ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Lezioni 1-2, 04/10/2021

Prof. Luis García-Naranjo

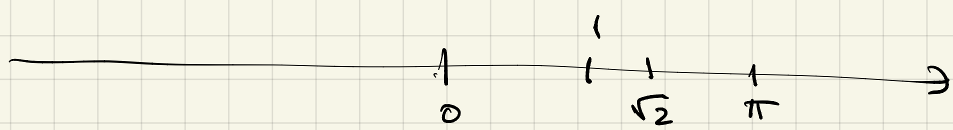
Prerequisiti:

Insiemi numerici $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \quad q \neq 0 \right\}$$

$\mathbb{R}$ numeri reali formano un continuo



Proprietà delle potenza

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$$
$$(a^n)^k = a^{nk}$$
$$(ab)^n = a^n b^n$$

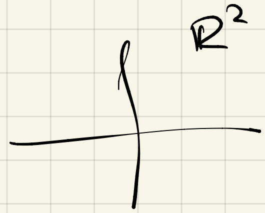
Se $a, b > 0$ n e k possono essere reali

Prodotto cartesiano

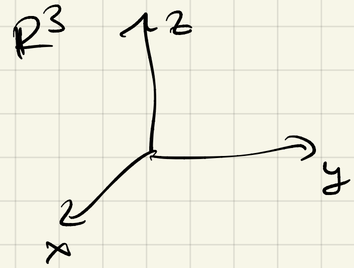
A, B insiemi allora

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, \ b \in B\}$$

Es. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$



<u>Es.</u> $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R} \}$



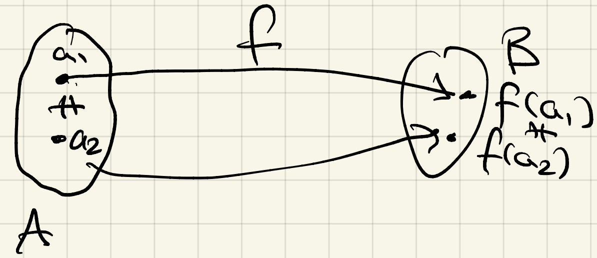
<u>Es.</u> $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n} = \{ (x_1, \ldots, x_n) \mid x_j \in \mathbb{R} \ \ j=1,\ldots,n \}$

<u>Funzioni</u>:

$$f : A \longrightarrow B$$
$$a \in A \mapsto f(a) \in B$$

Una funzione $f: A \to B$ è detta <u>suriettiva</u> se $\forall\, b \in B$ $\exists\, a \in A$ tale che $f(a) = b$.

Una funzione $f: A \to B$ è detta <u>iniettiva</u> se $a_1, a_2 \in A$ $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

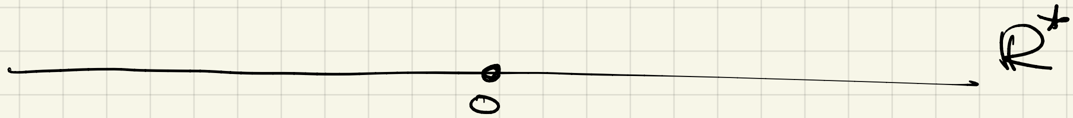


Una funzione $f: A \to B$ iniettiva e suriettiva è detta biiettiva. In questo caso esiste f^{-1} funzione inversa, $f^{-1}: B \to A$

$$f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b.$$

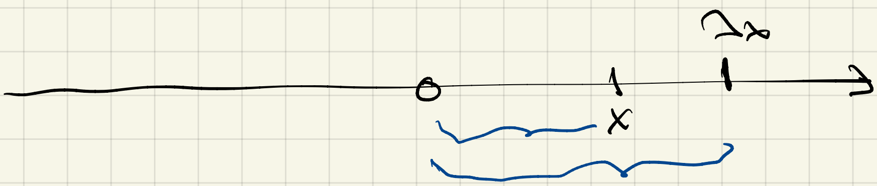
NUMERI E TRASFORMAZIONI

Sia $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



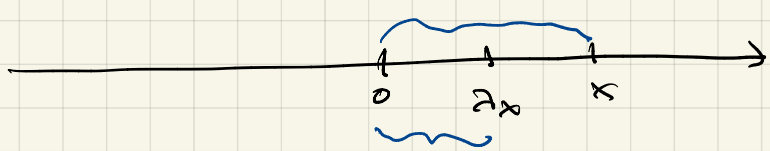
Moltiplicazione in $\mathbb{R}^*$ $\iff$ una dilatazione o contrazione (forse anche una riflessione).

$\lambda \in \mathbb{R}^*$

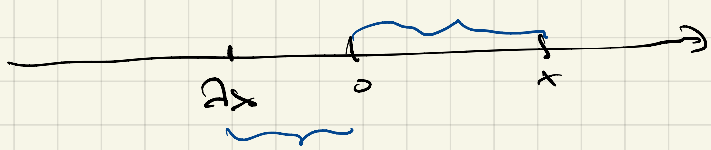


$\lambda > 1$ dilatazione

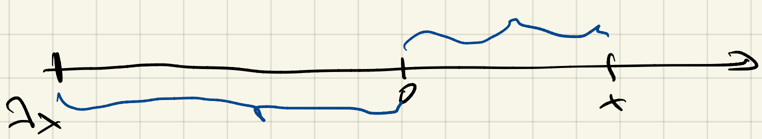
λx



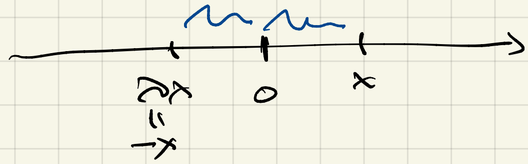
$0 < \lambda < 1$ contrazione



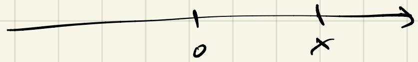
$-1 < \lambda < 0$ contrazione e una riflessione



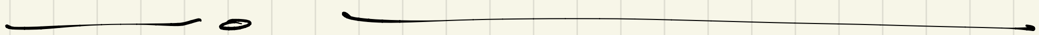
$\lambda < -1$ dilatazione e riflessione.



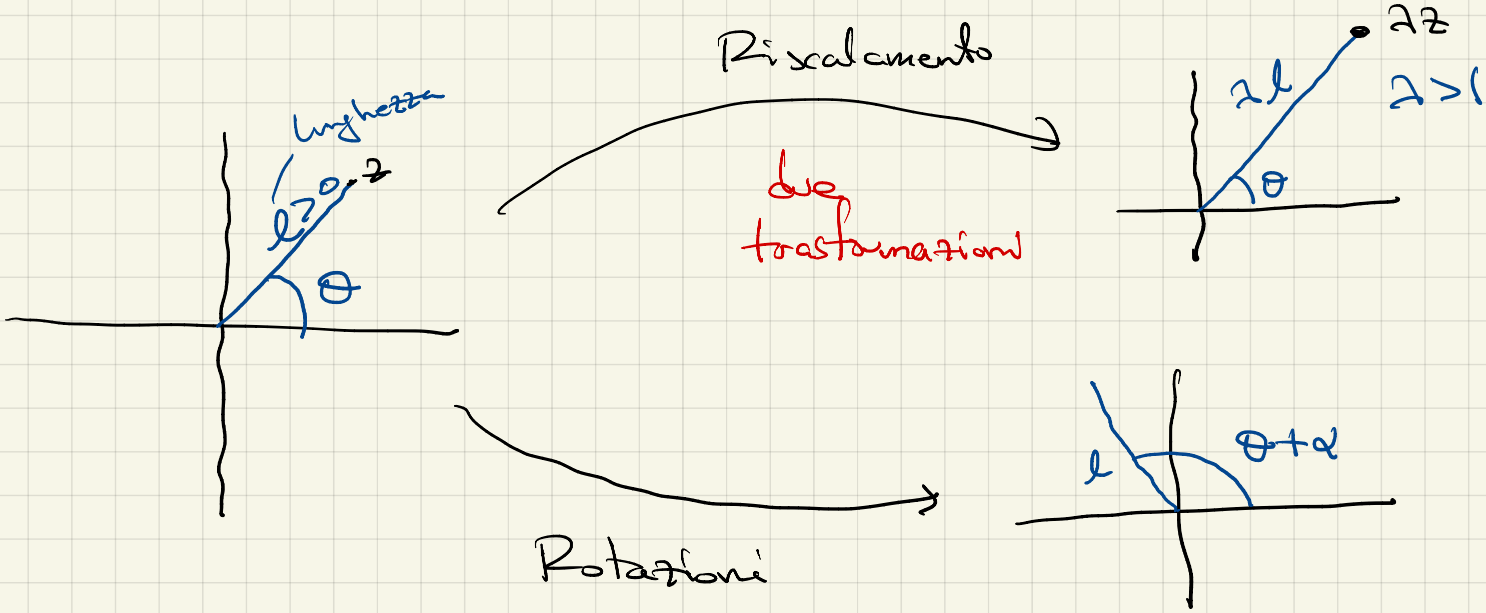
$\lambda = -1$ riflessione



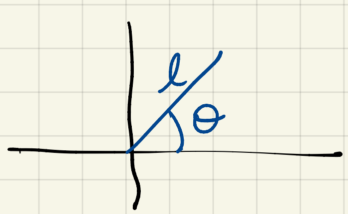
$\lambda = 1$ trasformazione identica



<u>Numeri complessi</u>: Trasformazioni di segmenti (non nulli) spiccati dell'origine in un piano



Ogni segmento codifica una rotazione e un riscalamento

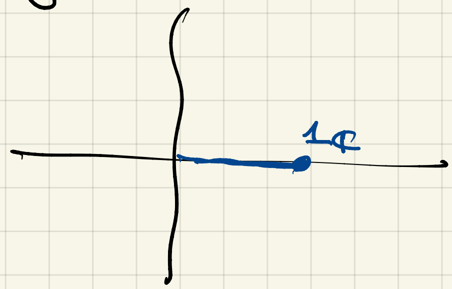


→ Riscalamento per l = lunghezza del segmento

→ Rotazione per θ (in senso antiorario)

θ = inclinazione rispetto all'asse orizzontale

Segmento molto importante

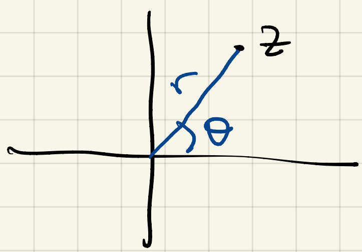


Lunghezza $= 1$ (la nostra lunghezza di riferimento)

inclinazione $\theta = 0$.

Codifica la trasformazione identica.

$\mathbb{C}^*$ = Insieme delle rotazioni e riscalimenti di segmenti non nulli spiccati dall'origine.



Rappresentato come

$$z = re^{i\theta}$$

e: numero di Nepero

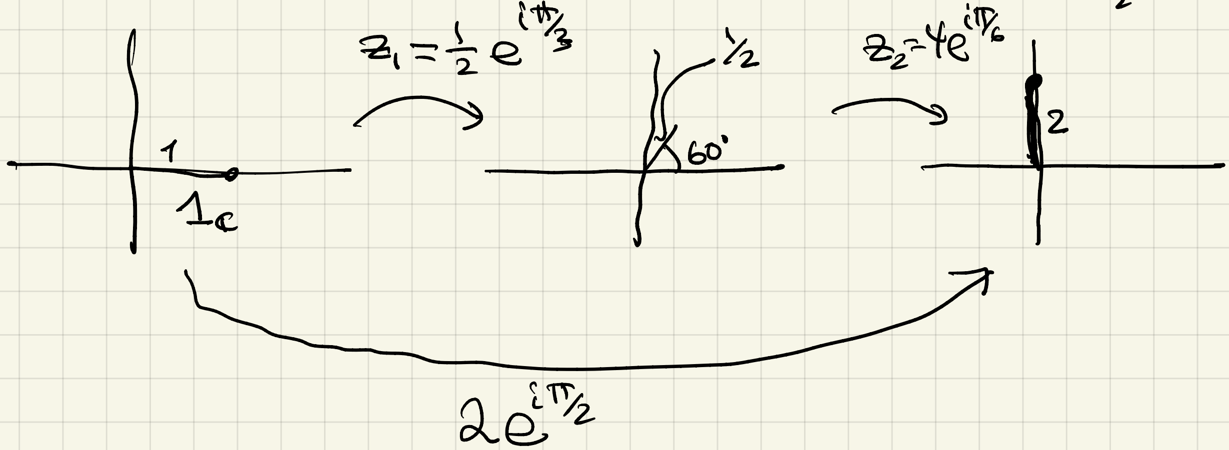
i: coefficiente imaginario

$$1_{\mathbb{C}} = 1 \cdot e^{i0} = 1 \cdot e^0 = 1$$

Come è la composizione

$z_1 = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}$

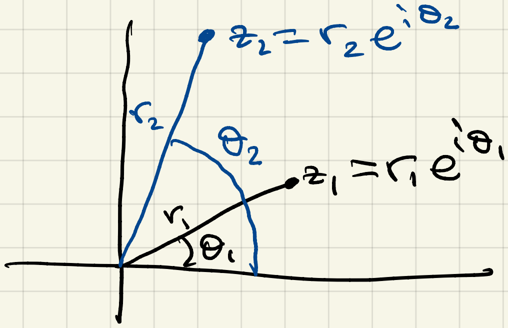
$z_2 = 4 e^{i\frac{\pi}{6}}$

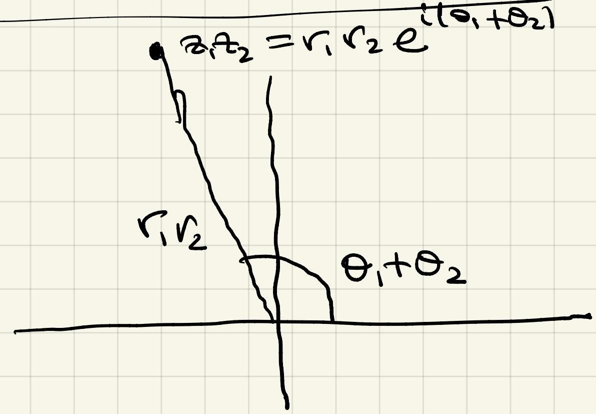


$$z_1 z_2 = \left(\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(4 e^{i\frac{\pi}{6}}\right) =$$

$$= 2 e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)} = 2 e^{i\frac{\pi}{2}}$$

La composizione corrisponde al prodotto con le solite regole





Def.

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \\ z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \end{array}\right\} \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ r_2 r_1 e^{i(\theta_2+\theta_1)} \\ \parallel \\ z_2 z_1 \end{array}$$

Il prodotto è commutativo

$$z = \underbrace{re^{i\theta}}$$

Forma esponenziale del numero $z \in \mathbb{C}^*$.

$1_{\mathbb{C}}$ = trasformazione identica = elemento neutro del prodotto in $\mathbb{C}^*$

$$1_{\mathbb{C}} \cdot z = z \cdot 1_{\mathbb{C}} = z \qquad z \in \mathbb{C}^*$$

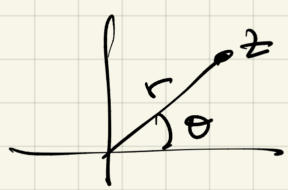
$$1_{\mathbb{C}} = 1 \cdot e^{i0}$$

Dato $z \in \mathbb{C}^*$ esiste un unico $z^{-1} \in \mathbb{C}^*$ tale che $z z^{-1} = 1_{\mathbb{C}}$.

$$z = r e^{i\theta}, \qquad z^{-1} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$

$$(r e^{i\theta})\left(\frac{1}{r} e^{-i\theta}\right) = \left(r \frac{1}{r}\right) e^{i(\theta-\theta)} = 1 e^{i0} = 1_{\mathbb{C}}.$$

$z = r e^{i\theta}$

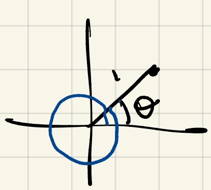


r è il <u>modulo</u> di z

Abbiamo

$$e^{i\theta} = e^{i(\theta+2\pi)} = e^{i(\theta+4\pi)} = \dots = e^{i(\theta+2n\pi)}$$

$n \in \mathbb{Z}$.



Se $\theta \in [0, 2\pi)$ allora θ si chiama <u>argomento principale</u>.

Scrivo: $r = |z|$ (modulo)

$z = re^{i\theta}$ $\quad \theta = \mathrm{Arg}(z)$ (argomento principale)

$\theta \in [0, 2\pi)$

$$z^{-1} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} = \frac{1}{r} e^{i(2\pi - \theta)}$$

$2\pi - \theta \in [0, 2\pi)$ (se $\theta \neq 0$)

Se $\theta \in [0, 2\pi)$ $\quad \mathrm{Arg}(z^{-1}) = 2\pi - \theta$ (se $\theta \neq 0$)

Il prodotto è associativo

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \\ z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \end{array}\right\} z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$z_3 = r_3 e^{i\theta_3}$$

$$\begin{aligned}
(z_1 z_2) z_3 &= \left(r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}\right) r_3 e^{i\theta_3} \\
&= (r_1 r_2) r_3 \, e^{i((\theta_1 + \theta_2) + \theta_3)} \\
&= r_1 (r_2 r_3) \, e^{i(\theta_1 + (\theta_2 + \theta_3))} \\
&= \underbrace{r_1 e^{i\theta_1}}_{z_1} \underbrace{\left(r_2 r_3 e^{i(\theta_2 + \theta_3)}\right)}_{z_2 z_3} \\
&= z_1 (z_2 z_3)
\end{aligned}$$

Def. Un gruppo G è un insieme non vuoto dotato di una operazione binaria

$$\begin{aligned} *: G \times G &\longrightarrow G \\ (g_1, g_2) &\longmapsto g_1 * g_2 \end{aligned}$$

che soddisfa le seguenti proprietà

(1) $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$ (prop. associativa)

(2) $\exists$ un elemento $1_G \in G$ tale che $1_G * g = g * 1_G = g \quad \forall g \in G$

(1_G è l'elemento neutro per $*$)

(3) $\forall g \in G$ esiste un elemento che si indica con g^{-1} tale che

$$g * g^{-1} = g^{-1} * g = 1_G$$

Se inoltre vale

(4) $\forall g_1, g_2 \in G \quad g_1 * g_2 = g_2 * g_1$

diciamo che il gruppo è <u>commutativo</u> o <u>abeliano</u>.

$(\mathbb{C}^*, \cdot)$ ⟵ Gruppi commutativi

$(\mathbb{R}^*, \cdot)$

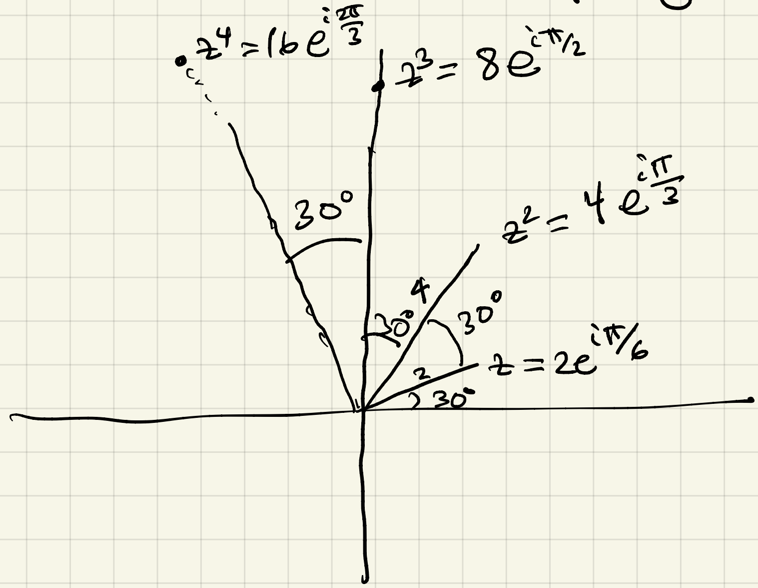
$(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$

OPERAZIONI IN $\mathbb{C}^*$

- Elevamento a potenza n-esima

$$z = re^{i\theta} \qquad z^n = r^n e^{in\theta}$$

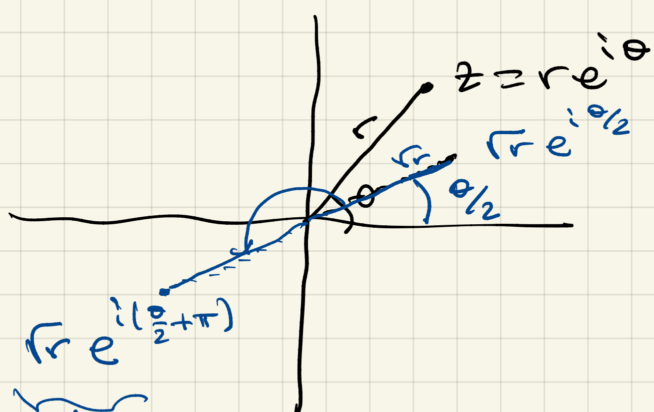
Es.



- Estrazione di radice

$$z = re^{i\theta} \qquad \sqrt[n]{z} = z^{1/n} = \underbrace{r^{\frac{1}{n}}} e^{i\frac{\theta}{n}}$$

non basta.



$$\sqrt{z} = \begin{cases} \sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}} \\ \sqrt{r}\, e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)} \end{cases}$$

$$\left(\sqrt{r}\, e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}\right)^2 = r\, e^{i2(\frac{\theta}{2}+\pi)} = re^{i(\theta+2\pi)}$$

$$= re^{i\theta}$$

Per trovare tutte le $\sqrt[n]{z}$ devo considerare tutti gli angoli della famiglia $\frac{\theta + 2k\pi}{n}$ con $k \in \mathbb{Z}$ che cadono in $[0, 2\pi)$.

$\Rightarrow$ Considerare $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Formula di de Moivre:

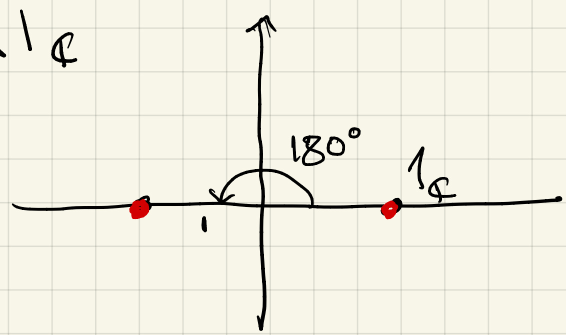
$$z = re^{i\theta} \Rightarrow \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

(n radici)

Es. Radici n-esima di $1_{\mathbb{C}} = 1e^{i(0)}$

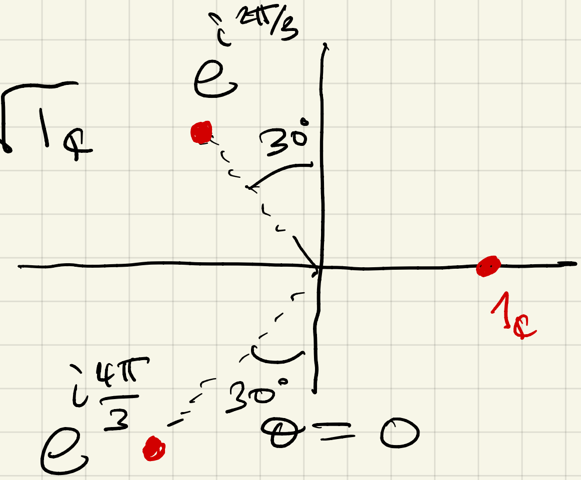
$\sqrt[2]{1_{\mathbb{C}}}$



$\theta = 0$

$r = 1$

$\sqrt[3]{1_{\mathbb{C}}}$



$\theta = 0$

$r = 1$

$$\sqrt{1} \cdot e^{i\left(\frac{0}{2}\right)} = 1 \cdot e^{i(0)}$$

$$\sqrt{1}\, e^{i\left(\frac{0}{2} + \frac{2\pi}{2}\right)} = 1 \cdot e^{i\pi}$$

$$\sqrt[3]{1}\, e^{i\left(\frac{0}{3}\right)} = 1 \cdot e^{i(0)}$$

$$\sqrt[3]{1}\, e^{i\left(\frac{0}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 1\, e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\sqrt[3]{1}\, e^{i\left(\frac{0}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)} = 1\, e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$\sqrt[4]{1_{\mathbb{C}}} = \begin{cases} e^{i0} = 1_{\mathbb{C}} \\ e^{i\frac{\pi}{2}} \\ e^{i\pi} \\ e^{i\frac{3\pi}{2}} \end{cases}$$