Tema 1

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Aerospaziale

Docenti: A. Bertapelle, G. Giusteri, V. Grazian

10 febbraio 2020

PRIMA PARTE

Domande a risposta singola. Ognuna vale 1,25 punti e si devono totalizzare almeno 10 punti.

1. Dato il numero complesso z di modulo 1 e argomento $\pi/6$, qual è la rappresentazione algebrica del numero z^{-5}?

☐ $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$ ☐ $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

☐ $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ ☐ $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

2. Quanto vale il determinante della seguente matrice M?

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

☐ 30

☐ 6

☐ 0

☐ −18

3. Dati in $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ il punto $P = (2, -1)^t$ e la retta $r:\ 5x + 12y = -15$, $d(P, r)$ vale . . .

☐ 1 ☐ 2/13

☐ 2 ☐ $2/\sqrt{17}$

4. Una matrice A si dice ortogonale se . . .

☐ $A^t = -A$ ☐ $A^t = A^{-1}$

☐ $A^t = -A^{-1}$ ☐ $A^t = A$

5. Nello spazio $\mathbb{R}[x]_{\leq 4}$, i polinomi $x + x^2 + x^3$, $2 + x^2$, $2x + x^2$, $x - x^3$ e $1 - x$ generano un sottospazio di dimensione . . .

☐ 5 ☐ 4

☐ 3 ☐ 2

6. Quanto vale la nullità di un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ la cui immagine ha dimensione 3?

☐ 1 ☐ 2

☐ 3 ☐ 4

7. Un'applicazione lineare $f : V \to V$ è invertibile se e solo se la matrice A ad essa associata è tale che . . .

☐ $\mathrm{tr}(A) \neq 0$ ☐ $\det(A) \neq 0$

☐ $\ker(A) \neq 0$ ☐ $\mathrm{rk}(A) \neq 0$

8. Gli autovettori di un'applicazione lineare relativi ad autovalori distinti . . .

☐ possono essere opposti

☐ possono essere linearmente dipendenti

☐ sono sempre linearmente indipendenti

☐ sono sempre ortogonali

9. Data la base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$, quale dei seguenti prodotti è uguale a $e_1 \cdot (e_2 \times e_3)$?

☐ $e_1 \cdot (e_3 \times e_2)$ ☐ $(e_2 \times e_1) \cdot e_3$

☐ $e_3 \cdot (e_1 \times e_2)$ ☐ $(e_1 \times e_3) \cdot e_2$

10. Ogni proiezione $\Pi : V \to V$ è tale che . . .

☐ $\Pi \circ \Pi = -\mathrm{Id}_V$ ☐ $\Pi \circ \Pi = \mathrm{Id}_V$

☐ $\Pi \circ \Pi = -\Pi$ ☐ $\Pi \circ \Pi = \Pi$

11. Per quale valore di k in $\mathbb{R}$ le soluzioni dell'equazione $5x + (k-1)y + 5z = k - 2$ costituiscono un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$?

☐ 1 ☐ 2

☐ 6 ☐ 7

12. Quali sono le coordinate del baricentro del triangolo di vertici $(0, 3)$, $(8, 0)$, e $(7, 6)$?

☐ $(5, 3)$ ☐ $(4, 3)$

☐ $(7, 2)$ ☐ $(5, 2)$

(voltare pagina)

SECONDA PARTE

Si deve raggiungere un minimo di 8 punti in questa parte

Teoria

1. Si enunci e si dimostri la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz. (3 punti)
2. Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare. Si dimostri che f è iniettiva se e solo se $\operatorname{Ker} f = 0$. (1 punto)

Esercizi

Esercizio 1. Si consideri $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 - 3x_4 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \end{pmatrix}$. (4 punti)

1. Determinare l'immagine di f esibendo una sua base e le equazioni cartesiane.
2. Determinare il nucleo di f esibendo una sua base e le equazioni cartesiane.
3. Calcolare $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$ e dire se essi siano o meno in somma diretta come sottospazi di $\mathbb{R}^4$.
4. Considerando l'azione di f su $\operatorname{Im} f$, se ne giustifichi la diagonalizzabilità e si scriva una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di f.

Esercizio 2. Si consideri il sistema lineare a coefficienti reali (4 punti)

$$\begin{cases} 2x_1 + (k+1)x_2 + x_3 + (1+2k)x_4 = k-2 \\ x_1 + x_2 + kx_4 = -1 \\ x_1 + kx_2 + (k+1)x_3 + (2k+1)x_4 = k-1 \end{cases}$$

1. Scrivere la matrice incompleta A_k e la matrice completa $(A_k|b_k)$ del sistema e determinare i loro ranghi in dipendenza del parametro reale k.
2. Dire per quali valori del parametro reale k il sistema $A_k\mathbf{x} = b_k$ ammette soluzioni.
3. Determinare le soluzioni del sistema quando $k = 0$.
4. Esibire un nuovo termine noto b'_k, ottenuto cambiando i coefficienti di k nell'espressione di b_k, in modo che il sistema $A_k\mathbf{x} = b'_k$ ammetta soluzioni per qualsiasi k reale.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ si consideri il piano π di equazione $4x - 3z = 1$. (4 punti)

1. Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per il punto di coordinate $(1,0,1)^t$ e ortogonale a π.
2. Determinare la giacitura U di π, una base per U e le equazioni parametriche dei due piani π', π'' paralleli a π e tali che $d(\pi,\pi') = d(\pi,\pi'') = 5$.
3. Scrivere le equazioni parametriche della retta s' contenuta in π', incidente r e di giacitura $V = \langle (0,1,0)^t \rangle$.
4. Scrivere le equazioni parametriche della retta s'' contenuta in π'', incidente r e di giacitura $V^\perp \cap U$.
5. Quanto vale $d(s', s'')$?

Suggerimento: visualizzare la situazione tramite uno schizzo.

Diamo nel seguito alcune indicazioni su come rispondere alle domande degli esercizi della seconda parte.

ESERCIZIO 1.

1) La matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche del dominio e codominio è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Imf è generato dalle immagini dei vettori di una base, ad esempio quella canonica, e dunque $Imf = \langle f(e_1), \dots, f(e_4) \rangle$ è generato dalle colonne della matrice A. Lavorando con operazioni elementari sulle colonne di A si indaga se tali vettori formino o meno una base. La matrice A ha rango 3 e nel nostro caso prese 3 colonne qualsiasi di A queste formano una base dell'immagine; pertanto

$$Imf = \langle 2e_1 - e_2 - e_3 - e_4, 2e_1 + 5e_2 + 2e_3 + 2e_4, -e_1 - e_2 + 2e_3 - e_4 \rangle = \langle 3e_1 - e_4, 2e_1 + e_2, e_1 - e_3 \rangle.$$

L'equazione cartesiana di Imf sarà una qualsiasi equazione il cui insieme di soluzioni coincida con Imf. Possiamo trovarla in vari modi:

I metodo: considero le equazioni parametriche di Imf: $\begin{cases} x_1 = 3a + 2b + c \\ x_2 = b \\ x_3 = -c \\ x_4 = -a \end{cases}$ (ho usato la seconda base perché più semplice) ed elimino i parametri. Si ha che l'equazione cercata è $x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$.

II metodo: Calcolo il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & -1 & x_3 \\ -1 & 0 & 0 & x_4 \end{pmatrix}$$

(i vettori di Imf devono essere l.d. con i vettori di una base di Imf.)

2) Per determinar il nucleo, devo risolvere il sistema $AX = 0$. Lavoro con operazioni elementari sulle righe della matrice A fino a ridurla a scala per righe. Precisamente effettuando nell'ordine le operazioni: scambio I,IV; II-I; III-I; IV-2I, IV-2II, IV+III, $\frac{1}{3}$ II; $\frac{1}{3}$ III si ottiene la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3. Il sistema $AX = 0$ è equivalente al sistema $A'X = 0$ e ha per soluzioni $\ker f = \langle e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \rangle$. Si noti che le colonne di A' NON sono vettori di Imf per cui NON posso usare A' per determinare Imf. Il sistema $AX = 0$ (e qualsiasi sistema ad esso equivalente) dà le equazioni cartesiane di $\ker f$ (ossia un sistema le cui soluzioni sono il sottospazio $\ker f$ di $\mathbb{R}^4$). Per le applicazioni conviene considerare le prime 3 equazioni del sistema $A'X = 0$.

3) Si dimostra che $\ker f \cap \operatorname{Im} f = 0$ osservando che il vettore $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ non appartiene all'immagine di f . Più laborioso: considerare il sistema di quattro equazioni nelle incognite x_i ottenuto mettendo a sistema le equazioni cartesiane del nucleo e dell'immagine.

Dunque $\mathbb{R}^4 = \ker f \oplus Imf$ e una base di $\mathbb{R}^4$ si ottiene unendo una base di $\ker f$ con una base dell'immagine di f

4) L'ultima domanda chiede di calcolare come prima cosa l'immagine di Imf tramite f. Da calcolo esplicito si vede che $f(3e_1 - e_4) = 9e_1 - 3e_4, f(2e_1 + e_2) = 6e_1 + 3e_2, f(e_1 - e_3) = 3e_1 - 3e_3$ da cui si deduce che i vettori della base di Imf sono autovettori di autovalore 3. Inoltre ogni base di $\ker f$ è formata da un autovettore di autovalore 0. Dunque f è diagonalizzabile.

ESERCIZIO 2

1) Con operazioni elementari sulle righe delle matrici associate al sistema si trova un sistema equivalente di matrice completa

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & k & -1 \\ 0 & k-1 & 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & k & k & 0 \end{array}\right)$$

Questa matrice è a scala solo se $k \neq 0, 1$ e in questo caso i ranghi della matrice completa ed incompleta sono entrambi 3.

Se $k = 0$ i ranghi della matrice completa ed incompleta sono entrambi 2.

Se $k = 1$ il rango della matrice incompleta è 2 mentre quello della matrice completa è 3.

2) Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema ammette soluzione per $k \neq 1$.

3) Sostituendo $k = 0$ nella matrice B e risolvendo il sistema ad essa associato (ponendo x_3, x_4 come parametri) troviamo che l'insieme delle soluzioni è dato da

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1-a-b \\ a+b \\ a \\ b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

4) Un sistema ha soluzione se la colonna dei termini noti è combinazione lineare delle colonne della matrice incompleta. Nel nostro caso questo è sempre vero se il coefficiente di k è 0. In tal caso la colonna dei termini noti è opposta alla prima colonna della matrice.

ESERCIZIO 3

Se facciamo uno schizzo dei dati dell'esercizio vediamo tre piani paralleli π', π, π'' (distanti 5 il primo dal secondo e 5 il secondo dal terzo) e una retta r perpendicolare ai tre piani. La retta s' è contenuta in π' e passa per il punto di intersezione P' di r con π'; la retta s'' è contenuta in π'' e passa per il punto di intersezione P'' di r con π''. Dunque la distanza delle due rette sarà $d(P', P'') = 10$, e possiamo rispondere anche senza svolgere i punti 1)-4).

1) La direzione ortogonale a π è data dal vettore $(4, 0, -3)^t$ (ricavato dai coefficienti dall'equazione cartesiana del piano) e dunque $r = (1, 0, 1)^t + \langle 4e_1 - 3e_3 \rangle$. Scrivendo le equazioni parametriche di r, $\begin{cases} x = 1 + 4a \\ y = 0 \\ z = 1 - 3a \end{cases}$ ed eliminando il parametro a troviamo che le equazioni cartesiane di r sono $\begin{cases} y = 0 \\ 3x + 4z = 7 \end{cases}$ (geometricamente r è intersezione di due piani!).

2) La giacitura U di π si trova come soluzione dell'equazione $4x - 3z = 0$ e consiste di tutti i vettori paralleli a π. Risulta $U = \langle e_2, 3e_1 + 4e_3 \rangle$. Per determinare π', π'' basta considerare il punto $P = (1, 0, 1)$ di intersezione di r con π e determinare i due punti P', P'' di r aventi distanza 5 da P. Ossia i punti di coordinate $(1 + 4a, 0, 1 - 3a)$ aventi distanza 5 da P. Si trova che $a^2 = 1$ ossia $a = \pm 1$ e i due punti sono $P' = (5, 0, -2)^t, P'' = (-3, 0, 4)$. Il piano π' sarà il piano $P' + U$ e π'' sarà il piano $P'' + U$.

3)+4) $s' = P' + \langle e_2 \rangle$ e $s'' = P'' + \langle 3e_1 + 4e_3 \rangle$.

In alternativa si possono determinare i piani π, π'' osservando che essi hanno equazione cartesiana del tipo $4x - 3z = d$ perché paralleli a π. Basta allora richiedere che essi abbiano distanza 5 da P. Con la nota formula di distanza punto-piano, si trova $|4 - 3 - d| = 25$ da cui si ricava $d = 26, -24$.