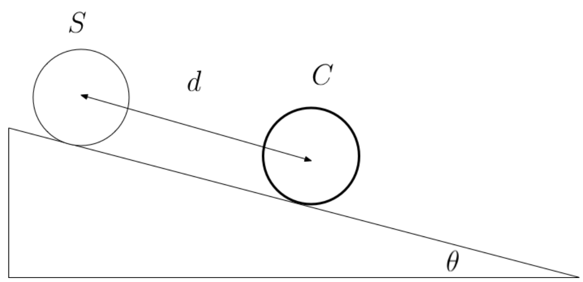
Pool Meccanica AFB 10 settembre 2021

1 Corpi su piano inclinato

Una sfera S omogenea di massa $M = 10\,\mathrm{kg}$ e un disco pieno omogeneo C di massa $m = 3\,\mathrm{kg}$ hanno lo stesso raggio $R = 0.15\,\mathrm{m}$ e si trovano inizialmente in quiete su un piano inclinato scabro di coefficiente di attrito $\mu = 0.23$ e di inclinazione $\theta = 32°$. I centri di massa dei due corpi distano inizialmente $d = 3\,\mathrm{m}$. Per $t = 0$ i due corpi iniziano a rotolare senza strisciare



verso il basso. Si calcolino le accelerazioni angolari α_S e α_C dei due corpi; i moduli delle reazioni vincolari sui due corpi V_S e V_C. Si calcoli l'intervallo di tempo Δt rispetto all'inizio quando i due corpi si toccano. E' soddisfatta la condizione di puro rotolamento? Si scelga un sistema di assi cartesiani $(x, y$ con l'asse x diretto lungo il piano inclinato e quello y ortogonale ad esse.

Soluzione Per sfruttare la seconda equazione cardinale della dinamica si scelgano come poli i punti di contatto fra i corpi ed il piano. Il momento di inerzia lo si calcola tramite il teorema di Steiner.

$$I_S = \frac{2}{5}MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5}MR^2 = 0.315\,\mathrm{kg\,m^2}$$

$$I_C = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2 = 0.101\,\mathrm{kg\,m^2}$$

Proiettando la seconda equazione cardinale lungo l'asse di rotazione per i due corpi si ha

$$\alpha_S = \frac{MgR\sin\theta}{I_S} = 24.8\,\mathrm{rad/s^2}$$

$$\alpha_C = \frac{MgR\sin\theta}{I_S} = 23.1\,\mathrm{rad/s^2}$$

Per l'accelerazione di entrambi i centri di massa si ha $a = \alpha R$.

Per trovare le reazioni vincolari, proiettando sugli assi scelti

$$V_{S,x} + Mg\sin\theta = M\alpha_S R \qquad V_{S,y} - Mg\cos\theta = 0$$

$$V_{C,x} + mg\sin\theta = m\alpha_C R \qquad V_{C,y} - mg\cos\theta = 0$$

I moduli delle reazioni vincolari sono

$$V_S = M\sqrt{(\alpha_S R - g\sin\theta)^2 + (g\cos\theta)^2} = 84.5\,\mathrm{N}$$

$$V_C = m\sqrt{(\alpha_C R - g\sin\theta)^2 + (g\cos\theta)^2} = 25.5\,\mathrm{N}$$

Per toccarsi i due corpi devono percorrere la distanza $\ell = d - 2R$. Nel sistema di riferimento del disco la sfera si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione

$$a'_S = R\,(\alpha_S - \alpha_C) = 0.248\,\mathrm{m/s^2}$$

per cui

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2\ell}{a'_S}} = 4.67\,\mathrm{s}$$

2 Blocchetto su tavola

Una tavola di massa $M = 1.5\,\mathrm{kg}$ si trova in quiete su un piano liscio. Sulla superficie superiore, scabra, della tavola viene lanciato un blocchetto di massa $m = 0.1\,\mathrm{kg}$ con velocità iniziale $v_0 = 2.8\,\mathrm{m/s}$. Il coefficiente di attrito tra blocchetto e tavola vale $\mu = 0.45$. Il blocchetto striscia fino a fermarsi sulla tavola. Si calcolino:

1- la velocità finale V del complesso tavola + blocchetto;
2- il lavoro totale L svolto dalle forze di attrito;
3- la distanza h percorsa dal blocchetto sulla tavola fino al suo arresto;
4- il lavoro delle forze di attrito sul blocchetto L_b;
5- il lavoro delle forze di attrito sulla tavola L_t;
6- la distanza d percorsa dalla tavola finché il blocchetto è in moto su di essa.

Soluzione Le forze di attrito sono forze interne. Per il teorema delle forze vive, il lavoro delle forze eguaglia la variazione di energia cinetica.

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}(M+m)V^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Si conserva la quantità di moto

$$mv_0 = (M+m)V \qquad \rightarrow \qquad V = v_0\frac{m}{m+M} = 0.175\,\mathrm{m/s}$$

da cui

$$\Delta E_k = -\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}v_0^2 = -0.3675\,\mathrm{J} = -L$$

Il lavoro di forze interne è indipendente dal riferimento. Quindi

$$\mu mgh = L \qquad \rightarrow \qquad h = \frac{L}{\mu mg} = 0.832\,\mathrm{m}$$

$$L_b = \frac{1}{2}m\left(V^2 - v_0^2\right) = -0.39\,\mathrm{J}$$

$$L_t = \frac{1}{2}MV^2 = 0.023\,\mathrm{J}$$

$$L_t = \frac{1}{2}MV^2 = m\mu gd \quad \rightarrow \quad d = \frac{L_t}{\mu mg} = 0.052\,\mathrm{m}$$

3 Disco che rotola su piano inclinato

Un disco omogeneo di massa $m = 0.1\,\mathrm{kg}$ e raggio $R = 20\,\mathrm{cm}$ scende lungo un piano inclinato di un angolo $\theta = 30°$ rispetto all'orizzontale. Inizialmente il disco è fermo. La prima parte del piano inclinato è liscia. Si calcolino:

1- l'accelerazione del baricentro del disco a_c in $\mathrm{m/s^2}$ nella parte liscia;

2- la velocità angolare del disco ω_0 in rad/s nella parte liscia;

Dopo un tratto $L = 15\,\mathrm{cm}$ il piano diviene scabro con coefficiente di attrito $\mu = 0.32$.

Si determini il valore in m/s della velocità v_0 con cui il disco entra nella regione scabra del piano.

Si determini l'intervallo di tempo τ trascorso dal disco sulla regione scabra del piano prima che il suo moto si trasformi in moto di puro rotolamento.

Qual è il valore minimo del coefficiente di attrito μ_m affinché il moto del disco divenga di puro rotolamento?

Supponendo che $\mu \to \infty$, trovare l'impulso P delle forze esterne e l'energia E dissipata per attrito.

Nota bene: si consiglia di usare il centro di massa come polo per l'equazione cardinale dei momenti. Nella regione scabra si assuma che il moto del disco sia da sinistra verso destra e si prenda come verso di rotazione positivo quello antiorario. Conviene inoltre ricavare la velocità v_P del punto di contatto istantaneo tra disco e piano.

Per il calcolo dell'impulso delle forze esterne si calcoli l'impulso delle forze di attrito e se ne prenda il limite per $\mu \to \infty$, ricordando che una forza costante fornisce un impulso nullo se il tempo durante il quale agisce tende a zero. Analogamente per l'energia dissipata la si calcoli per un tempo τ e se ne prenda il limite per $\mu \to \infty$.

Soluzione Nel percorso lungo la parte liscia del piano, sia la gravità che la reazione vincolare hanno momento nullo rispetto al centro di massa. Ne consegue

$$a_c = g \sin\theta = 4.905, \mathrm{m/s^2}$$

$$\omega = 0$$

La velocità del baricentro del disco al momento in cui entra nella regione scabra del piano è

$$v_0 = \sqrt{2gL\sin\theta} = 1.213\,\mathrm{m/s}$$

Le equazioni cardinali della dinamica divengono, prendendo come polo il baricentro,

$$a_c = g\sin\theta - \mu g\cos\theta$$

$$I_c\dot{\omega} = -\mu m g R\cos\theta \qquad\qquad I_c = \frac{1}{2}mR^2$$

da cui

$$v_c(t) = v_0 + g(\sin\theta - \mu\cos\theta)t$$

$$\omega(t) = -\frac{\mu m g R\cos\theta}{I_c}t = -\frac{2\mu g\cos\theta}{R}t$$

Un punto P a contatto istantaneo col piano inclinato ha velocità

$$v_P(t) = v_c(t) + \omega(t)R = v_0 + g(\sin\theta - 3\mu\cos\theta)t$$

La condizione di puro rotolamento è $v_P(\tau) = 0$ da cui

$$\tau = -\frac{v_0}{g(\sin\theta - 3\mu\cos\theta)} = 0.373\,\mathrm{s}$$

Il valore minimo del coefficiente di attrito vale

$$\mu_m = \frac{1}{3}\tan\theta = 0.192$$

Per $\mu \to \infty$, $\tau \to 0$ e l'impulso dovuto alla gravità tende a zero. L'impulso delle forze di attrito vale

$$P_{\mathrm{att}} = -\mu m g\cos\theta\tau = \frac{\mu m g v_0\cos\theta}{g(\sin\theta - 3\mu\cos\theta)}$$

L'impulso delle forze esterne vale

$$P = \lim_{\mu\to\infty} P_{\mathrm{att}} = -\frac{m v_0}{3} = 4.04\times 10^{-2}\,\mathrm{Ns}$$

La variazione di energia cinetica vale

$$\begin{aligned}
\Delta E &= -\int_0^\tau \mu m g\cos\theta v_P(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\mu m g\cos\theta\int_0^\tau [v_0 + g(\sin\theta - 3\mu\cos\theta)]\,\mathrm{d}t = -\mu m g\cos\theta\int_0^\tau v_0\left[1 - \frac{t}{\tau}\right]\mathrm{d}t \\
&= -\mu m g v_0\cos\theta\frac{\tau}{2} = \mu m g\cos\theta\frac{v_0^2}{2g(\sin\theta - 3\mu\cos\theta)}
\end{aligned}$$

e nel limite $\mu \to \infty$, cioè $\tau \to 0$,

$$\Delta E = -\frac{1}{6}m v_0^2 = -2.45\times 10^{-2}\,\mathrm{J}$$