Diario del corso

4 Ottobre

Introduzione al corso. Richiami su insiemi numerici e funzioni. Introduzione ai numeri complessi. Linsieme $\mathbb{C}^*$ come gruppo di rotazioni e dilatazioni di segmenti spiccati dallorigine nel piano. Rappresentazione esponenziale dei numeri complessi. Moltiplicazione e inverso. Modulo, argomento e argomento principale. Calcolo di inverso in $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ con argomento in $[0, 2\pi)$. Definizione di gruppo e gruppo commutativo. Elevamento a potenza in $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ con rappresentazione esponenziale e grafica. Estrazione di radice (formula di de Moivre).

6 Ottobre

Somma grafica con regola del parallelogramma. Parte reale e parte immaginaria. Numeri reali e immaginari puri. Rappresentazione cartesiana. Somma in rappresentazione cartesiana. Elemento neutro rispetto alla somma: lo zero complesso. $\mathbb{C} = \mathbb{C}^* \cup \{0\}$ è gruppo commutativo rispetto alla somma. Identificazione di -1 con $e^{i\pi}$. Definizione di i come $\sqrt{-1}$. Rappresentazione algebrica e trigonometrica di un numero complesso. Esercizi su espressioni con numeri complessi.

7 Ottobre

Definizione di campo. La struttura algebrica $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un campo e così pure $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Numero complesso coniugato. Proprietà del coniugio. Polinomi in una variabile complessa a coefficienti reali e complessi. Teorema fondamentale dellalgebra. Polinomi a coefficienti reali: dimostrato che le radici complesse compaiono sempre a coppie di numeri coniugati e che polinomi di grado dispari ammettono sempre una radice reale. Fattorizzazione di polinomi a coefficienti reali.

11 Ottobre

Proprietà del modulo di un numero complesso. Definizione di spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Spazio vettoriale banale e osservato che è l'unico $\mathbb{R}$-spazio contenente un numero finito di vettori. Esempi di spazi vettoriali: spazi di n-uple $\mathbb{K}^n$; spazi di polinomi; $\mathbb{C}$ ed $\mathbb{R}$ come $\mathbb{R}$-spazi vettoriali; $i\mathbb{R}$ come $\mathbb{R}$-spazio; spazi $\mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{K})$ di matrici. Elenco di alcune proprietà degli spazi vettoriali.

13 Ottobre

Dimostrato di alcune proprietà degli spazi vettoriali. Dimostrato che $\lambda_1 v = \lambda_2 v$ implica $\lambda_1 = \lambda_2$ per ogni vettore v non nullo. Definizione di sottospazio vettoriale. Dimostrato che un sottoinsieme non vuoto di uno spazio vettoriale è sottospazio se e solo se è chiuso per la somma di vettori e per la moltiplicazione fra scalari e vettori. Osservato che il vettore nullo appartiene a tutti i sottospazi. Esempi e controesempi sui sottospazi vettoriali.

14 Ottobre

Definizione di equazioni lineari omogenee con n incognite in un campo $\mathbb{K}$ e dimostrato che le soluzioni formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$. Definizione di combinazione lineare di n vettori e dimostrato che l'insieme di tutte le combinazioni lineari di n vettori è un sottospazio. Dimostrato che l'intersezione di due sottospazi è un sottospazio. Dimostrato che l'unione di due sottospazi è un sottospazio se e solo se uno di essi è contenuto nel altro.

18 Ottobre

Somma e somma diretta di sottospazi. Dimostrato che gli elementi della somma di due sottospazi si scrivono in modo unico come somma di elementi dei due sottospazi se e solo se la somma è diretta. Definizione di insieme di generatori di uno spazio vettoriale e di sottospazio generato ed esempi.

20 Ottobre

Definizione di insieme libero e vettori linearmente indipendenti e linearmente dipendenti. Dimostrato che n vettori sono linearmente dipendenti se e solo se almeno uno di essi può essere scritto come combinazione lineare degli altri. Esercizi su dipendenza/indipendenza lineare. Definizione di base di uno spazio vettoriale.

21 Ottobre

Dimostrato che la scrittura di un vettore come combinazione lineare di vettori di una base è unica. Dimostrato il Lemma dello Scambio: insiemi liberi hanno cardinalità minore o uguale a quella di insiemi di generatori. Dimostrato che tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi. Definizione di dimensione di uno spazio vettoriale finitamente generato. Basi canoniche di $\mathbb{K}^n$, $\mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{K})$ e $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$. Base e dimensione di $\mathbb{C}$ come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e come $\mathbb{C}$-spazio vettoriale.

25 Ottobre

Dimostrato che n vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale di dimensione n formano una base. Dimostrato che un sistema di generatori di n vettori in uno spazio vettoriale di dimensione n formano una base. Dimostrato che da un insieme di generatori di uno spazio vettoriale finitamente generato si può sempre estrarre una base ed esempi. Dimostrato teorema su completamento a base di un insieme libero.

27 Ottobre

Dimostrate la Formula di Grassmann e le sue conseguenze per somma diretta. Esempi ed esercizi su dimensioni e basi di spazi vettoriali finitamente generati.

28 Ottobre

Esercizi su dimensioni e basi di spazi vettoriali finitamente generati.

3 Novembre

Applicazioni lineari, definizione ed esempi. Isomorfismi tra spazi vettoriali. Tutti gli spazi vettoriali di dimensione n sono isomorfi a $\mathbb{K}^n$. Nucleo e immagine di una funzione lineare e dimostrazione che sono sottospazi vettoriali. Caratterizzazione funzioni lineari iniettive per mezzo del nucleo. Le immagini di un insieme di generatori sono un insieme di generatori.

4 Novembre

Esempio determinazione nucleo ed immagine di una applicazione lineare. Dimostrato teorema nullità + rango. Una funzione lineare è determinata dalle immagini dei vettori di una base. Matrice associata a una funzione lineare rispetto a una scelta di basi. Spazio vettoriale $\mathrm{Hom}(V, W)$ di funzioni lineari tra gli spazi vettoriali V, W.

8 Novembre

Dimostrato che lo spazio vettoriale $\mathrm{Hom}(V, W)$ è isomorfo a $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ove $n = \dim(V)$ e $m = \dim(W)$. Composizione di funzioni lineari e prodotto righe per colonne tra matrici. Dimostrato che la matrice della composizione di due funzioni lineari è data dal prodotto matriciale. Esempi di prodotto tra matrici.

10 Novembre

Elenco di alcune proprietà del prodotto matriciale. Relazione tra applicazione lineare e applicazione indotta dalla matrice associata all'applicazione lineare (diagramma commutativo). Dimostrato che le immagini di un insieme libero per una funzione lineare è un insieme libero se e solo se la funzione è iniettiva. Esempi matrici associate alla stessa applicazione lineare rispetto a basi diverse.

11 Novembre

Matrici di cambiamento di base. Le matrici di cambiamento fra due basi sono una l'inversa dell'altra. Azione delle matrici di cambiamento di base sulle coordinate dei vettori. Relazione fra le matrici di cambiamento di base e le matrici associate alla stessa funzione lineare rispetto a basi diverse. Esempio.

15 Novembre

Preimmagine di un vettore per una funzione lineare. Preimmagine di un sottospazio per una funzione lineare. Sistemi lineari e matrici associate. Interpretazione delle soluzioni del sistema lineare $AX = B$ in termini della funzione lineare f definita da $f(X) = AX$ (le soluzioni sono $f^{-1}(B)$ per $B \in \mathrm{Im}(f)$). Dimostrato del Teorema di Rouché-Capelli.

17 Novembre

Algoritmo di Gauss e matrici in forma a scala. Osservato che per una qualunque matrice A, il numero di righe linearmente indipendenti coincide con il numero di colonne linearmente indipendenti (ed è uguale al rango di A). Osservato che per una qualunque matrice, il suo rango è uguale al numero di righe non nulle della sua forma a scala. Esempi.

18 Novembre

Risoluzione di un sistema lineare non omogeneo utilizzando il metodo di riduzione di Gauss. Definizione della matrice trasposta. Dimostrato che la riduzione a forma scala di una matrice utilizzando operazioni elementari sulle righe corrisponde a un prodotto a sinistra per un'opportuna matrice invertibile. Esempi.

22 Novembre

Esercizi su basi e dimensioni di sottospazi vettoriali con il metodo di riduzione di Gauss. Una matrice quadrata è invertibile se e solo se ha rango uguale al suo ordine se e solo se con operazioni elementari sulle sue righe si può ottenere la matrice identica. Esercizio di calcolo della matrice inversa con operazioni elementari. Esempio di matrice non invertibile.

24 Novembre

Definizione di sottomatrice e minore. Il rango è uguale al massimo ordine di un minore invertibile. Definizione di Determinante (calcolato rispetto a una riga). Esempio. Proprietà dei determinanti: il determinante di una matrice A è uguale al determinante della matrice trasposta A^T; calcolo del determinante rispetto ad una colonna; il determinante è una funzione lineare in ciascuna delle sue righe e in ciascuna delle sue colonne; il determinante cambia segno quando si scambiano due righe (o due colonne) fra di loro.

25 Novembre

Proprietà dei determinanti: il determinante non cambia se ad una riga di A si somma una combinazione lineare di altre righe di A (e lo stesso per le colonne). Calcolo del determinante usando operazioni elementari per arrivare a una matrice triangolare. Enunciato il Teorema di Binet. Formula per la matrice inversa. Una matrice è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero. Matrici scalari. Esercizi: esistenza di soluzioni per un sistema di equazioni lineari con parametri, metodo di eliminazione di Gauss per trovare le equazioni di un sottospazio dati i suoi generatori.

29 Novembre

Definizione di matrici simili. Autovalori, autovettori ed autospazi di un endomorfismo. Definizione di polinomio caratteristico di una matrice. Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. Dimostrato che due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico. Esempi di calcolo di autovalori ed autovettori in casi semplici (matrici 2×2).

1 Dicembre

Definizione di matrice diagonalizzabile. Dimostrato che autospazi relativi ad autovalori distinti di un endomorfismo (o di una matrice) sono in somma diretta e quindi autovettori relativi ad autovalori diversi sono linearmente indipendenti. Esempi.

2 Dicembre

Dimostrato che la molteplicità geometrica è sempre minore o uguale della molteplicità algebrica. Dimostrazione del Teorema di diagonalizzabilità: la matrice $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ è diagonalizzabile se e solo se il polinomio caratteristico di A ammette tutte le radici in $\mathbb{K}$ e molteplicità algebrica e geometrica coincidono per ogni autovalore di A. Dimostrato che 0 è autovalore di A se e solo se A non è invertibile. Definizione della traccia di una matrice quadrata. Dimostrato che $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Dimostrato che matrici simili hanno la stessa traccia.

6 Dicembre

Relazione fra il determinante, la traccia, il polinomio caratteristico e gli autovalori di una matrice. Proiezioni e simmetrie di asse e direzione generici: autovalori e calcolo di loro matrici. Esempi.

9 Dicembre

Definizione e proprietà del prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$. Definizione di norma ̀proprietà. Dimostrate la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, la disuguaglianza triangolare e la regola del parallelogramma. Definizione di forma bilineare simmetrica positiva definita su un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e nozione generale di spazio vettoriale euclideo. Definito il coseno dell'angolo tra due vettori in $\mathbb{R}^n$ e la nozione di ortogonalità tra vettori e tra sottoinsiemi. Definiti versori e vettori normalizzati. Definito il complemento ortogonale $U^\perp$ di un sottospazio $U \subset \mathbb{R}^n$.

13 Dicembre

Dimostrato che il complemento ortogonale $U^\perp$ di un sottospazio $U \subset \mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale che soddisfa $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$. Definizione di proiezione ortogonale di un vettore ed esempi. Dimostrato che un vettore è ortogonale ad un sottospazio se e solo se è ortogonale ad una sua base. Dimostrato che un insieme di vettori non nulli due a due ortogonali fra di loro è anche libero. Definizione di base ortogonale e base ortonormale.

15 Dicembre

Algoritmo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt con esempio in $\mathbb{R}^4$. Coordinate di un vettore rispetto ad una base ortonormale. Metodo alternativo per calcolare la proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio U usando una base ortonormale di U. Definizione di matrici ortogonali. Una matrice P è ortogonale se e solo se le sue colonne formano una base ortonormale (lo stesso vale per le sue righe). Dimostrato che A è una matrice di proiezione ortogonale (rispetto alla base canonica) se e solo se $A^2 = A$ e $A = A^T$.

16 Dicembre

Dimostrato che il determinante di una matrice ortogonale è uguale a 1 o -1. Dimostrato che se λ è un autovalore reale di una matrice ortogonale allora $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$. Dimostrato che la proiezione ortogonale di un vettore v su un sottospazio identifica il vettore del sottospazio più vicino a v nella distanza definita dalla norma euclidea. Definita una riflessione di asse U e dimostrato che A è una matrice di riflessione (rispetto alla base canonica) se e solo se $A^2 = I$ e $A = A^T$. Definizione di isometria in $\mathbb{R}^n$. Dimostrato che per un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono fatti equivalenti: (1) f è isometria; (2) f preserva la norma dei vettori; (3) la matrice associata a f sulla base canonica è ortogonale; (4) f manda basi ortonormali in basi ortonormali. Classificazione delle isometrie di $\mathbb{R}^2$.

20 Dicembre

Definizione di matrice ortogonalmente diagonalizzabile. Enunciato del Teorema Spettrale. Dimostrato che una matrice ortogonalmente diagonalizzabile è simmetrica. Dimostrato che autovettori relativi ad autovalori diversi di una matrice simmetrica sono ortogonali. Esercizio di diagonalizzazione ortogonale di una matrice simmetrica. Definizione di spazio affine generale e spazio affine standard $\mathbb{A}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{A}^n$ di dimensione n sul campo dei numeri reali. Equazioni parametriche e di rette e piani in $\mathbb{A}^n$. Equazioni cartesiane di rette in $\mathbb{A}^2$ e $\mathbb{A}^3$. Equazioni cartesiane di piani in $\mathbb{A}^3$. Definizione di sottospazio affine (o sottovarietà lineare), giacitura o sottospazio direttore e dimensione.

21 Dicembre (Lezione asincrona)

Classificazione delle isometrie di $\mathbb{R}^3$. Dimostrato che matrici simmetriche hanno tutti gli autovalori reali e che ogni matrice simmetrica è ortogonalmente diagonalizzabile. Resta così dimostrato il Teorema Spettrale: una matrice quadrata reale è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se è simmetrica.

22 Dicembre

Esercizi su equazioni di sottospazi affini in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. Parallellismo in $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$. Studio della posizione reciproca di rette in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ e piani in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. Posizione reciproca tra una retta ed un piano in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. Posizione reciproca tra due rette in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

10 Gennaio

Esercizi sulla posizione reciproca tra due rette in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. Definizione di spazio affine euclideo standard $\mathbb{E}^n$. Definizione e proprietà di distanza tra punti e sottospazi affini. Definizione di ortogonalità tra due rette in $\mathbb{E}^2$ ed $\mathbb{E}^3$, tra un piano e una retta in $\mathbb{E}^3$ e tra due piani in $\mathbb{E}^3$. Definizione di ortogonalità tra un vettore e un sottospazio affine di $\mathbb{E}^n$. Inizio di dimostrazione che, date due sottospazi affini $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ di $\mathbb{E}^n$, due punti $P \in \mathcal{L}_1$ e $Q \in \mathcal{L}_2$ sono di minima distanza se e solo se il vettore $Q - P$ è ortogonale ad entrambi i sottospazi affini $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$.

12 Gennaio

Finita la dimostrazione che, date due sottospazi affini $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ di $\mathbb{E}^n$, due punti $P \in \mathcal{L}_1$ e $Q \in \mathcal{L}_2$ sono di minima distanza se e solo se il vettore $Q - P$ è ortogonale ad entrambi i sottospazi affini $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$. Esercizio di calcolo di distanza tra un punto e una retta in $\mathbb{E}^3$. Formula per il calcolo di distanza punto-iperpiano in $\mathbb{E}^n$ (casi particolari sono distanza punto-retta in $\mathbb{E}^2$ e distanza punto-piano in $\mathbb{E}^3$). Distanza tra due rette sghembe e tra due piani in $\mathbb{E}^3$. Fascio di rette e fascio di piani.

13 Gennaio

Esercizi con fasci di piani. Punto medio di un segmento e baricentro di triangolo e tetraedro. Prodotto vettoriale e prodotto misto in $\mathbb{R}^3$ e loro interpretazione geometrica in $\mathbb{E}^3$. Basi di $\mathbb{R}^3$ equiorientatate. Sistema di riferimento in $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ dato come un punto e una base e coordinate di un punto rispetto a questo sistema. Distanza tra una retta ed un piano in $\mathbb{E}^3$.