Prodotto Vettoriale, Prodotto Misto, Spazi Affini e Spazi Euclidei

Riferimenti

Teoria: Cantarini pp. 237–293; Bottacin capp. 5.8 e 7.1–7.5
Esercizi: Novelli pp. 251–282; Bottacin capp. 6

Quesiti *must-know*

Teorici

1. Si definisca il *prodotto vettoriale* di due vettori in $\mathbb{R}^3$.
2. Si elenchino le principali proprietà del prodotto vettoriale.
3. Qual è l'interpretazione geometrica del prodotto vettoriale?
4. Si definisca il *prodotto misto* di tre vettori in $\mathbb{R}^3$.
5. Qual è l'interpretazione geometrica del prodotto misto?
6. Si definisca $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$, lo *spazio affine standard* di dimensione n su un campo $\mathbb{K}$ arbitrario.
7. Che cosa si intende per *sottospazio affine* (o *sottovarietà lineare*) di $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$?
8. Che cos'è la *giacitura* o *sottospazio direttore* di un sottospazio affine?
9. Che cosa si intende per *dimensione* di un sottospazio affine?
10. Si dia la definizione di retta/piano/iperpiano in $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$
11. Che cosa si intende per *sistema di riferimento* in $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$?
12. Che cosa sono le *coordinate* di un punto di $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ rispetto ad un sistema di riferimento fissato?
13. Quando due sottospazi affini si dicono paralleli?
14. Che cosa si intende per *fascio proprio di rette* in $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ di centro un punto P?
15. Che cosa si intende per *fascio improprio di rette in* $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$?
16. Che cosa si intende per *fascio proprio di piani* in $\mathbb{A}^3(\mathbb{K})$ di centro o supporto una retta?
17. Che cosa si intende per *fascio improprio di piani in* $\mathbb{A}^3(\mathbb{K})$?
18. Elencare le possibili posizioni reciproche di due rette nel piano affine.
19. Elencare le possibili posizioni reciproche di due rette in $\mathbb{A}^3(\mathbb{K})$.
20. Elencare le possibili posizioni reciproche di due piani in $\mathbb{A}^3(\mathbb{K})$.
21. Elencare le possibili posizioni reciproche di una retta e un piano in $\mathbb{A}^3(\mathbb{K})$.
22. Si definisca $\mathbb{E}^n(\mathbb{R})$, lo *spazio euclideo standard* di dimensione n.
23. Si definisca la distanza di due punti in $\mathbb{E}^n(\mathbb{R})$ e si elenchino alcune sue proprietà.
24. Si definisca la distanza tra due sottoinsiemi o sottospazi affini in $\mathbb{E}^n(\mathbb{R})$.
25. Come si caratterizzano i punti di minima distanza tra due sottovarietà lineari in $\mathbb{E}^n(\mathbb{R})$?.

Pratici

26. Calcolare il prodotto vettoriale di due vettori dati in $\mathbb{R}^3$.
27. Calcolare il prodotto misto di tre vettori dati in $\mathbb{R}^3$.
28. Calcolare le equazioni parametriche di un sottospazio affine di $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ noto un punto di passaggio e la sua giacitura.
29. Calcolare le equazioni cartesiane di un sottospazio affine di $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ note le sue equazioni parametriche e viceversa.
30. Riconoscere la posizione reciproca di due sottospazi affini dati.
31. Calcolare le coordinate del punto medio di un segmento in $\mathbb{E}^n$.
32. Calcolare le coordinate del baricentro di un triangolo o di un tetraedro.
33. Calcolare la distanza tra due punti in $\mathbb{E}^n$.
34. Calcolare la distanza di un punto da una retta nel piano euclideo.
35. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ saper calcolare le distanze: di un punto da un piano; di un punto da una retta; di una retta da un piano; tra due rette; tra due piani paralleli.

Ulteriori quesiti per l'autovalutazione

Teorici

36. Descrivere le posizioni reciproche di due sottospazi affini in $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ o $\mathbb{A}^3(\mathbb{K})$ tramite il teorema di Rouché-Capelli.
37. Dimostrare che se $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ sono sottovarietà lineari di $\mathbb{E}^n$ e $P \in \mathcal{L}$, $Q \in \mathcal{M}$ sono punti tali che il vettore $P - Q$ è ortogonale sia a $\mathcal{L}$ sia a $\mathcal{M}$ allora P, Q sono punti di minima distanza ossia $d(P, Q) = d(\mathcal{L}, \mathcal{M})$.
38. Dimostrare che se $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ sono sottovarietà lineari di $\mathbb{E}^n$ e $P \in \mathcal{L}$, $Q \in \mathcal{M}$ sono punti di minima distanza allora il vettore $P - Q$ è ortogonale sia a $\mathcal{L}$ sia a $\mathcal{M}$.

Pratici

39. Calcolare i punti di intersezione di due sottospazi affini dati.
40. Calcolare la distanza e le coppie di punti di minima distanza tra sottovarietà lineari in $\mathbb{E}^n$.