{26}$$

c) Chiudendo sia S_1 che S_2 il circuito si compone di un collegamento in parallelo di due condensatori. Per calcolare la costante di tempo del circuito è quindi necessario ricondursi alla capacità equivalente:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 \tag{27}$$

E quindi calcolare τ:

$$\tau = C_{eq} r = 7.15 \times 10^{-08}\ s \tag{28}$$

d) La corrente circolante in un circuito RC dipende dal tempo secondo la:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{r} e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{29}$$

Dopo $t = 3\tau$ troviamo:

$$i(3\tau) = \frac{\mathcal{E}}{r} e^{-3} = 0.996\ A \tag{30}$$

e) La potenza dissipata per effetto Joule dalla resistenza interna del generatore è pari a:

$$P = ri^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{r} e^{-6} = 2.48\ W \tag{31}$$

2.2 Esercizio 2

Un circuito percorso da corrente stazionaria è realizzato come rappresentato schematicamente in figura, ed è caratterizzato dalle seguenti componenti:

$\mathcal{E} = 120\ V$

$r = 10\ \Omega$

$R_1 = 115\ \Omega$

$R_2 = 270\ \Omega$

$R_3 = 95\ \Omega$

$R_4 = 190\ \Omega$

Determinare:

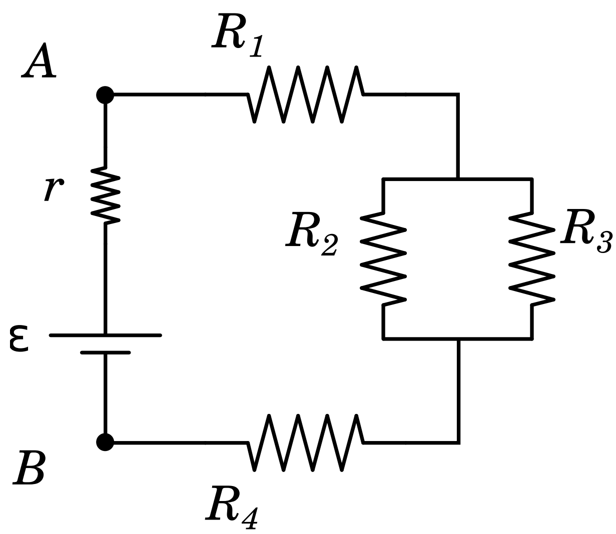
a) La resistenza equivalente ai capi A-B del circuito

b) La differenza di potenziale erogata ai capi A-B dal generatore di forza elettromotrice

c) L'intensità di corrente circolante attraverso il resistore R_2

d) La caduta di potenziale ai capi del resistore R_4

e) La potenza dissipata dal resistore R_3



---

a) Il calcolo della resistenza equivalente si compone di due resistenze collegate in serie (R_1 e R_4), a loro volta collegate in serie ad un parallelo tra le resistenze R_2 e R_3. Pertanto:

$$R_{eq} = R_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1} + R_4 = \tag{32}$$

$$= \frac{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 375\ \Omega \tag{33}$$

b) A circuito chiuso circola una corrente i. La differenza di potenziale ai capi di un generatore di forza elettromotrice reale, percorso da corrente è pari alla forza elettromotrice $\mathcal{E}$, meno la caduta di tensione dovuta alla resistenza interna al generatore r:

$$V_{AB} = \mathcal{E} - ir \tag{34}$$

Si può calcolare facilmente l'intensità di corrente circolante attraverso il circuito ad esempio rifacendosi alla legge di Ohm generalizzata.

$$0 = \mathcal{E} - i(r + R_{eq}) \tag{35}$$

Quindi:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{r + R_{eq}} \tag{36}$$

Pertanto:

$$V_{AB} = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{r + R_{eq}} r = \tag{37}$$

$$= \mathcal{E}\left(1 - \frac{r}{r + R_{eq}}\right) = 117\ V \tag{38}$$

c) Si può procedere applicando la legge di Ohm generalizzata, o anche semplicemente "decostruendo" la resistenza equivalente del circuito, e ricordandosi che la corrente circolante è costante in una serie di resistori. Procedendo in questo secondo modo, è possibile ricondursi alla differenza di potenziale ai capi del parallelo delle due resistenza R_2 e R_3, attraverso la legge di Ohm:

$$V_{23} = iR_{eq,23} = i\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1} = \tag{39}$$

$$= i\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \tag{40}$$

$$= \frac{\mathcal{E}}{r + R_{eq}} \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \tag{41}$$

E quindi calcolare i_2 applicando la legge di Ohm nuovamente, per la sola R_2:

$$i_2 = \frac{V_{23}}{R_2} = \tag{42}$$

$$= \frac{1}{\cancel{R_2}} \frac{\mathcal{E}}{r + R_{eq}} \frac{\cancel{R_2} R_3}{R_2 + R_3} = \tag{43}$$

$$= \frac{\mathcal{E} R_3}{(r + R_{eq})(R_2 + R_3)} = 0.0811\ A \tag{44}$$

d) Applicando nuovamente la legge di Ohm otteniamo:

$$V_4 = iR_4 = \tag{45}$$

$$= \frac{\mathcal{E} R_4}{r + R_{eq}} = 59.2\ V \tag{46}$$

e) La potenza dissipata per effetto Joule dalla resistenza R_3 si ottiene attraverso una tra le:

$$P_3 = R_3 i_3^2 = \frac{V_{23}^2}{R_3} \tag{47}$$

Ad esempio, si calcola la corrente i_3 analogamente a quanto visto in precedenza per i_2:

$$i_3 = \frac{\mathcal{E} R_2}{(r + R_{eq})(R_2 + R_3)} \tag{48}$$

E quindi si ottiene:

$$\begin{aligned} P_3 &= R_3 i_3^2 = \qquad (49) \\ &= R_3 \left(\frac{\mathcal{E} R_2}{(r + R_{eq})(R_2 + R_3)} \right)^2 = 5.04\ W \qquad (50) \end{aligned}$$

2.3 Esercizio 3

Una distribuzione infinita di carica è disposta su di un piano con densità uniforme $\sigma = +0.75 \times 10^{-3}\ C/m^2$. Una seconda distribuzione di carica con densità lineare $\lambda = +0.52 \times 10^{-4}\ C/m$ è posta su di un filo infinito, posizionato parallelamente al piano, a distanza $d = 4\ cm$ da esso.

Determinare, in un punto posizionato a metà tra il filo e la distribuzione planare di carica (a distanza quindi $d/2$ da entrambi):

a) Il modulo della componente del vettore campo elettrico dovuta al solo piano carico (si trascuri qui la presenza del filo)

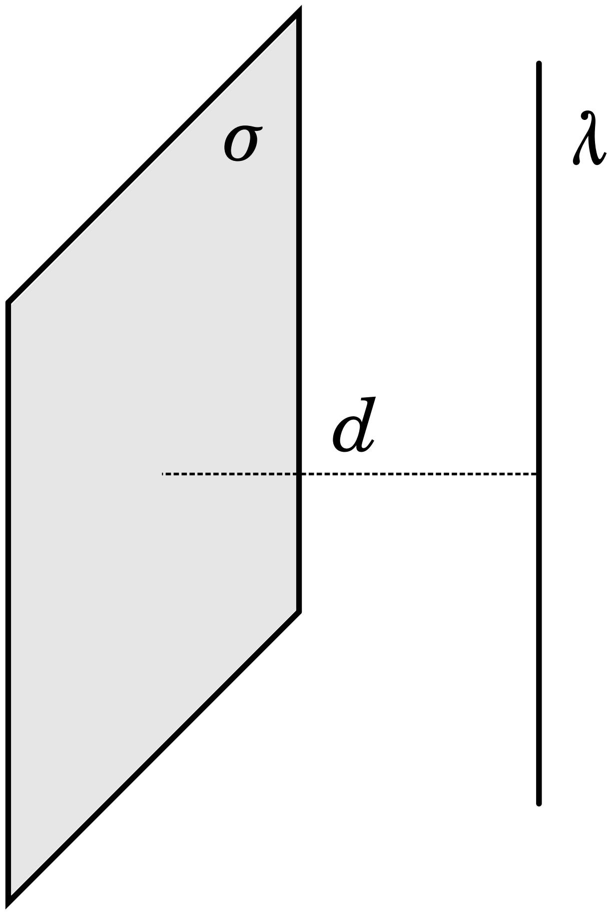
b) Il modulo della componente del vettore campo elettrico dovuta al solo filo carico (si trascuri qui la presenza del piano)

Considerando ora la presenza di entrambe le distribuzioni di carica, determinare:

a) Il modulo dell'accelerazione che un protone ($q = +1.6 \times 10^{-19}\ C$, $m = 1.67 \times 10^{-27}\ kg$) risentirebbe se posto a $d/2$

b) A quale distanza x dal piano infinito il campo elettrico totale si annulla

c) La differenza di potenziale tra i punti x e $d/2$



---

a) Il campo elettrico dovuto ad un piano uniformemente carico si ottiene semplicemente tramite l'applicazione della legge di Gauss.

$$\vec{E}_{piano}(r) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{r} \tag{51}$$

Il campo elettrico dovuto al solo piano carico è costante, e diretto come la normale al piano stesso. Pertanto:

$$E_{piano}(d/2) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 4.24 \times 10^7 \ V/m \tag{52}$$

b) Il campo elettrico dovuto ad un filo uniformemente carico si ottiene nuovamente tramite l'applicazione della legge di Gauss, utilizzando in questo caso una simmetria cilindrica.

$$\vec{E}_{filo}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r} \tag{53}$$

In questo caso il campo elettrico cala con la distanza dal filo, ed è diretto radialmente ad esso. Pertanto:

$$E_{filo}(d/2) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \frac{d}{2}} = \tag{54}$$

$$= \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0 d} = 4.67 \times 10^7 \ V/m \tag{55}$$

c) La forza elettrostatica risentita dal protone è dovuta al campo elettrico totale risultante nel punto.

$$\vec{F}_e = m\vec{a} = q\vec{E}_{tot}(d/2) \tag{56}$$

Per ricavare il campo elettrico totale risultate si ricorre al principio di sovrapposizione degli effetti, sommando vettorialmente i due campi elettrici ricavati in precedenza per le due singole configurazioni di carica:

$$\vec{E}_{tot}(d/2) = \vec{E}_{piano}(d/2) + \vec{E}_{filo}(d/2) \tag{57}$$

Occorre qui porre attenzione al fatto che mentre la direzione delle due componenti del campo elettrico giacciono lungo la stessa retta direttrice, i due versi sono opposti: $\vec{E}_{piano}$ è diretto verso il filo, mentre $\vec{E}_{filo}$ è diretto verso il piano. Pertanto, in modulo:

$$E_{tot}(d/2) = E_{piano}(d/2) - E_{filo}(d/2) = \tag{58}$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0 d} = \tag{59}$$

$$= \frac{\sigma\pi d - 2\lambda}{2\pi d\varepsilon_0} \tag{60}$$

L'accelerazione a cui è soggetto il protone è quindi pari a:

$$|a| = \left|\frac{q}{m}E_{tot}(d/2)\right| = \tag{61}$$

$$= \left|\frac{q}{m}\frac{\sigma\pi d - 2\lambda}{2\pi d\varepsilon_0}\right| = 4.20 \times 10^{14} \ m/s^2 \tag{62}$$

d) Tornando alla considerazione fatta nel punto precedente, il campo totale è dato dalla sovrapposizione degli effetti delle due distribuzioni di carica:

$$E_{tot} = E_{piano} - E_{filo} \tag{63}$$

Si può quindi valutare a quale distanza x dal piano si annulla il campo elettrico totale imponendo:

$$E_{tot} = E_{piano} - E_{filo} = 0 \tag{64}$$

Dove è solamente necessario ricordarsi di porre la distanza del punto x dal filo pari a $d - x$.

$$E_{piano}(x) - E_{filo}(d - x) = 0 \tag{65}$$

Di conseguenza:

$$E_{piano}(x) - E_{filo}(d - x) = 0 \tag{66}$$

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(d - x)} = 0 \tag{67}$$

$$x = d - \frac{\lambda}{\pi\sigma} = 1.79\ cm \tag{68}$$

e) Applichiamo la definizione di differnza di potenziale tra i due punti in esame. Si utilizza qui la notazione A e B, rispettivamente per il punto a distanza x e $d/2$ dal piano carico (e quindi rispettivamente $(d - x)$ e $d/2$ dal filo):

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}_{tot}(r) \cdot d\vec{r} = \tag{69}$$

$$= -\int_A^B \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \right) dr = \tag{70}$$

$$= -\int_A^B \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dr + \int_A^B \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = \tag{71}$$

$$= -\left[\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} r \right]_A^B + \left[\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \log(r) \right]_A^B \tag{72}$$

Bisogna a questo punto porre attenzione agli estremi di integrazione.

$$V_B - V_A = -\left[\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} r \right]_A^B + \left[\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \right]_A^B \tag{73}$$

$$= -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\frac{d}{2} - x) + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \log\left(\frac{\frac{d}{2}}{d - x} \right) = -1.80 \times 10^5\ V \tag{74}$$

Lo stesso risultato si può ottenere considerando la somma algebrica dei potenziali dovuti alle due distribuzioni di carica.

2.4 Esercizio 4

Due armature conduttrici cilindriche concentriche, di lunghezza $l = 9.7\ cm$ e diametri $d_1 = 3.7\ cm$ e $d_2 = 5.2\ cm$, sono poste ad una differenza di potenziale costante V per mezzo di un generatore esterno. All'equilibrio, il sistema immagazzina una carica $q = 2.3\ nC$.

Determinare:

a) La capacità del condensatore

b) A quale differenza di potenziale sono poste le armature

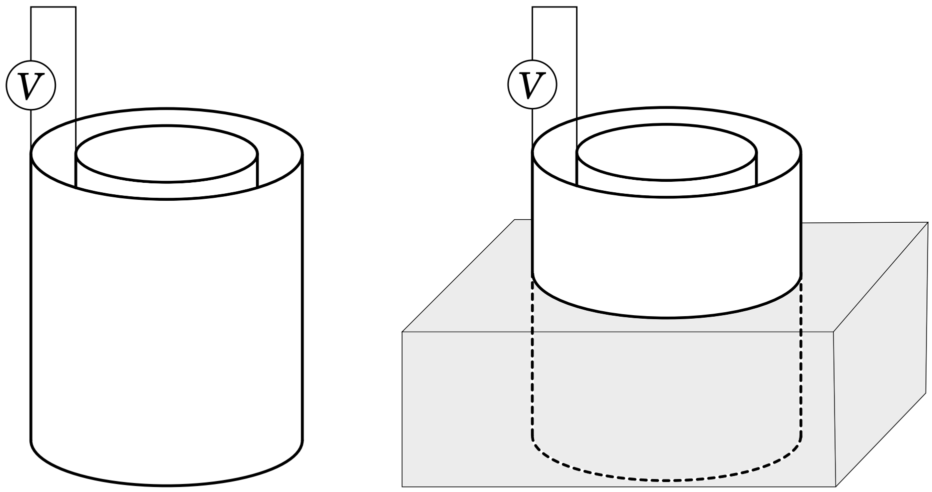
Mantenendo costante la differenza di potenziale esterna tra le armature, il condensatore è quindi per metà immerso in olio, di $\varepsilon_r = 2.4$.

Determinare:

a) La nuova capacità equivalente del condensatore

b) La variazione di energia potenziale elettrostatica del sistema

c) La carica di polarizzazione presente sulla superficie interna del dielettrico



---

a) La capacità di un condensatore è puramente legata alle sue proprietà geometriche. Per calcolare la capacità di un condensatore cilindrico si ricava il campo elettrico elettrico tra le armature tramite l'applicazione della legge di Gauss:

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{2\pi r l \varepsilon_0}\hat{r} \tag{75}$$

E da questo la differenza di potenziale tra l'armatura interna e esterna:

$$\begin{aligned} V &= -\int_{R_1}^{R_2} \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} = && (76)\\ &= -\left[\frac{q}{2\pi l \varepsilon_0} \log\left(r\right)\right]_{R_1}^{R_2} = && (77)\\ &= \frac{q}{2\pi l \varepsilon_0} \log\left(\frac{R_1}{R_2}\right) && (78) \end{aligned}$$

Da qui, si applica la definizione di capacità:

$$C = \frac{q}{V} = \tag{79}$$

$$= \frac{2\pi l \varepsilon_0}{\log\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} = \tag{80}$$

$$= \frac{2\pi l \varepsilon_0}{\log\left(\frac{d_1}{d_2}\right)} \tag{81}$$

E' necessario a questo punto porre attenzione al segno. La capacità è una quantità definita come positiva, mentre nella soluzione appena ricavata sembrerebbe che si possa ottenere un risultato negativo (dal segno del logaritmo). Questo è semplicemente da ritenersi legato al fatto che la differenza di potenziale calcolata in precedenza tra il raggio interno ed esterno del condensatore è negativa, se si parte dall'assunzione di una carica $+q$ depositata sulla faccia interna.

E' chiaro che per ricondursi alla capacità di un condensatore è indifferente il verso di integrazione, quindi è possibile scrivere:

$$C = \frac{q}{|V|} = \tag{82}$$

$$= \frac{2\pi l \varepsilon_0}{\left|\log\left(\frac{d_1}{d_2}\right)\right|} = \tag{83}$$

$$= 1.59 \times 10^{-11}\ F \tag{84}$$

b) La solzione a questo punto si può ricavare a partire dalla forma esplicita del potenziale, o nuovamente dalla definizione di capacità.

$$V = \frac{q}{2\pi l \varepsilon_0} \log\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \tag{85}$$

$$= \frac{q}{2\pi l \varepsilon_0} \log\left(\frac{d_1}{d_2}\right) \tag{86}$$

Nuovamente, il segno da attribuire alla differenza di potenziale è arbitrario:

$$V = \frac{q}{2\pi l \varepsilon_0} \left|\log\left(\frac{d_1}{d_2}\right)\right| = 145\ V \tag{87}$$

$$\tag{88}$$

c) Il condensatore parzialmente immerso in olio si può ricondurre ad un collegamento in parallelo di due condensatori cilindrici, uno in aria, e l'altro in olio, entrambi di altezza $l/2$, ed entrambi collegati alla differenza di potenziale V.

$$C_{aria} = \frac{2\pi \frac{l}{2} \varepsilon_0}{\left|\log\left(\frac{d_1}{d_2}\right)\right|} = \frac{C}{2} \tag{89}$$

$$C_{olio} = \varepsilon_r \frac{2\pi \frac{l}{2} \varepsilon_0}{\left|\log\left(\frac{d_1}{d_2}\right)\right|} = \varepsilon_r \frac{C}{2} \tag{90}$$

$$\tag{91}$$

Di conseguenza si può calcolare la capacità complessiva come:

$$C_{eq} = C_{aria} + C_{olio} = \tag{92}$$

$$= \frac{C}{2}(1 + \varepsilon_r) = 2.70 \times 10^{-11}\ F \tag{93}$$

d) A potenziale costante varia la carica accumulata sulle armature del condensatore nella fase di inserimento del sistema nel dielettrico, quindi:

$$\begin{aligned}
\Delta U_e &= U_e^{olio} - U_e^{aria} = && (94)\\
&= \frac{1}{2}C_{eq}V^2 - \frac{1}{2}CV^2 = && (95)\\
&= \frac{1}{2}V^2(C_{eq} - C) = && (96)\\
&= \frac{1}{2}V^2\left(\frac{C}{2}(1+\varepsilon_r) - C\right) = && (97)\\
&= \frac{1}{2}CV^2\left(\frac{1}{2}(1+\varepsilon_r) - 1\right) = && (98)\\
&= \frac{1}{2}CV^2\frac{\varepsilon_r - 1}{2} = 1.17 \times 10^{-07}\ J && (99)\\
& && (100)
\end{aligned}$$

e) La densità di carica indotta sulla superficie del dielettrico per effetto della polarizzazione è direttamente legata al vettore polarizzazione elettrica $\vec{P}$.

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} \tag{101}$$

Per ricavare $\vec{P}$ ci si ricodunce alla sua relazione con il campo elettrico e il vettore induzione elettrica (valide per un dielettrico omogeneo e isotropo):

$$\begin{aligned}
\vec{D} &= \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} && (102)\\
\vec{D} &= \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} && (103)\\
& && (104)
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\vec{P} &= \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} && (105)\\
& && (106)
\end{aligned}$$

Ricaviamo il vettore polarizzazione a partire dal campo elettrico calcolato sulla superficie interna del dielettrico:

$$\begin{aligned}
\vec{P}(R_1) &= \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}(R_1) = && (107)\\
&= \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{q_o}{2\pi l R_1 \varepsilon_0} = && (108)\\
&= (\varepsilon_r - 1)\frac{q_o}{2\pi l R_1} && (109)
\end{aligned}$$

Dove q_o è la carica libera depositata sull'armatura del condensatore immerso nel dielettrico, quindi:

$$q_0 = C_{olio}V = 2.76 \times 10^{-9}\ C \tag{110}$$

Volendo calcolare la carica accumulata sulla superficie del dielettrico (di area A) dovuta alla polarizzazione ci si riconduce quindi a:

$$
\begin{aligned}
q_P &= \sigma_P A = && (111)\\
&= -(\varepsilon_r - 1)\frac{q_o}{2\pi l R_1} A = && (112)\\
&= -(\varepsilon_r - 1)\frac{q_o}{2\pi l R_1}(2\pi R_1 l) = && (113)\\
&= -(\varepsilon_r - 1) q_o = && (114)\\
&= -(\varepsilon_r - 1) C_{olio} V = -3.864 \times 10^{-9}\ C && (115)\\
& && (116)
\end{aligned}
$$

Dove il segno $-$ deriva dal prototto scalare tra il vettore polarizzazione, diretto come $\vec{E}$, e il versore normale alla superficie del dielettrico, diretta in verso opposto ad esso.