1 Urti e fenomeni impulsivi

1.1 Esercizio 3

Il pendolo di un orologio si compone di un'asta lunga $L = 45\ cm$ e di massa $M_a = 120\ g$, collegata ad un disco di raggio $R = 7\ cm$ e di massa $M_d = 1.25\ kg$. Il pendolo è vincolato in un punto estremo dell'asta, e oscilla formando un angolo massimo rispetto la verticale di $\alpha = 7°$.

Con una cerbottana si spara un proiettile di massa $m = 30\ g$ che colpisce e rimane conficcato nel pendolo quando questo raggiunge il suo punto di minima altezza (O in figura). Il moto del pedolo viene completamente arrestato nell'impatto.

Determinare:

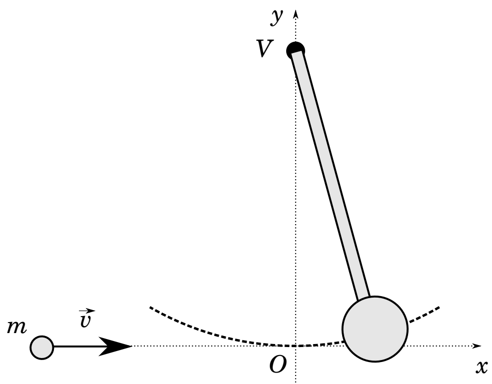
a) Il momento d'inerzia del pendolo

b) La velocità angolare del pendolo prima dell'urto

c) La velocità alla quale si muoveva il proiettile prima dell'urto

d) Il vettore impulso trasferito nell'urto

e) L'energia dissipata nell'urto



---

a) Il momento d'inerzia del pendolo è dovuto all'asta, rotante per un suo estremo posto in V, e al disco, rotante attorno al vincolo V, quindi posto a distanza $L + R$ rispetto il suo centro di massa. Utilizzando il teorema di Huygens-Steiner si può quindi ricavare:

$$I = I^V_{asta} + I^V_{disco} = \tag{1}$$

$$= \frac{1}{3} M_a L^2 + \left(\frac{1}{2} M_d R^2 + M_d (L + R)^2 \right) = \tag{2}$$

$$= 0.349\ kg\, m^2 \tag{3}$$

b) Sapendo che l'urto avviene quanto il pendolo passa per la verticale, e che l'angolo massimo di oscillazione del pendolo prima dell'urto corrisponde ad α, possiamo utilizzare la conservazione dell'energia meccanica per calcolare ω.

$$(M_a + M_d) g y^{max}_{CM} = \frac{1}{2} I \omega^2 + (M_a + M_d) g y^{min}_{CM} \tag{4}$$

Il centro di massa del pendolo si abbassa di $\Delta y_C M$ nel passare dalla quota massima, alla quale il pendolo ha $\omega = 0$, al punto O.

$$(M_a + M_d) g \Delta y_{CM} = \frac{1}{2} I \omega^2 \tag{5}$$

Dove Δy_{CM} è semplicemente dato da:

$$\Delta y_{CM} = \frac{M_a \frac{L}{2} + M_d(L+R)}{M_a + M_d}(1-\cos\alpha) \tag{6}$$

Quindi:

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{I}\left(M_a\frac{L}{2} + M_d(L+R)\right)(1-\cos\alpha)} = \tag{7}$$

$$= 0.533\; rad/s \tag{8}$$

c) L'urto è chiaramente un fenomeno impulsivo di natura completmente anelastica, quindi non si conserva l'energia. È presente una forza impulsiva esterna, la reazione del vincolo, pertanto non si conserva la quantità di moto. Si conserva invece il momento angolare del sistema, se calcolato rispetto al vincolo, rispetto al quale il momento della forza impulsiva esterna è nullo.

$$\Delta\vec{L}_V = 0 \tag{9}$$

Prima dell'urto il proiettile e il pendolo contribuiscono al momento angolare del sistema. Dopo l'urto, essendo il sistema pendolo+proiettile completamente fermo, il momento angolare totale del sistema deve risultare nullo, pertanto:

$$(L+R)mv_{stop} - \omega I = 0 \tag{10}$$

Da questa è possibile ricavare:

$$v_{stop} = \frac{\omega I}{(L+R)m} = \tag{11}$$

$$= 11.9\; m/s \tag{12}$$

d) Il teorema dell'impulso permette di scrivere che l'impulso è pari alla variazione di quanità di moto nell'urto:

$$\vec{J} = \Delta\vec{p} \tag{13}$$

La variazione di quantità di moto del sistema ha due contributi, uno dovuto alla quantità di moto iniziale del proiettile, e l'altro alla quantità di moto iniziale del pendolo.

$$\vec{J} = \vec{p}_f - \vec{p}_i \tag{14}$$

Dove $\vec{p}_f = 0$ (l'intero sistema è fermo dopo l'urto), mentre:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_{proiettile} + \vec{p}_{pendolo} = \tag{15}$$

$$= m\vec{v}_{stop} + (M_a + M_d)\vec{v}^{\,CM}_{pendolo} = \tag{16}$$

$$= (m\, v_{stop} - (M_a + M_d)\,\omega\, y_{CM})\,\hat{\imath} = \tag{17}$$

$$= \omega\left(\frac{I}{L+R} - M_a\frac{L}{2} - Md(L+R)\right)\hat{\imath} \tag{18}$$

Pertanto:

$$\vec{J} = -\vec{p}_i = \tag{19}$$

$$= -\omega\left(\frac{I}{L+R} - M_a\frac{L}{2} - Md(L+R)\right)\hat{\imath} = \tag{20}$$

$$= 2.95\times 10^{-3}\,\hat{\imath}\; Ns \tag{21}$$

e) Nell'urto l'energia dissipata è semplicemente data dalla somma dei contributi di energia cinetica dei due elementi, proiettile e pendolo:

$$= E_k^i - E_k^f = \tag{22}$$

$$= \frac{1}{2}m\ v_{stop}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \tag{23}$$

$$= 2.18\ J \tag{24}$$

2 Elettrostatica

2.1 Esercizio 1

Un sistema di 3 cariche puntiformi e' composto come in figura, con $l = 6.2\ cm$ e $\theta = 45°$. Le cariche sono pari a:

$$q_A = +1.4\ \mu C$$
$$q_B = +2.7\ \mu C$$
$$q_C = -3.1\ \mu C$$

Determinare:

a) L'energia potenziale elettrostatica del sistema (posto a zero il potenziale all'infinito dalla distribuzione di carica)

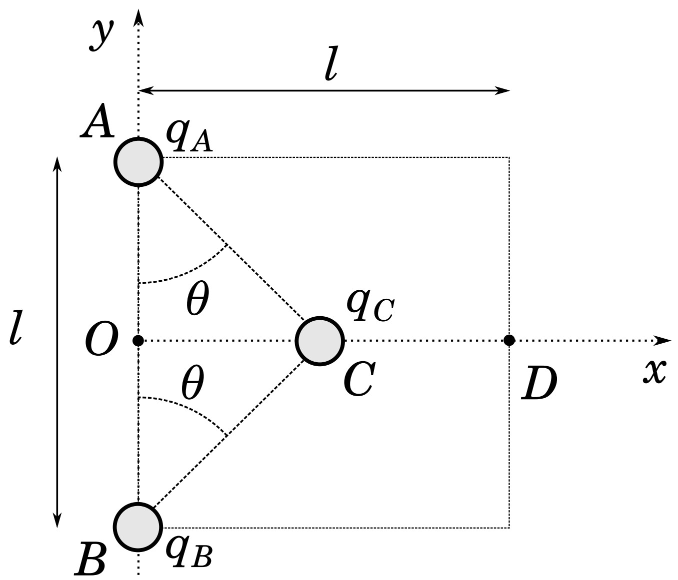
b) Il campo elettrico in un punto D, posto alle coordinate $(l, 0)$ rispetto il sistema di riferimento in figura

Una nuova carica $q_D = +4.2\ \mu C$, inzialmente a distanza estremamente elevata dalla distribuzione di carica, viene portata al punto D, calcolare:
Determinare:

c) La nuova energia potenziale del sistema

d) Il lavoro compiuto dalla forza esterna nel portare la carica q_D in D

e) Il modulo del campo elettrico che la nuova distribuzione di carica genera in un punto P, posto alle coordinate $(7.5\ m, 6.8\ m)$ rispetto il sistema di riferimento in figura



---

a) L'energia potenziale elettrostatica di un sistema di cariche e' data da:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} q_i V_{j,i} \tag{25}$$

O dalle altre forme equivalenti che permettono di evitare i noti problemi legati a doppi conteggi.
E' quindi necessario ricavare il potenziale associato alle cariche presenti nella distribuzione:

$$V_{A,B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_B}{l} \tag{26}$$
$$V_{A,C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_C}{\sqrt{2}l} \tag{27}$$
$$V_{B,A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_A}{l} \tag{28}$$
$$V_{B,C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_C}{\sqrt{2}l} \tag{29}$$
$$V_{C,A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_A}{\sqrt{2}l} \tag{30}$$
$$V_{C,B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_B}{\sqrt{2}l} \tag{31}$$
$$\tag{32}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
U_{ABC} = \frac{1}{2} & \sum_{i\neq j} q_i V_{j,i} = && (33)\\
= \frac{1}{2}[& \quad q_A V_{B,A} + q_A V_{C,A} + && (34)\\
& q_B V_{A,B} + q_B V_{C,B} + && (35)\\
& q_C V_{A,C} + q_C V_{B,C}] = && (36)\\
= \frac{1}{2} & \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_A q_B}{l} + \frac{q_A q_C}{\sqrt{2}l} + \frac{q_B q_A}{l} + \frac{q_B q_C}{\sqrt{2}l} + \frac{q_C q_A}{\sqrt{2}l} + \frac{q_C q_B}{\sqrt{2}l}\right) = && (37)\\
= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} & \left(\frac{q_A q_B}{l} + \frac{q_A q_C}{\sqrt{2}l} + \frac{q_B q_C}{\sqrt{2}l}\right) = && (38)\\
= 1.323\ J & && (39)
\end{aligned}$$

(Lo stesso risultato poteva essere ricavato utilizzando un diverso approccio, ad esempio considerando i contributi all'energia potenziale elettrostatica ottenuti "costruendo" la distribuzione di carica portando una alla volta ciascuna delle 3 cariche dall'infinito, e calcolando l'incremento di energia del sistema dovuto a ciascuna).

b) Il campo elettrostatico in D si puo' calcolare attraverso la sovrapposizione dei contributi al campo delle 3 cariche:

$$\vec{E}_D = \vec{E}_{D,A} + \vec{E}_{D,B} + \vec{E}_{D,C} \tag{40}$$

Dove:

$$\begin{cases} \vec{E}_{D,A} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_A}{r_{AD}^2}\hat{r}_{AD} \\ \vec{E}_{D,B} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_B}{r_{BD}^2}\hat{r}_{BD} \\ \vec{E}_{D,C} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_C}{r_{CD}^2}\hat{r}_{CD} \end{cases} \tag{41}$$

Dove, utilizzando il sistema di riferimento in figura, si ricavano le componenti dei vettori $\vec{r}_{ij}$:

$$\begin{cases} r_{AD} &= \frac{\sqrt{5}}{2}l \\ r_{BD} &= \frac{\sqrt{5}}{2}l \\ r_{CD} &= \frac{1}{2}l \end{cases} \tag{42}$$

$$\begin{cases} \hat{r}_{AD} &= \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{j} \\ \hat{r}_{BD} &= \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{j} \\ \hat{r}_{CD} &= \hat{i} \end{cases} \tag{43}$$

Pertanto:

$$\vec{E}_D = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{4q_A}{5l^2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\hat{\imath} - \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{\jmath}\right) + \right. \tag{44}$$

$$\frac{4q_B}{5l^2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\hat{\imath} + \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{\jmath}\right) + \tag{45}$$

$$\left.\frac{4q_C}{l^2}\left(\hat{\imath}\right)\right] = \tag{46}$$

$$= \frac{1}{\pi\varepsilon_0 l^2}\left[\left(\frac{2}{5\sqrt{5}}(q_A + q_B) + q_C\right)\hat{\imath} + \left(\frac{1}{5\sqrt{5}}(-q_A + q_B)\right)\hat{\jmath}\right] = \tag{47}$$

$$= (-2.21 \times 10^7\ \hat{\imath} + 1.09 \times 10^6\ \hat{\jmath})\ \frac{V}{m} \tag{48}$$

c) La nuova energia potenziale del sistema equivale all'energia potenziale precedentemente calcolata, sommata al contributo dovuto al posizionamento della nuova carica q_D.

Possiamo facilmente calcolare quest'ultimo come:

$$U_D = q_D V_{A,D} + q_D V_{B,D} + q_D V_{B,D} = \tag{49}$$

$$= q_D\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_A}{r_{AD}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_B}{r_{BD}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_C}{r_{CD}}\right) = \tag{50}$$

$$= \frac{q_D}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2q_A}{\sqrt{5}l} + \frac{2q_B}{\sqrt{5}l} + \frac{2q_C}{l}\right) \tag{51}$$

L'energia potenziale elettrostatica complessiva e' quindi pari a:

$$U_{ABCD} = U_{ABC} + U_D = \tag{52}$$

$$= -0.219\ J \tag{53}$$

d) Il lavoro compiuto dalla forza esterna per portare q_D dall'infinito al punto D è da considerarsi compiuto *contro* il campo elettostatico, quindi:

$$W_{ext} = -W_{el} = -(-\Delta U_e) = +U_D = \tag{54}$$

$$= -1.54\ J \tag{55}$$

e) Per calcolare il modulo del campo in P si puo' ricorrere nuovamente al principio di sovrapposizione degli effetti, calcolando i singoli contributi al campo elettrico in P.

D'altro canto e' pero' immediato notare che il punto P si trova a grande distanza r_P dalla distribuzione di carica in esame rispetto la distanza tra le singole cariche che la compongono ($r_P \gg l$), infatti $r_P = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} = 10.1\ m$.

Utilizzando la legge di Gauss e' possibile considerare una superficie sferica chiusa, centrata in O, su cui si trovi il punto P, e calcolare quindi il campo elettrico in P come:

$$\oint_\Sigma \vec{E}(r) \cdot \hat{n} dA = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} \tag{56}$$

Quindi:

$$\vec{E}(r_P) = \frac{\sum q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r_P^2}\hat{r} \tag{57}$$

Il cui modulo e' pari a:

$$E(r_P) = \frac{\sum q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r_P^2} = \tag{58}$$

$$= \frac{q_A + q_B + q_C + q_D}{4\pi\varepsilon_0 (x_P^2 + y_P^2)} = \tag{59}$$

$$= 456 \, \frac{V}{m} \tag{60}$$

2.2 Esercizio 2

Una distribuzione uniforme di carica è disposta lungo un anello sottile di raggio $R = 6.5\ cm$. Sapendo che il campo elettrico generato dalla distribuzione di carica in un punto P posto a distanza $d = 57\ cm$ lungo l'asse dell'anello è pari a $E_P = 2.34 \times 10^2\ \frac{V}{m}$, ed è diretto nel verso positivo dell'asse x, determinare:

a) La densità di carica depositata lungo l'anello

b) Il potenziale dovuto alla distribuzione di carica nel punto P, posto il potenziale nullo all'infinito $V_\infty = 0$

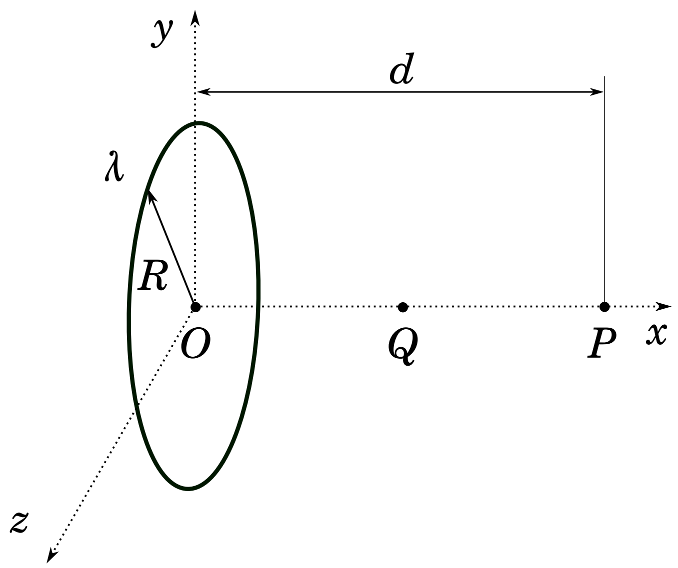
In P viene quindi posta una particella carica negativa (massa $m_p = 1.67 \times 10^{-27}\ kg$, carica $q_p = -1.60 \times 10^{-19}\ C$), inizialmente ferma.

Determinare:

c) La velocità con il quale la particella raggiunge il centro dell'anello O

d) Il lavoro della forza elettrostatica nel far passare la carica dal punto P ad un punto Q posto ad una distanza $d/2$ da O

e) La forza elettrostatica risentita dalla particella carica in O



---

a) Il campo elettrico dovuto ad una distribuzione uniforme di carica disposta lungo un anello si può calcolare considerando il contributo di ogni elemento infinitesimo di anello carico, e integrando quindi sull'intera figura.

Data la simmetria della distribuzione di carica, si considera solo la componente di campo elettrico perpendicolare all'anello (diretta lungo l'asse x).

Ogni infinitesimo di carica dq contenuta in un infinitesimo di anello contribuisce al campo elettrico in P con un termine:

$$dE_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^2 + d^2}\cos\theta \tag{61}$$

Dove θ è l'angolo tra l'elemento infinitesimo e l'asse x, quindi:

$$\cos\theta = \frac{d}{\sqrt{R^2 + d^2}} \tag{62}$$

Mentre la carica dq equivale al prodotto della densità lineare di carica λ per la lunghezza dell'elemento infinitesimo considerato, quindi:

$$dq = \lambda R d\phi \tag{63}$$

Dove una densità di carica positiva contribuisce ad un campo elettrico uscente in P (diretto nel verso positivo dell'asse x in figura), mentre una densità di carica negativa produce un campo elettrico entrante nell'anello.

Quindi:

$$dE_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\,\lambda\,R\,d\phi}{(R^2+d^2)^{3/2}} \tag{64}$$

Per calcolare il campo elettrico in P è sufficiente quindi integrare lungo ϕ tra 0 e 2π:

$$E_P = \int_0^{2\pi} dE_P = \tag{65}$$
$$= \frac{2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\,\lambda\,R\,d\phi}{(R^2+d^2)^{3/2}} = \tag{66}$$
$$= \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{d\,\lambda\,R}{(R^2+d^2)^{3/2}} \tag{67}$$

È quindi semplice calcolare la densità di carica necessaria a generare un campo elettrico di intensità pari a quella data:

$$\lambda = \frac{2\varepsilon_0 E_P (R^2+d^2)^{3/2}}{d\,R} = \tag{68}$$
$$= 1.51 \times 10^{-8}\ \frac{C}{m} \tag{69}$$

b) Il calcolo del potenziale passa attraverso la conoscenza del campo elettrico attraverso la relazione:

$$\vec{E} = -\nabla V \tag{70}$$

Il modulo del campo E dipende solo dalla distanza x tra punto considerato rispetto al centro O dell'anello, quindi:

$$V = -\int_\infty^d \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{x\,\lambda\,R}{(R^2+x^2)^{3/2}}dx \tag{71}$$

Per semplificare la risoluzione dell'integrale è possibile operare un cambio di variabile. Si può ad esempio scegliere di operare il cambio di variabili seguente:

$$\tau = R^2 + x^2 \tag{72}$$

che permette di esprimere la dipendenza da x in funzione della nuova variabile τ:

$$\frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}}dx = \frac{d\tau}{2\tau^{3/2}} \tag{73}$$

e di considerare i nuovi estremi di integrazione:

$$x \longrightarrow \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \tau \longrightarrow \infty \tag{74}$$
$$x = d \qquad \Longrightarrow \qquad \tau = R^2 + d^2 \tag{75}$$

L'integrale quindi si riscrive come:

$$V_P = -\int_{\infty}^{R^2+d^2} \frac{d\tau}{2\tau^{3/2}} = \tag{76}$$

$$= +\left[\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right]_{\infty}^{R^2+d^2} = \tag{77}$$

$$= +\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+d^2}} = \tag{78}$$

$$= \frac{E_P(R^2+d^2)}{d} = 135.1\ V \tag{79}$$

c) Non essendo presenti forze non conservative si può scrivere la condizione di conservazione dell'energia tra il punto P e il punto O:

$$q_p V_P = \frac{1}{2} m_P v_O^2 + q_p V_O \tag{80}$$

Dove il potenziale in O si calcola come nel punto precedente, ottenendo:

$$V_O = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0} \tag{81}$$

La velocità del protone nell'attraversare il centro O dell'anello è quindi data da:

$$v_p = \sqrt{\frac{2q_P(V_P - V_O)}{m_P}} = \tag{82}$$

$$= 4.50 \times 10^5\ m/s \tag{83}$$

d) Il lavoro compiuto dalla forza elettrostatica per portare q_p dal punto P al punto Q si calcola considerando che il campo elettrico è conservativo. Pertanto il lavoro compiuto dalla forza elettrostatica è pari alla differenza dell'energia potenziale dei punti P e Q, cambiata di segno:

$$W_{el}^{P\to Q} = -\Delta U_e = \tag{84}$$

$$= -(U_Q - U_P) = \tag{85}$$

$$= -q_p(V_Q - V_P) \tag{86}$$

Dove nuovamente si può ricavare V_Q da quanto ottenuto in precedenza:

$$V_Q = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2 + (\frac{d}{2})^2}} \tag{87}$$

Pertanto:

$$W_{el}^{P\to Q} = -q_p(V_Q - V_P) \tag{88}$$

$$= -\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+(\frac{d}{2})^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+d^2}}\right) = \tag{89}$$

$$= 2.08 \times 10^{-17}\ J \tag{90}$$

e) In O la particella carica risente di una risultante delle forze elettrostatice totalmente nulla, essendo completamente bilanciati gli effetti del campo dovuti a tutti gli elementi dell'anello.

La carica risente di una forza elettrostatica $\vec{F}_e = q_p\vec{E}$ che dipende dalla posizione con qui essa si trova lungo l'asse x.

Come calcolato in precedenza infatti (e qui riportato in forma vettoriale):

$$\vec{E}(x) = \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{x\,\lambda\,R}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \hat{i} \tag{91}$$

Pertanto la particella carica (ricordando che $q_p < 0$) è soggetta ad una forza conservativa che dipende dalla sola posizione lungo l'asse x, ed agisce come una forza di richiamo verso il centro dell'anello:

$$\vec{F}_e(x) = q_p \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{x\,\lambda\,R}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \hat{i} \tag{92}$$

Calcolata in O ponendo $x = 0$ è quindi evidente che:

$$F_e^O = 0 \tag{93}$$

2.3 Esercizio 3

Un condensatore è formato da due piani conduttori affacciati, avvolti a formare una spirale di $N = 30$ spire di raggio medio $r_m = 2.5\ cm$ e di lato $h = 13.7\ cm$. I piani sono mantenuti ad una distanza di $50\ \mu m$ dall'interposizione di un foglio di carta asciutta, usata come dielettrico ($\varepsilon_r^a = 2.0$). Il condensatore è posto a una differenza di potenziale $V = 125\ V$ e caricato completamente, prima di essere scollegato dal generatore.

Determinare:

a) La capacità del condensatore

b) L'energia potenziale immagazzinata nel condensatore

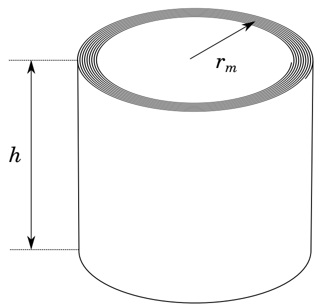
c) La densità di carica di polarizzazione sulla superficie del dielettrico

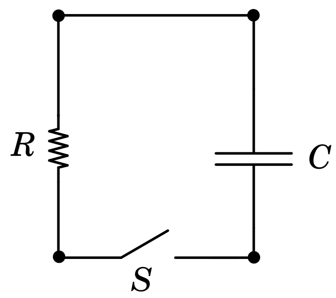
Successivamente allo scollegamento del generatore la carta usata come dielettrico viene bagnata con olio fino ad impregnarla, portando la costante dielettrica relativa del materiale a $\varepsilon_r^b = 3.2$. Il condensatore viene qiundi inserito in un circuito in cui è presente una resistenza $R = 175\ \Omega$, iniziando quindi il processo di scarica all'istante di chiusura dell'interruttore S.

Determinare:

c) Il lavoro compiuto dalla forza elettrostatica nel corso della variazione del dielettrico

d) La corrente circolante nel circuito dopo un tempo $t = 2\ mus$ dall'inizio del processo di scarica





---

a) Il condensatore può essere considerato come una coppia di piani conduttori affacciati, di altezza h e lunghezza pari a N volte la circonferenza di una singola spira, quindi $l = N \times 2\pi r_m$. La capacità di un tale condensatore a facce piane e parallele, in aria o nel vuoto, è pari a:

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \tag{94}$$

Mentre con l'interposizione di un dielettrico, la capacità del condensatore aumenta proporzionalemete al coefficiente dielettrico relativo del materiale:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d} \tag{95}$$

Quindi la capacità del condensatore con interposta carta asciutta è pari a:

$$C_a = \varepsilon_0 \varepsilon_r^a \frac{N \times 2\pi r_m\, h}{d} = \tag{96}$$

$$= 22.9\ \mu C \tag{97}$$

b) Il condensatore è caricato tramite la differenza di potenziale V esterna costante, arrivando ad immagazzinare un'energia potenziale elettrostatica pari a:

$$U_e = \frac{1}{2} C_a V^2 = \tag{98}$$

$$= 1.79\ mJ \tag{99}$$

c) La densità di carica indotta sulla superficie del dielettrico per effetto della polarizzazione è direttamente legata al vettore polarizzazione elettrica $\vec{P}$.

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} \tag{100}$$

Per ricavare $\vec{P}$ ci si ricodunce alla sua relazione con il campo elettrico e il vettore induzione elettrica (valide per un dielettrico omogeneo e isotropo):

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \tag{101}$$
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r^a \vec{E} \tag{102}$$

Quindi:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r^a - 1) \vec{E} \tag{103}$$

Nel caso di un condensatore a facce parallele a distanza d e soggetto ad una differenza di potenziale V il campo tra le armature è costante e pari a:

$$E = \frac{V}{d} \tag{104}$$

Quindi la densità di carica di polarizzazione che si dispone sulla superficie del dielettrico, in valore assoluto, è pari a:

$$|\sigma_P| = \varepsilon_0 (\varepsilon_r^a - 1) \frac{V}{d} = \tag{105}$$
$$= 2.21 \times 10^{-5} \ \frac{C}{m^2} \tag{106}$$

d) Il lavoro compiuto dal campo elettrico nel corso dell'immersione della carta in olio è pari alla differenza dell'energia potenziale elettrostatica tra lo stato finale (indicato con il pedice b) e lo stato iniziale (con pedice a), cambiata di segno:

$$W_{el} = -\Delta U_e = \tag{107}$$
$$= -(U_b - U_a) \tag{108}$$

Dove si nota che il condensatore carico e scollegato dal generatore si mantiene alla carica immagazzinata q nella prima fase, pari a:

$$q = C_a V \tag{109}$$

Mentre le sue armature si portano alla nuova differenza di potenziale:

$$V_b = \frac{q}{C_b} = \tag{110}$$
$$= V \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r^a \frac{A}{d}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r^b \frac{A}{d}} = \tag{111}$$
$$= V \frac{\varepsilon_r^a}{\varepsilon_r^b} \tag{112}$$

Pertanto:

$$W_{el} = -(U_b - U_a) = \tag{113}$$
$$= -(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C_b} - \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_a}) = \tag{114}$$
$$= \frac{1}{2}q^2(\frac{1}{C_a} - \frac{1}{C_b}) = \tag{115}$$
$$= \frac{1}{2}C_a V^2(1 - \frac{\varepsilon_r^a}{\varepsilon_r^b}) = \tag{116}$$
$$= 6.70 \times 10^{-4}\ J \tag{117}$$

e) Una volta collegato il condensatore carico ad una resistenza, inizia a circolare corrente attraverso il processo di scarica. Il parametro fondamentale di un circuito di questo tipo è la costante di tempo, pari a:

$$\tau = RC_b = \tag{118}$$
$$= R\varepsilon_0\varepsilon_r^b\frac{A}{d} \tag{119}$$

La corrente circolante nel circuito è massima all'istante della chiusura dell'interruttore, e va poi calando con il tempo secondo un profilo esponenziale, dato dalla:

$$i(t) = \frac{V_0}{R}\exp^{-\frac{t}{\tau}} \tag{120}$$

Dove V_0 è qui indicato come il potenziale ai capi del condensatore a circuito aperto, quindi:

$$i(t) = \frac{V_b}{R}\exp^{-\frac{t}{\tau}} = \tag{121}$$
$$= \frac{V}{R}\frac{\varepsilon_r^a}{\varepsilon_r^b}\exp^{-\frac{t}{\tau}} \tag{122}$$

Di conseguenza l'intensità di corrente elettrica circolante all'istante $t = 2\,mus$ è pari a:

$$i(t) = 0.433\ A \tag{123}$$

2.4 Esercizio 4

Nel circuito schematizzato in figura un generatore reale di forza elettromotrice $\mathcal{E} = 15\ V$ e resistenza interna $r = 3\ \Omega$, è collegato ad un sistema di resistori, di cui i seguenti hanno resistenza nota:

$R_1 = 300\ \Omega$

$R_3 = 75\ \Omega$

$R_4 = 190\ \Omega$

È presente un resistore variabile R_2, la cui resistenza può essere modificata per regolare il passaggio di corrente nel circuito.

L'elemento R_0 del circuito è infine costituito da una sbarretta cilindrica di alluminio (conduttività $\sigma_{Al} = 37.7 \times 10^6\ \frac{S}{m}$) di diametro $d = 3\ mm$ e di lunghezza $l = 2.5\ cm$. L'alluminio è caratterizzato da una densità di elettroni liberi (di conduzione) per unità di volume pari a $n_e = 18.1 \times 10^{28}\ \frac{e^-}{m^3}$.

Determinare:

a) Il valore della resistenza R_0 della sbarretta di alluminio

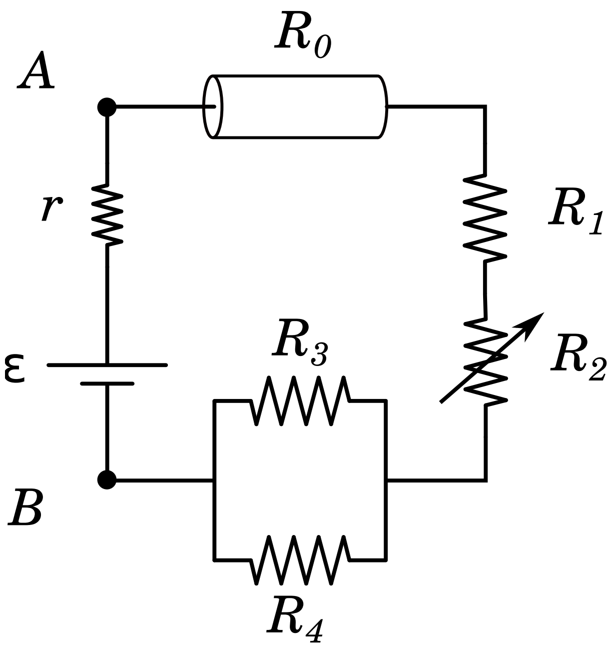
b) La resistenza che è necessario impostare per il resistore R_2 al fine di avere una differenza di potenziale ai suoi capi pari a $V_2 = 2.75\ V$

Fissata la resistenza R_2 alle condizioni imposte dal punto precedente, determinare:

c) La densità di corrente circolante nella sbarretta di alluminio

d) La velocità di deriva a cui sono soggetti gli elettroni nella sbarretta di alluminio

e) La potenza dissipata per effetto Joule sul resistore R_3



---

a) La resistenza della sbarretta di alluminio si ricava a partire dalle sue dimensioni e dalla conduttivita':

$$
\begin{aligned}
R_0 &= \frac{1}{\sigma}\frac{L}{A} = && (124)\\
&= \frac{1}{\sigma}\frac{4l}{\pi d^2} = && (125)\\
&= 9.38 \times 10^{-5}\ \Omega && (126)
\end{aligned}
$$

È chiaro che la resistenza opposta al passaggio di corrente da parte una sbarretta di un ottimo conduttore quale l'alluminio è minima, e infatti il contributo alla resistenza totale del circuito è trascurabile.

b) Vi sono più alternative per giungere alla soluzione del quesito. Una tra le alternative possibili è procedere a semplificare tutti gli elementi resistivi a formare una unica resistenza equivalente R_{eq} (la resistenza R_0 è come detto trascurabile):

$$R_{eq} = \cancel{R_0} + R_1 + R_2 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)^{-1} \tag{127}$$

Applicando quindi l'equazione di Ohm generalizzata, ci si può ricondurre alla corrente circolante nel circuito, e quindi su R_2:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{r + R_{eq}} \tag{128}$$

E infine ad applicare la legge di Ohm sulla resistenza R_2:

$$V_2 = iR_2 = \tag{129}$$

$$= \frac{\mathcal{E}}{r + R_{eq}} R_2 = \tag{130}$$

$$= \frac{\mathcal{E}}{r + R_1 + R_2 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)^{-1}} R_2 \tag{131}$$

Nota V_2 e tutte le resistenze in gioco, si riscrive la precedente equazione per risolvere in fuzione di R_2:

$$R_2 = \frac{V_2}{\mathcal{E} - V_2}\left(r + R_1 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)^{-1}\right) = \tag{132}$$

$$= 80.0\ \Omega \tag{133}$$

c) Il vettore densità di corrente circolante in un elemento di circuito è legato al campo elettrico applicato e alla conduttività del materiale:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \tag{134}$$

È possibile quindi calcolare la differenza di potenziale ai capi di R_0, il campo elettrico applicato, e da questo la densità di corrente.
Si può altrimenti considerare che l'intensità di corrente è data dal flusso del vettore $\vec{j}$ attraverso una superficie Σ:

$$i = \int_\Sigma \vec{j} \cdot \hat{n}\, dA \tag{135}$$

Utilizzando come superficie una sezione della sbarretta conduttrice, che è perpendicolare al vettore $\vec{j}$, si può semplicemente scrivere:

$$j = \frac{i}{A} \tag{136}$$

Quindi:

$$j = \frac{\mathcal{E}}{A(r + R_{eq})} = \tag{137}$$

$$= \frac{4\mathcal{E}}{\pi d^2 \left(r + R_1 + R_2 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)^{-1}\right)} = \tag{138}$$

$$= 4.86 \times 10^3\ \frac{A}{m^2} \tag{139}$$

d) La velocità di deriva dei portatori di carica (gli elettroni nel caso di un conduttore metallico come l'alluminio) è legata alla densità di corrente elettrica $\vec{j}$ dalla relazione:

$$\vec{j} = n_q q \vec{v}_d \tag{140}$$

Dove i portatori di carica sono gli elettroni, con carica pari a $|e| = 1.6 \times 10^{-19}\ C$.
Quindi:

$$\begin{aligned} v_d &= \frac{j}{n_e|e|} = \qquad (141)\\ &= 1.68 \times 10{-}7\ m/s \qquad (142) \end{aligned}$$

e) La potenza dissipata dalla resistenza R_3 è data da:

$$P_3 = i_3^2 R_3 \tag{143}$$

Dove i_3 è l'intensità di corrente circolante attraverso la resistenza R_3. Si procede iterativamente, calcolando la caduta di potenziale ai capi del parallelo di resistenze R_3 e R_4:

$$V_{34} = \mathcal{E} - i(r + R_1 + R_2) \tag{144}$$

Da questa si ricava la corrente circolante i_3:

$$\begin{aligned} i_3 &= \frac{V_{34}}{R_3} = \qquad (145)\\ &= \frac{\mathcal{E} - i(r + R_1 + R_2)}{R_3} \qquad (146) \end{aligned}$$

E infine la potenza dissipata:

$$\begin{aligned} P_3 &= i_3^2 R_3 = \qquad (147)\\ &= \frac{\left(\mathcal{E} - i\left(r + R_1 + R_2\right)\right)^2}{R_3} = \qquad (148)\\ &= 4.55 \times 10^{-2}\ W \qquad (149) \end{aligned}$$