Spazi Vettoriali e Sottospazi

Riferimenti

Teoria: Cantarini pp. 17–28, 33–35, 62–66; Bottacin capp. 1.1, 1.2, 1.3.1
Esercizi: Bottacin cap. 1.1

Quesiti *must-know*

Teorici

1. Si dia la definizione di spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$.
2. Sia V uno spazio vettoriale, quali proprietà soddisfa la somma di vettori in V?
3. Come si chiama l'elemento neutro rispetto alla somma di vettori di uno spazio vettoriale?
4. Quali sono i sottospazi vettoriali che un qualunque $\mathbb{K}$-spazio V possiede?
5. A quali sottospazi di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale appartiene il vettore nullo?
6. Si dimostri che un sottoinsieme W di un $\mathbb{K}$-spazio V è sottospazio vettoriale se e solo se è chiuso rispetto alla moltiplicazione per uno scalare e alla somma in V.
7. Dati sottospazi qualsiasi W_1 e W_2 di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V, l'intersezione $W_1 \cap W_2$ è un sottospazio di V?
8. Dati sottospazi qualsiasi W_1 e W_2 di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V, l'unione $W_1 \cup W_2$ è sempre un sottospazio di V?
9. Dato un sottoinsieme S di un $\mathbb{K}$-spazio V, che cosa si denota con $\langle S \rangle$?
10. Che cos'è un insieme di generatori di uno spazio vettoriale?
11. Si definisca il sottospazio somma di due sottospazi vettoriali.
12. Quando il sottospazio somma di due sottospazi vettoriali è detto *somma diretta*? Quale condizione equivalente alla definizione di somma diretta possiamo dimostrare?

Pratici

13. Si verifichi che gli insiemi di n-uple ordinate $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ sono spazi vettoriali, rispettivamente su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$, considerando somma e moltiplicazione per uno scalare definite componente per componente.
14. Si verifichi che $\mathbb{C}$ è spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.
15. Dati vari esempi di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$, si stabilisca se sono o no sottospazi di $\mathbb{R}^2$.
16. Dati due sottospazi stabilire se sono in somma diretta oppure no (in casi semplici).

Ulteriori quesiti per l'autovalutazione

Teorici

17. Si dia la definizione di sottospazio vettoriale.
18. Si dimostri che l'unione di due sottospazi è un sottospazio se e solo se uno dei due sottospazi è contenuto nell'altro.
19. Si dimostri che l'intersezione di due sottospazi è un sottospazio.
20. Si dimostri che $\lambda_1 \neq \lambda_2$, con $\lambda_i \in \mathbb{K}$, implica $\lambda_1 v \neq \lambda_2 v$ per ogni vettore non nullo di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.
21. Si dimostri che l'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare omogenea con n incognite in $\mathbb{K}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$.

Pratici

22. Disegnare nel piano cartesiano alcuni sottospazi di $\mathbb{R}^2$.
23. Dati due sottospazi identificarne i sottospazi somma e intersezione (in casi semplici).
24. Trovare un insieme di generatori per un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ definito mediante un sistema di equazioni lineari omogenee.