Indipendenza Lineare e Basi

Riferimenti

Teoria: Cantarini pp. 43–54, 67–68 ; Bottacin capp. 1.3.2 e 1.3.3
Esercizi: Novelli pp. 65–118 (escluse le domande che coinvolgono sistemi lineari); Bottacin capp. 1.2, 1.3 e 1.4

Quesiti *must-know*

Teorici

1. Si dia la definizione di indipendenza lineare tra vettori.
2. Cosa significa che un insieme di vettori è libero?
3. Dimostrare che dei vettori in numero finito sono linearmente dipendenti se e solo se uno di loro si scrive come combinazione lineare dei rimanenti.
4. Cosa si intende per base di uno spazio vettoriale?
5. Il vettore nullo può appartenere ad una base?
6. Vettori proporzionali possono appartenere alla medesima base?
7. Cosa si intende per spazio vettoriale finitamente generato?
   (Da qui in poi consideriamo sempre spazi finitamente generati anche senza scriverlo.)
8. Cosa si intende per dimensione di uno spazio vettoriale?
9. È vero che un sottospazio di uno spazio vettoriale finitamente generato è finitamente generato?
10. Se $U \subset W$ sono sottospazi di uno spazio vettoriale V che relazione c'è tra le loro dimensioni?
11. Se $w_1, \ldots, w_r$ sono generatori di uno spazio V e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base per V, e vero che $n \leq r$?
12. Se $w_1, \ldots, w_r$ sono vettori linermente indipendenti di uno spazio V e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base, è vero che $r \leq n$?
13. Se $w_1, \ldots, w_r$ sono vettori linermente indipendenti di uno spazio V e $v_1, \ldots, v_n$ generatori, è vero che $r \leq n$?
14. Se $\{w_1, \ldots, w_r\}$ e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sono basi di V e vero che $r = n$?
15. È vero che in uno spazio vettoriale posso sempre completare un insieme libero ad una base?
16. È vero che in uno spazio vettoriale posso sempre estrarre una base da un insieme di generatori?
17. Elencare le basi canoniche di $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}[x]_{\leq n}, \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{K})$, e $\mathbb{C}$ come $\mathbb{R}$-spazio.
18. Enunciare la formula di Grassmann.

Pratici

19. Stabilire se alcuni vettori dati in $\mathbb{R}^n$ con $n \leq 4$ siano linearmente indipendenti e se formino una base.
20. Stabilire se alcuni vettori dati in $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$ con $n \leq 3$ siano linearmente indipendenti e se formino una base.
21. Stabilire se delle matrici date in $\mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{K})$ con $n, m \leq 3$ siano linearmente indipendenti e se formino una base.
22. Calcolare le coordinate di un vettore rispetto ad una base.
23. Completare ad una base un insieme libero assegnato.

Ulteriori quesiti per l'autovalutazione

Teorici

24. Si dimostri la formula di Grassmann.
25. Si dimostri il Lemma dello scambio.
26. Si dimostri che, per spazi vettoriali finitamente generati, un insieme libero si può completare ad una base.
27. Si dimostri che da un insieme di generatori si può estrarre una base.
28. Si dimostri che il vettore nullo non è mai linearmente indipendente.
29. Si dimostri che $v \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ se e solo se $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \langle v, v_1, \ldots, v_n \rangle$.

Pratici

30. Calcolare la dimensione di alcuni sottospazi vettoriali della loro intersezione e somma.
31. Verificare se un insieme di vettori è libero.
32. Estrarre una base da un insieme di generatori assegnato.