Prodotto Scalare e Ortogonalità

Riferimenti

Teoria: Cantarini pp. 207–236, 331–337; Bottacin capp. 5.1, 5.3, 5.4, 5.5, 5.7 tranne 5.4.1 e 5.4.2 (notare che il libro di Bottacin fa uno studio generale sulle forme bilineari simmetriche. Per noi sono unicamente rilevanti i risultati per le forme bilineari simmetriche definite positive. Notare anche che il generico prodotto scalare tra due vettori v e w viene denotato con $g(v, w)$).
Esercizi: Novelli pp. 231–249; Bottacin cap. 5.6 tranne 5.6.1–5.6.3, 5.6.5 e 5.6.10.

Quesiti *must-know*

Teorici

1. Si dia la definizione del prodotto scalare standard tra vettori di $\mathbb{R}^n$.
2. Si definisca la funzione norma su $\mathbb{R}^n$.
3. Che cosa si intende per vettore normalizzato (ossia versore)?
4. Si enunci e si dimostri la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz.
5. Si enunci e si dimostri la disuguaglianza triangolare della norma.
6. Come si definisce il coseno dell'angolo tra due vettori di $\mathbb{R}^n$?
7. Quando due vettori di $\mathbb{R}^n$ si dicono *ortogonali*?
8. Quando due sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ sono reciprocamente ortogonali?
9. Si diano le definizioni di base ortogonale e ortonormale di vettori.
10. Si dimostri che un insieme ortogonale di vettori non nulli è anche libero, ossia è formato da vettori linearmente indipendenti.
11. Che cosa si intende per complemento ortogonale di un sottospazio U di $\mathbb{R}^n$?
12. Si diano le definizioni di proiezione ortogonale su un sottospazio U di $\mathbb{R}^n$ e di riflessione di asse U.
13. Quando una matrice reale quadrata si dice *ortogonale*?
14. Quali valori possono assumere gli autovalori reali di una matrice ortogonale?
15. Quali valori può assumere il determinante di una matrice ortogonale?
16. Che tipo di insieme formano le colonne di una matrice ortogonale?
17. È vero che la trasposta di una matrice ortogonale è ancora ortogonale?
18. Quando un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ si dice isometria?
19. Si dia la definizione di matrice ortogonalmente diagonalizzabile.
20. È vero che il polinomio caratteristico di una matrice reale simmetrica ha tutte le radici in $\mathbb{R}$?
21. È vero che autovettori relativi ad autovalori distinti di una matrice reale simmetrica sono ortogonali?
22. Si enunci il Teorema Spettrale per matrici simmetriche reali.

Pratici

23. Calcolare il prodotto scalare tra due vettori in $\mathbb{R}^n$, la loro norma, il coseno dell'angolo compreso e i vettori normalizzati ad essi associati.

24. Costruire una base ortonormale per $\mathbb{R}^n$ (o per un sottospazio dato) applicando l'algoritmo di Gram–Schmidt.
25. Determinare il sottospazio ortogonale ad un sottospazio dato.
26. Calcolare le coordinate di un vettore rispetto ad una base ortonormale.
27. Calcolare la matrice rispetto alla base canonica della proiezione ortogonale su un sottospazio U dato.
28. Calcolare la matrice rispetto alla base canonica della riflessione di asse un sottospazio U dato.
29. Calcolare autovalori e autovettori della proiezione ortogonale su un sottospazio U e della riflessione di asse U.
30. Calcolare la proiezione ortogonale di un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ su un sottospazio dato.
31. Calcolare una base ortonormale diagonalizzante per una matrice simmetrica reale e la matrice del cambiamento di base diagonalizzante (supponendo sempre di partire dalla base canonica di $\mathbb{R}^n$).

Ulteriori quesiti per l'autovalutazione

Teorici

32. Quando un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale si dice *euclideo*?
33. Si enunci e si dimostri la legge del parallelogramma.
34. Si dimostri che un vettore è ortogonale a un sottospazio se e solo se è ortogonale ad una sua base.
35. Si dimostri che l'insieme $U^\perp$ di vettori ortogonali ad un sottospazio U di $\mathbb{R}^n$ è anch'esso un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.
36. Si dimostri che $U^\perp$ è in somma diretta con U e che i due sono complementari, ossia $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^n$.
37. Si dimostri che la proiezione ortogonale di un vettore v su un sottospazio identifica il vettore del sottospazio più vicino a v nella distanza definita dalla norma euclidea, ossia minimizza $||v - u||$ al variare di u in U.
38. Dimostrare che gli autovalori reali di matrici ortogonali sono uguali a 1 o -1.
39. È vero che le matrici ortogonali formano un gruppo rispetto al prodotto riga per colonna?
40. Dimostrare che per un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ sono fatti equivalenti: (1) f è isometria; (2) f preserva la norma dei vettori; (3) la matrice associata a f sulla base canonica è ortogonale; (4) f manda basi ortonormali in basi ortonormali..
41. Quali sono le possibili isometrie di $\mathbb{R}^2$?
42. Quali sono le possibili isometrie di $\mathbb{R}^3$?
43. Si dimostri il Teorema Spettrale per matrici simmetriche reali.

Pratici

44. Calcolare l'insieme di vettori che hanno una stessa proiezione data su un sottospazio assegnato.
45. Determinare la matrice rispetto alla base canonica associata ad una rotazione oraria o antioraria in $\mathbb{R}^2$.
46. Stabilire se un'applicazione lineare data sia una proiezione ortogonale.
47. Stabilire se un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ sia una riflessione.