

Autovalori, Autovettori, Diagonalizzabilità

Riferimenti

TEORIA: Cantarini pp. 137–146, 161–183; Bottacin cap. 4.1

ESERCIZI: Novelli pp. 193–230; Bottacin cap. 4.1

Quesiti *must-know*

TEORICI

1. Si dia la definizione di autovalore di un endomorfismo (rispettivamente di una matrice quadrata).
2. Si dia la definizione di autovettore di un endomorfismo (rispettivamente di una matrice quadrata).
3. Si dia la definizione di autospazio relativo ad un autovalore.
4. È vero che ogni vettore di un autospazio è un autovettore?
5. È vero che un autospazio è uno spazio vettoriale?
6. Il vettore nullo può essere un autovettore?
7. Come possiamo caratterizzare l'autospazio relativo all'autovalore 0?
8. Se una matrice quadrata è invertibile può avere autovalore 0?
9. Due matrici simili possono avere determinanti diversi?
10. Cosa si intende per *polinomio caratteristico* di una matrice quadrata?
11. È possibile definire il polinomio caratteristico di un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato? Perché?
12. Che legame c'è tra autovalori e radici del polinomio caratteristico?
13. Cosa si intende per molteplicità algebrica e molteplicità geometrica di un autovalore?
14. Autovettori relativi ad autovalori diversi possono essere linearmente dipendenti?
15. Che relazione c'è tra diagonalizzabilità ed esistenza di basi di autovettori?
16. Si enunci il Teorema di diagonalizzabilità per endomorfismi.
17. È vero che ogni matrice quadrata a coefficienti in \mathbb{C} è diagonalizzabile?
18. È vero che se il polinomio caratteristico ha tutte radici distinte in \mathbb{K} allora la matrice è diagonalizzabile?

PRATICI

19. Calcolare polinomio caratteristico e autovalori per matrici di ordine basso e particolarmente semplici.
20. Calcolare polinomio caratteristico e autovalori per endomorfismi di spazi vettoriali di dimensione bassa.
21. Calcolare molteplicità algebrica (m.a.) e geometrica (m.g.) di un autovalore.
22. Calcolare l'autospazio relativo ad un dato autovalore.
23. Stabilire se una matrice data è diagonalizzabile.

Ulteriori quesiti per l'autovalutazione

TEORICI

24. Quali sono gli autovalori di una proiezione di uno spazio vettoriale finitamente generato su un suo sottospazio (lungo una direzione complementare)?
25. Quali sono gli autovalori di una riflessione di uno spazio vettoriale finitamente generato di asse un suo sottospazio (e di direzione un sottospazio complementare)?
26. Si dimostri che per ogni autovalore di $f : V \rightarrow V$ si ha $1 \leq \text{m.g.} \leq \text{m.a.} \leq \dim_{\mathbb{K}}(V)$.
27. Si dimostri il Teorema di diagonalizzabilità per endomorfismi.

PRATICI

28. Diagonalizzare una matrice data A esplicitando sia la matrice diagonale simile ad A sia la matrice P del cambiamento di base diagonalizzante.
29. Calcolare una base diagonalizzante per un dato endomorfismo.
30. Calcolare le potenze di una matrice diagonalizzabile.