Tema 1

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Aerospaziale

Docenti: A. Bertapelle, G. Giusteri, V. Grazian

20 Gennaio 2020

PRIMA PARTE

Ogni risposta corretta vale 1,25 punti e si deve raggiungere un minimo di 10 punti in questa parte

1. Dato il numero complesso $z = 3 + 4\mathrm{i}$, qual è la rappresentazione algebrica del numero z^{-1}?

☐ $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\mathrm{i}$ ☐ $3 - 4\mathrm{i}$

☐ $\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\mathrm{i}$ ☐ $\frac{3}{25} - \frac{4}{25}\mathrm{i}$

2. Dati due sottospazi ortogonali W_1 e W_2 di $\mathbb{R}^n$, quale dei seguenti insiemi <u>*non è*</u> sottospazio di $\mathbb{R}^n$?

☐ $W_1 \cup W_2$ ☐ $W_1 \cap W_2$

☐ $W_1^\perp \cap W_2^\perp$ ☐ $W_1 \oplus W_2$

3. Quale dei seguenti insiemi è sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}$ come $\mathbb{R}$-spazio?

☐ $\{4 + \lambda 2\mathrm{i} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ☐ $\{2\mathrm{i} - 2\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

☐ $\{2\mathrm{i} + \lambda\mathrm{i} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ☐ $\{\mathrm{i} - \lambda(1 - \mathrm{i}) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

4. In uno spazio vettoriale finitamente generato, la dimensione è la cardinalità di ...

☐ ogni insieme libero ☐ ogni vettore

☐ ogni base ☐ ogni generatore

5. Nello spazio di polinomi $V = \mathbb{R}[x]_{\le 2}$, i polinomi $x + x^2$, $1 + x$ e $1 - x^2$ sono ...

☐ una base di V ☐ generatori di V

☐ linearmente dipendenti ☐ ortogonali

6. Quanto vale il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 5 & -6 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 8 \end{pmatrix} \quad ?$$

☐ 1 ☐ 2

☐ 3 ☐ 4

7. Data un'applicazione lineare f tra due spazi vettoriali V e W, l'immagine di f è ...

☐ immagine di 0_V ☐ preimmagine di W

☐ sottospazio di W ☐ sottospazio di V

8. Quanto vale la nullità della proiezione $\Pi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ tale che $\Pi(v) = (v \cdot e_1)e_1$ per ogni $v \in \mathbb{R}^5$, con e_1 versore in $\mathbb{R}^5$?

☐ 0 ☐ 1

☐ 4 ☐ 5

9. Lo spettro di un endomorfismo su uno spazio vettoriale di dimensione n contiene ...

☐ al più n vettori ☐ al più n scalari

☐ infiniti vettori ☐ infiniti scalari

10. Dati due vettori linearmente indipendenti u e v in $\mathbb{R}^3$, quale dei seguenti vettori li completa ad una base di $\mathbb{R}^3$?

☐ $u - v$ ☐ $u - (u \cdot v)v$

☐ $u \times v$ ☐ $u + v$

11. Dati in $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ il punto $P = (2, 3, -1)^t$ e il piano $\pi_1 : \ 3x + 4z + 8 = 0$, $d(P, \pi_1)$ vale ...

☐ 2 ☐ $1/\sqrt{7}$

☐ $3\sqrt{5}$ ☐ $6/5$

12. Quale proprietà ha la matrice reale

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad ?$$

☐ È diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ ☐ È invertibile

☐ È antisimmetrica ☐ È ortogonale

(voltare pagina)

SECONDA PARTE

Si deve raggiungere un minimo di 8 punti in questa parte

Teoria

1. Quando una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ si dice diagonalizzabile? Si dimostri l'enunciato che lega la diagonalizzabilità di A all'esistenza di una base di $\mathbb{K}^n$ formata da autovettori di A. (3 punti)

2. Si dimostri il fatto seguente: *Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare e sia $U \subseteq V$ un sottospazio vettoriale. Allora $f(U) \subseteq W$ è un sottospazio vettoriale.* (1 punto)

Esercizi

Esercizio 1. Considerare l'applicazione lineare di $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_4 \\ 3x_2 - 4x_3 \\ 2x_1 + x_4 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$. (4 punti)

1. Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche del dominio e del codominio.
2. f è iniettiva? Se no, calcolare una base del nucleo.
3. f è biiettiva? Se sì esplicitare l'inversa (ad esempio scrivendone la matrice)
4. Scrivere la matrice B di f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{e_3 - e_1, e_1, e_2 + e_1, e_4\}$ del dominio e la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ del codominio.
5. Si consideri il sottospazio $U \subset \mathbb{R}^4$ di equazione $x_2 = 0$. Scrivere una base di U e le equazioni cartesiane di $f(U)$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice a coefficienti reali (4 punti)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calcolare il polinomio caratteristico di A, il determinante di A e la sua traccia.
2. Calcolare gli autovalori di A, con la loro molteplicità algebrica.
3. Calcolare una base per ciascun autospazio di A e se possibile determinare una matrice che diagonalizzi A.
4. A è ortogonalmente diagonalizzabile?

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ si considerino le rette (4 punti)

$$r : \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - y + z = 0. \end{cases} \quad , \qquad s : \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

1. Determinare una rappresentazione parametrica di r.
2. Determinare le equazioni cartesiane di s.
3. Determinare la posizione reciproca di r ed s, giustificando la risposta.
4. Determinare la distanza $d(r, s)$ e i punti di minima distanza.
5. Siano π il piano contenente r e parallelo ad s e π' il piano contenente s e parallelo ad r. Scriverne le equazioni cartesiane e calcolarne la distanza.

RISULATI SINTETICI.

ESERCIZIO 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$. Ha rango 4 dunque f è biiettiva.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/7 & 0 & 4/7 \\ 0 & -1/7 & 0 & 3/7 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$U = \langle e_1, e_3, e_4 \rangle$, $f(U) = \langle e_1 + 2e_3, -4e_2 + e_4, e_1 + e_3 \rangle = \langle e_1, -4e_2 + e_4, e_3 \rangle$ ha equazione $x_2 + 4x_4 = 0$.

ESERCIZIO 2

1) $p_A(x) = (x-1)^2(x-2)^2$; $det(A) = 4$, $tr(A) = 6$.

2) Gli autovalori di A sono $1, 2$, entrambi di molteplicità algebrica 2.

3) $V_1 = \langle e_2, e_3 - e_4 \rangle$, $V_2 = \langle e_1 + 2e_2, 2e_3 - e_4 \rangle$ e si ha

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ con $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4) A non è simmetrica, dunque non ortogonalmente diagonalizzabile.

ESERCIZIO 3

1) $r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$ 2) $s : \begin{cases} x = 0 \\ y = 3. \end{cases}$

3) Le due rette sono sghembe.

4) I punti di minima distanza hanno coordinate $(-1, 1, 2)^t$, $(0, 3, 2)^t$ e dunque la distanza è $\sqrt{5}$.

5) Il piano Π contenente r e parallelo ad s ha equazione $x + 2y = 1$. Il piano Π' contenente s e parallelo ad r ha equazione $x + 2y = 6$. La distanza dei due piani è $d(r, s) = \sqrt{5}$.