ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Lezioni 8-9, 13/10/2021

Prof. Luis García-Naranjo

$\mathbb{K}$-spazio vettoriale V

Insieme V con due operazione $+$, $\cdot$ che soddisfano

(1) $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$

(2) $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$

(3) Esiste $0 \in V$ tale che $v + 0 = 0 + v = v \quad \forall v \in V$;

(4) per ogni $v \in V$ esiste $-v \in V$ tale che $v + (-v) = (-v) + v = 0$

(5) $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$

(6) $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$

(7) $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v)$

(8) $1 \cdot v = v$

Alcune proprietà degli Spazi Vettoriali

a) $\underbrace{0}_{0 \in \mathbb{K}} \cdot v = 0 \quad \forall v \in V$

b) $\underbrace{(-1)}_{\text{l'opposto di } 1_{\mathbb{K}}} \cdot v = \underbrace{-v}_{\text{opposto di } v} \quad \forall v \in V$

c) $\lambda \cdot 0 = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$

d) Sia $v \in V$, $v \neq 0$. Se $\lambda \cdot v = 0$ allora $\lambda = 0$.

Dimostrazione di (a) $\left(\underbrace{0}_{0 \in \mathbb{K}} \cdot v = \underbrace{0}_{0 \in V} \right)$

0_V

$0_{\mathbb{K}}$

$+_{\mathbb{K}}$ $\cdot_{\mathbb{K}}$

$\cdot_V$ $+_V$

$$0 \cdot v + v \overset{(8)}{=} 0 \cdot v + 1 \cdot v \overset{(6)}{=} (0+1) \cdot v$$

$$= 1 \cdot v \underset{(8)}{=} v$$

$$0 \cdot v + v = v$$

Sommando $-v$:
(l'opposto di v)
(4)

$$(0 \cdot v + v) + (-v) = \underbrace{v + (-v)}$$

$$\downarrow ①$$

$$0 \cdot v + (\underbrace{v + (-v)}_{0}) = 0$$

$$0 \cdot v + 0 = 0$$

$$(3) \downarrow$$

$$0 \cdot v = 0 \quad \blacksquare$$

Dim. di (b)

$$\underbrace{(-1)}_{\text{opposto di } 1 \in \mathbb{K}} \cdot v = \underbrace{-v}_{\text{Opposto di } v} \quad \forall v \in V$$

$$(-1) \cdot v + v \overset{(8)}{=} (-1) \cdot v + 1 \cdot v$$

$$\overset{(6)}{=} (-1+1) \cdot v$$

$$= 0 \cdot v$$

$$= 0$$

Quindi $(-1) \cdot v$ è l'opposto di v.

Cioè $(-1)\cdot v = -v$ ∎

<u>Dimostrazione di (c)</u> $(\lambda \cdot 0 = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K})$.

Sia $v \in V$. Se $\lambda = 0$ OK per (a).

Supp. $\lambda \neq 0$

$$
\begin{aligned}
v + \lambda \cdot 0 &\overset{(8)}{=} 1 \cdot v + \lambda \cdot 0 \\
&= (\lambda \lambda^{-1}) \cdot v + \lambda \cdot 0 \\
&\overset{(7)}{=} \lambda \cdot (\lambda^{-1} \cdot v) + \lambda \cdot 0 \\
&\overset{(5)}{=} \lambda \cdot (\lambda^{-1} \cdot v + 0) \\
&\overset{(3)}{=} \lambda \cdot (\lambda^{-1} \cdot v) \\
&= (\lambda \lambda^{-1}) \cdot v \\
&= 1 \cdot v = \underline{\underline{v}}
\end{aligned}
$$

Quindi $v + \lambda \cdot 0 = v \quad \forall v \in V$.

Cioè $\underline{\underline{\lambda \cdot 0 = 0}}$ ∎

Dimostrazione di (d) (Se $v \in V$ $v \neq 0$ e $\lambda \cdot v = 0$ allora $\lambda = 0$)

<u>Per assurdo.</u>

Se $\lambda \neq 0$ allora esiste λ^{-1}.

Moltiplico per λ^{-1}: $\quad \lambda \cdot v = \mathbf{0}$

$$\lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda^{-1} \cdot \mathbf{0}$$

$$(\lambda^{-1}\lambda) \cdot v = \mathbf{0} \quad \swarrow (c)$$

$$1 \cdot v = \mathbf{0}$$

$$v = \mathbf{0} \qquad \underline{\text{ASSURDO.}}$$

Quindi $\lambda = 0$ ■

<u>Prop.</u> Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale

Sia $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$

Se $\lambda_1 \cdot v = \lambda_2 \cdot v$ allora $\lambda_1 = \lambda_2$.

<u>Dim.</u>

$$\lambda_1 \cdot v = \lambda_2 \cdot v$$

$$\lambda_1 \cdot v + (-\lambda_2 \cdot v) = \mathbf{0}$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot v = \mathbf{0}$$

Per (d) $\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2$ ■

D'ora in poi:
$$\begin{cases} v_1 + v_2 = v_1 + v_2 \\ \lambda \cdot v = \lambda v \\ \mathbf{0} = \vec{0} \end{cases}$$

Def. Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Un **sottospazio vettoriale** di V è un sottoinsieme $W \subseteq V$ che sia anche uno spazio vettoriale (con le stesse operazione di somma e di prodotto di un vettore per uno scalare di V).

Bisogna controllare che:

1) $\forall w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$ W è chiuso per la somma

(è ovvio che $w_1+w_2 \in V$)

2) $\forall w \in W,\ \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda w \in W$ W è chiuso per il prodotto fra scalari e vettori

(è ovvio che $\lambda w \in V$)

Prop. Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e sia $W \subseteq V$ non vuoto. Allora W è sottosp. di V $\Longleftrightarrow$ W è chiuso rispetto alla somma di vettori e alla molt. fra scalari e vettori.

<u>Dim</u>

"⇒") W è sottosp. di V significa che W è $\mathbb{K}$-spazio vettoriale con le stesse operazioni di V.

Allora per la definizione di spazio vettoriale W è chiuso per la somma e la molt. fra scalari e vettori.

"⇐") Sup. $W \subseteq V$ è chiuso rispetto alla somma e molt. fra scalari e vettori. Dato che W è chiuso risp. al prodotto fra scalari e vettori abbiamo:

$$w \in W \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 \cdot w = \vec{0} \Rightarrow \vec{0} \in W \\ (-1) \cdot w = -w \Rightarrow -w \in W \end{array}\right\} \text{le propr. (3) e (4) di spazio vettoriale sono verificate per } W.$$

Tutte le altre proprietà (1, 2, 5, ..., 8) nella def. di spazio vettoriale sono verificate per W perché sono valide per V.

$\blacksquare$

Notare che:

- Se $W \subseteq V$ è un sottospazio $\Rightarrow \vec{0} \in W$.
- $\{\vec{0}\}$ è un sottospazio di V.
- V è un sottosp. di V.

ESEMPI

(1) $V = \mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$$W = \{(x,y) \mid 4x - y = 0\}$$

$W \subseteq \mathbb{R}^2$ è sottosp. vettoriale?

1) $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \overset{?}{\in} W$

$$\left.\begin{array}{l} w_1 = (x_1, y_1) \\ w_2 = (x_2, y_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 4x_1 - y_1 = 0 \\ 4x_2 - y_2 = 0 \end{array}$$

$$w_3 = w_1 + w_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$$
$$= (\underbrace{x_1 + x_2}_{x_3}, \underbrace{y_1 + y_2}_{y_3}) = (x_3, y_3)$$

$w_3 \overset{?}{\in} W \qquad 4x_3 - y_3 = 0 \Leftrightarrow w_3 \in W$

$$4x_3 - y_3 = 4(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)$$
$$= \underbrace{(4x_1 - y_1)}_{0} + \underbrace{(4x_2 - y_2)}_{0} = 0 + 0 = 0$$

$\Rightarrow w_3 \in W \quad \Rightarrow W$ è chiuso per la somma.

2) $w \in W, \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda w \overset{?}{\in} W$

$w = (x, y) \qquad w \in W \Rightarrow 4x - y = 0$

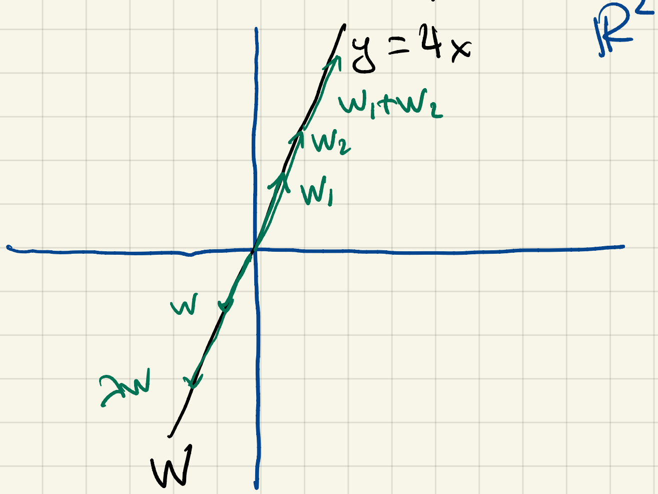
$\lambda w = \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \overset{?}{\in} W$

$4(\lambda x) - \lambda y = 4\lambda x - \lambda y = \lambda(\underbrace{4x - y}_{0})$

$= \lambda(0) = \underline{\underline{0}}$

$\Rightarrow \lambda w \in W \Rightarrow W$ è chiuso per il prodotto fra scalari e vettori.

Quindi: W è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.



$\| $

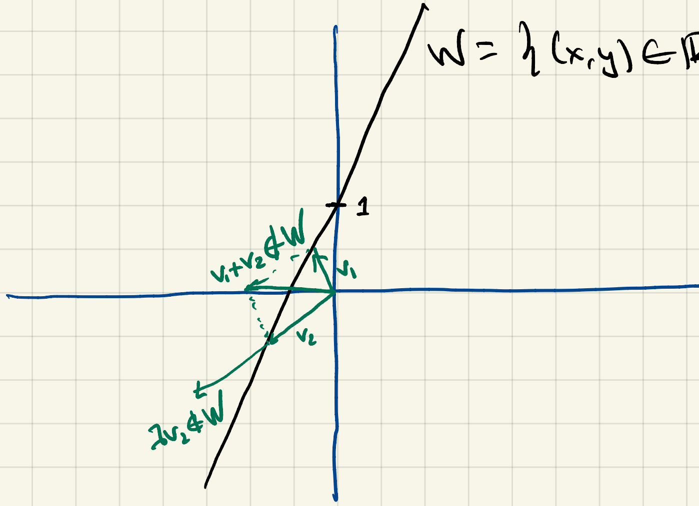
$\{(x, y) \mid 4x - y = 0\}$

(2) $V = \mathbb{R}^2$

$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - y = -1\}$

$\vec{0} = (0, 0) \notin W \Rightarrow W$ <u>non</u> è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - y = -1\}$



③ $V = \mathbb{R}^2 \qquad W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y = 0\}$

$\vec{0} = (0,0) \in W$ ok

$w_1, w_2 \in W \qquad w_3 = w_1 + w_2 \overset{?}{\in} W$

$$\left.\begin{array}{l} w_1 = (x_1, y_1) \\ w_2 = (x_2, y_2) \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x_1^2 - y_1 = 0 \\ x_2^2 - y_2 = 0 \end{array}$$

$$w_3 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) = (x_3, y_3)$$

$$w_3 \in W \iff \underset{\parallel}{x_3^2 - y_3} \overset{?}{=} 0$$

$$(x_1 + x_2)^2 - (y_1 + y_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - y_1 - y_2$$

$$= \underbrace{(x_1^2 - y_1)}_{0} + \underbrace{(x_2^2 - y_2)}_{0} + 2x_1x_2$$

$$= 2x_1x_2 \qquad 2x_1x_2 \overset{?}{=} 0$$

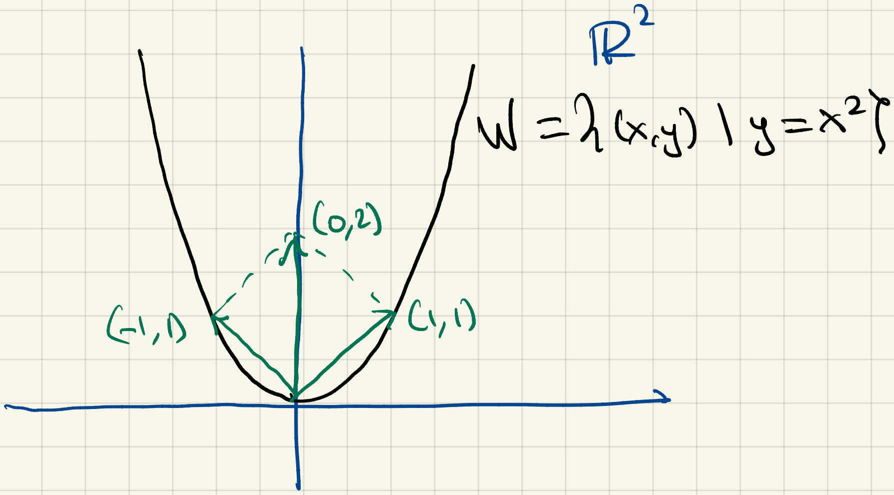
↳ In generale <u>no</u>.

Se $\left.\begin{array}{l} w_1 = (1,1) \\ w_2 = (-1,1) \end{array}\right\} \in W \qquad W = \{(x,y) \mid x^2 - y = 0\}$

$$w_1 + w_2 = (1,1) + (-1,1) = (0,2) \notin W$$

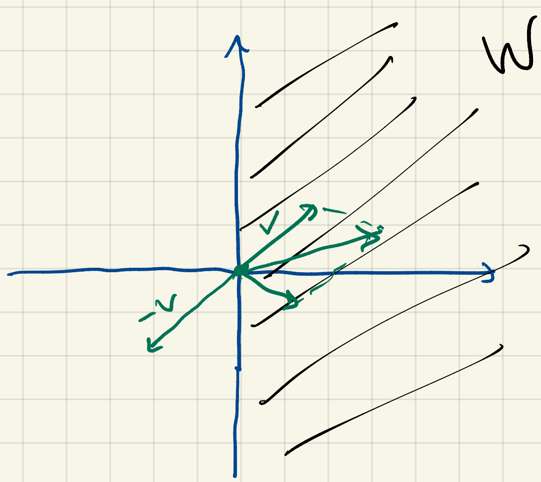
$\Rightarrow W$ non è chiuso per la somma

$\Rightarrow W$ non è sottosp.



$V = \mathbb{R}^2$

4 $\quad W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$

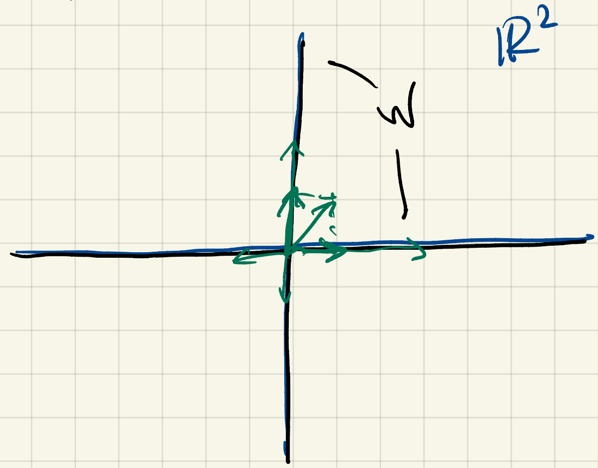


W è chiuso per la somma.

W non è chiuso per la molt. per scalari negativi.

W non è sottosp. vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

(5) $W = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0 \}$



$\vec{0} \in W$

W è chiuso per la molt. fra vettori e scalari

W <u>non</u> è chiuso per la somma

W non è sottosp. di $\mathbb{R}^2$.

---

3 posibilità

Se W è sottosp. di $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$

1: $W = \{\vec{0}\}$

2: W = una retta passante per l'<u>origine</u>

3: $W = \mathbb{R}^2$