Pool Meccanica & Termodinamica 6 Luglio 2021

1 Ciclo termodinamico

$n = 2$ moli di gas ideale, inizialmente nello stato A, sono messe in contatto termico con un serbatoio di calore alla temperatura $T_2 = 800\,\mathrm{K}$ e raggiungono lungo una trasformazione isocora reversibile lo stato B di equilibrio. Da B il gas viene fatto espandere lungo un'isoterma reversibile fino a raggiungere lo stato C di volume $V_C = 2V_B$. Infine, il ciclo viene chiuso facendo compiere al gas una trasformazione isobara reversibile che lo riporta nello stato A. Per questo gas il calore specifico molare a pressione costante dipende dalla temperatura con la legge $c_p = R\,(a + bT)$, con $a = 2$ e $b = 0.02$. Si determinino i calori scambiati lungo tutte le trasformazioni, il lavoro svolto dal gas, le variazioni di entropia del sistema lungo tutte le trasformazioni e il rendimento del ciclo.

Soluzione

$$c_v = c_p - R = R(c + bT) \qquad \Rightarrow \quad c = 1$$

$$T_C = T_B = 800\,\mathrm{K} \quad \text{perché isoterma}$$

$$V_A = V_B \qquad\qquad \text{perché isocora}$$

Da equazione di stato dei gas perfetti

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{V_A}{V_C} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad T_A = 400\,\mathrm{K}$$

Processo isocoro reversibile $A - B$: calore e variazione di entropia

$$\begin{aligned} Q_{AB} &= nR\int_{T_A}^{T_B} (c + bT)\,\mathrm{d}T = nR\left[c\,(T_B - T_A) + \frac{b}{2}\left(T_B^2 - T_A^2\right)\right] \\ &= nR\,(T_B - T_A)\left[c + \frac{b}{2}\,(T_A + T_B)\right] = 86473.9\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta S_{AB} &= nR\int\limits_{T_A}^{T_B}\left(\frac{c}{T}+b\right)\,\mathrm{d}T \\ &= nR\left[c\ln\frac{T_B}{T_A}+b\,(T_B-T_A)\right]=144.57\,\mathrm{J/K}\end{aligned}$$

Espansione isoterma $B-C$

$$W_{BC}=Q_{BC}=\int\limits_{V_A}^{V_B}\frac{nRT_B}{V}\,\mathrm{d}V=nRT_B\ln\frac{V_C}{V_B}=nrT_B\ln 2=9221.4\,\mathrm{J}$$

$$\Delta S_{BC}=\frac{Q_{BC}}{T_B}=nR\ln 2=11.53\,\mathrm{J/K}$$

Compressione isobara $C-A$

$$\begin{aligned}Q_{CA} &= nR\int\limits_{T_C}^{T_A}(a+bT)\,\mathrm{d}T \\ &= nR\,(T_A-T_C)\left[a+\frac{b}{2}\,(T_A+T_C)\right]=-93125.8\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta S_{CA} &= nR\int\limits_{T_C}^{T_A}\left(\frac{a}{T}+b\right)\,\mathrm{d}T \\ &= nR\left[a\ln\frac{T_A}{T_C}+b\,(T_A-T_C)\right]=-156.1\,\mathrm{J/K}\end{aligned}$$

Lavoro nel ciclo

$$W=Q_{AB}+Q_{BC}+Q_{CA}=2569.6\,\mathrm{J}$$

Rendimento

$$\eta=\frac{W}{Q_{AB}+Q_{BC}}=0.027$$

2 Ciclo termodinamico 2

$n = 3$ moli di gas ideale monoatomico si trovano inizialmente nello stato 1(A1) caratterizzato dai valori di temperatura $T_A = 300\,\mathrm{K}$ e di pressione $p_A = 0.2\,\mathrm{MPa}$. Tramite un'espansione adiabatica nel vuoto il gas viene portato allo stato B. Poi, con una compressione adiabatica irreversibile viene portato in uno stato C e qui viene posto in contatto con una sorgente a temperatura T_A che lo fa ritornare allo stato iniziale con una compressione isobara irreversibile. Nella trasformazione $B - C$ il lavoro compiuto vale $W_{BC} = -3.7 \times 10^4\,\mathrm{J}$. Si calcolino la temperatura T_C, il volume V_C, il calore scambiato durante la trasformazione $C - A$, Q_{CA}, il lavoro svolto in $C - A$ W_{CA} e la variazione di entropia dell'universo ΔS_u.

Soluzione

$$c_v = 1.5R \quad c_p = 2.5R$$

$$T_B = T_A = 300\,\mathrm{K} \quad \text{perché adiabatica libera e isoterma}$$

Adiabatica irreversibile $B - C$

$$W_{BC} = -nc_v\,(T_C - T_B) = nc_v\,(T_A - T_C)$$

$$T_C = T_A - \frac{W_{BC}}{nc_v} = 1289\,\mathrm{K}$$

Compressione isobara irreversibile $C - A \quad \Rightarrow \quad p_C = p_A$

$$V_C = \frac{nRT_C}{p_A} = 0.16\,\mathrm{m}^3$$

$$Q_{CA} = nc_p\,(T_A - T_C) = -61.7\,\mathrm{kJ}$$

$$W_{CA} = p_A\,(V_A - V_C) = Q_{CA} - W_{BC} = -24.7\,\mathrm{kJ}$$

Variazione entropia

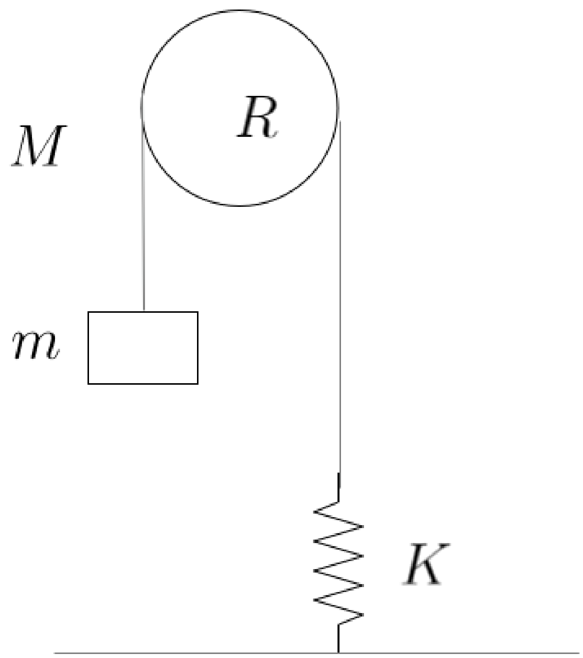
$$\Delta S_s = 0 \quad \text{perché ciclo} \quad \Rightarrow \quad \Delta S_u = \Delta S_a$$

L'ambiente assorbe calore solo durante $C - A$ alla temperatura T_A

$$Q_a = -Q_{CA} \quad \Rightarrow \quad \Delta S_a = \frac{-Q_{CA}}{T_A} = \Delta S_u = 205.6\,\mathrm{J/K}$$

3 Molla, peso e carrucola

Una massa $m = 150\,\mathrm{g}$ è appesa tramite un filo inestensibile di massa nulla ad un disco pieno che funge da carrucola, di massa $M = 622\,\mathrm{g}$ e raggio $R = 12\,\mathrm{cm}$. Dall'altro capo, il filo è attaccato ad una molla ideale di costante elastica $K = 8.3\,\mathrm{N/m}$. Il filo non slitta sulla carrucola che può ruotare senza attrito attorno al proprio asse. Si calcoli l'allungamento



x_0 della molla all'equilibrio.

Se il peso m viene spostato leggermente verso il basso e poi rilasciato, si calcoli la frequenza delle piccole oscillazioni ω.

Se, partendo dalla posizione di equilibrio, si taglia il filo dal lato della molla, si calcolino la tensione T del filo, l'accelerazione a con cui cade il peso, la velocità di questo dopo che è caduto di $h = 1.5\,\mathrm{m}$ e la velocità angolare ω_1 della carrucola in questo istante.

Soluzione

$$x_0 = \frac{mg}{K} = 0.177\,\mathrm{m}$$

Siano T_1 la tensione sul filo dal lato della molla e T_2 la tensione del filo dal lato del peso. Sia $I = MR^2/2$ il momento di inerzia della carrucola rispetto al suo asse. Equazioni del moto

$$ma \quad = \quad mg - T_2$$

$$
\begin{aligned}
(T_2 - T_1)\, R &= I\dot{\omega} = I\frac{a}{R} \\
T_1 &= K(x + x_0)
\end{aligned}
$$

con $a = \ddot{x}$ Da queste si ricava

$$
\left(m + \frac{1}{2}M\right)\ddot{x} = -Kx \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{2K}{M + 2m} \quad \Rightarrow \quad \omega = 4.24\,\mathrm{rad/s}
$$

Dopo il taglio del filo, sia T la tensione del filo dal lato del peso

$$
\begin{aligned}
ma &= = mg - T \\
TR &= I\frac{a}{R}
\end{aligned}
$$

Da queste si ricava

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}Ma \\
a &= \frac{2m}{2m + M}g = 3.19\,\mathrm{m/s^2} \\
T &= 0.9927\,\mathrm{N}
\end{aligned}
$$

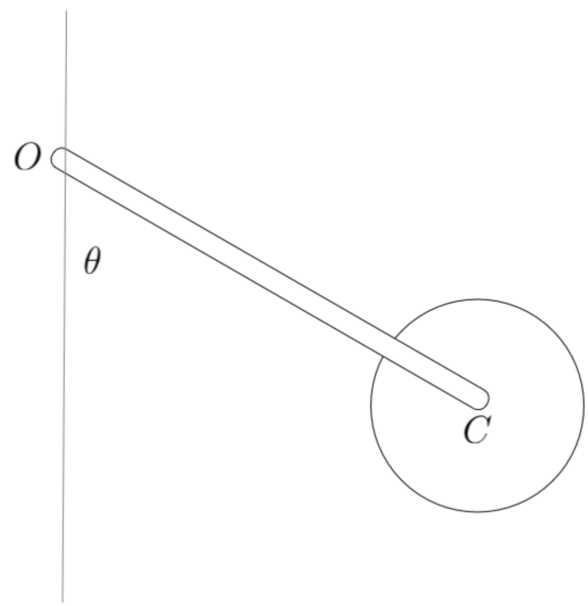
Siccome l'accelerazione è costante, dovuta ad una forza conservativa

$$
v = \sqrt{2ah} = 3.09\,\mathrm{m/s}
$$

$$
\omega_1 = \frac{v}{R} = 25.8\,\mathrm{rad/s}
$$

4 Disco imperniato su asta

Un'asta di massa $m = 1\,\mathrm{kg}$ e lunga $d = 1.65\,\mathrm{m}$ è imperniata senza attrito in O e può ruotare liberamente intorno ad un asse passante per O ed ortogonale al piano del disegno. All'altra estremità dell'asta è imperniato per il suo centro un disco di massa $M = 18\,\mathrm{kg}$ e di raggio $R = 34\,\mathrm{cm}$. Il perno in C è bloccato cosicché il disco non può ruotare in torno a C. Inizialmente il sistema è posizionato in modo che l'asta formi un angolo $\theta = 63°$ con la verticale. Si calcoli il momento di inerzia I_1 rispetto al polo O.



Il sistema viene rilasciato per $t = 0$ con venlocità angolare iniziale nulla. Si calcoli la velocità angolare ω quando il punto C passa sotto la verticale di O, cioè per $\theta = 0$.

Quando $\theta = 0$, il perno, che blocca la rotazione del disco intorno al proprio asse, viene rimosso. Si calcoli il valore dell'angolo θ' nella risalita del sistema.

Si calcoli in rad/s la frequenza di piccole oscillazioni del sistema quando il perno in C è bloccato ω_{0b} e quando è sbloccato ω_{0s}.

Si indichi il tipo di moto del disco quando il perno in C è bloccato e quando è sbloccato.

Soluzione Momento di inerzia

$$I_1 = \frac{1}{3}md^2 + \frac{1}{2}MR^2 + Md^2 = 50.953\,\mathrm{kg\,m^2}$$

Conservazione energia

$$E_p(\theta) = \left(\frac{m}{2} + M\right) gd\,(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}I_1\omega^2(\theta = 0)$$

da cui

$$\omega(0) = \sqrt{\frac{2E_p(0)}{I_1}} = 2.533\,\mathrm{rad/s}$$

Per $\theta = 0$ il perno in C si sblocca. L'energia cinetica rotazionale del disco non cambia più per l'assenza di attrito in C.

Quindi, la nuova conservazione dell'energia comporta

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}md^2 + \frac{1}{2}MR^2 + Md^2\right]\omega^2 = \left(\frac{m}{2} + M\right)gd\left(1 - \cos\theta'\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega^2$$

Definisco il nuovo momento di inerzia dopo lo sbloccaggio del perno

$$I_2 = \frac{1}{3}md^2 + Md^2 = 42.913\,\mathrm{gg\,m^2}$$

Si ha allora

$$\theta' = \cos^{-1}\left[1 - \left(\frac{m+3M}{m+2M}\right)\left(\frac{d\omega^2}{3g}\right)\right] = 62.28^\circ$$

Per un pendolo composto

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{(m+M)\,gd_{CM}}}$$

$$d_{CM} = \frac{m/2+M}{m+M}d = 1.607\,\mathrm{m}$$

I due periodi di oscillazione sono

$$T_1 = 2.592\,\mathrm{s} \quad \text{perno bloccato}$$

$$T_2 = 2.565\,\mathrm{s} \quad \text{perno sbloccato}$$

Tipi di moto

- perno bloccato: circolare
- perno sbloccato: traslatorio